Estatística Básica

Prof. Dr. Walmes M. Zeviani - walmes@ufpr.br
Prof. Me. Fernando P. Mayer - fmayer@ufpr.br
Prof. Me. Eduardo V. Ferreira - eferreira@ufpr.br
Prof. Dr. Paulo Justiniano Ribeiro Jr. - paulojus@c3sl.ufpr.br

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Laboratório de Estatística e Geoinformação
www.leg.ufpr.br

www.leg.ufpr.br

Conteúdo

1
Estimação intervalar

Estimador intervalar

Um **estimador intervalar** (ou **intervalo de confiança**) é uma fórmula/procedimento para se calcular um intervalo como estimativa de um parâmetro de uma população.

Coeficiente de confiança

O **coeficiente de confiança** (ou **nível de confiança**, nível de cobertura ou taxa de cobertura) representa a probabilidade de um intervalo de confiança, obtido por meio de uma a.a., conter o parâmetro populacional.

1. Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$.
2. Sabe-se que $\bar{X} \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
3. Assim,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \text{Normal}(\mu = 0, \sigma = 1).$$

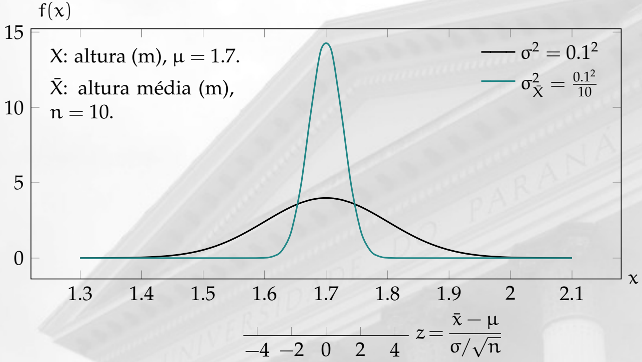


Figura 1. Distruição de probabilidade de X, da média amostral $\bar{X}$ e a representação na escala padronizada Z.

4. Com isso, um intervalo de confiança $1-\alpha$ para μ é formalmente

$$\begin{aligned} IC(\mu) &: l \leqslant \mu \leqslant u \\ &: \mu \in [l, u] \quad \text{de forma que} \end{aligned}$$

$$Pr(l \leqslant \mu \leqslant u) = 1 - \alpha.$$

5. Pode-se escrever então

$$Pr(L \leqslant \mu \leqslant U) = 1 - \alpha.$$

6. Quando uma a.a. for obtida, l e u serão os limites inferior e superior do intervalo de confiança para μ que terá $1-\alpha$ de probabilidade de contê-lo.

O intervalo (l,u) tem $1-\alpha$ de probabilidade de conter μ.

7. Existem infinitos pares (l, u) que contém $1 - \alpha$, no entanto, faz-se escolha pelo par que seja simétrico na divisão das probabilidades.

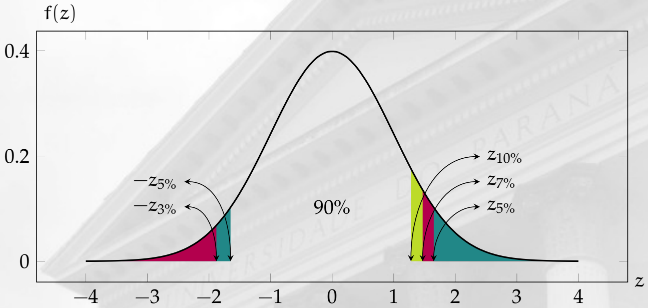


Figura 2. Função densidade da distribuição Normal Padrão. Regiões coloridas representam probabilidades divididas de forma diferente nas caudas para se obter um intervalo de confiança de 95%.

8. Visto que $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$, têm-se que

$$\Pr\left(-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\alpha/2}\right).$$

9. Operações para deixar μ isolado produzem

$$\Pr\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Intervalo de confiança para μ, σ conhecido

O intervalo de confiança bilateral de cobertura $1-\alpha$ para μ de uma variável aleatória X de variância σ^2 conhecida, é

$$
\begin{aligned}
IC(\mu)_{1-\alpha} &: \{\mu : l \leqslant \mu \leqslant u\} \\
&: \mu \in [l, u] \\
&: [l, u].
\end{aligned}
$$

em que $l = \bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $u = \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e $z_{\alpha/2}$ é o quantil superior da distribuição Normal padrão, cuja massa à direita é de $\alpha/2$.

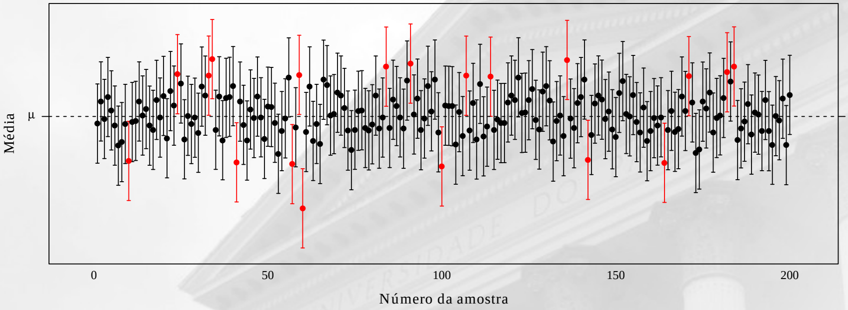


Figura 3. Intervalos alos de confiança de 90% obtidos em 200 amostras aleatórias. Intervalos em destaque não contém a média μ.

1. Define-se como erro o valor $E = |\bar{x} - \mu| = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
2. Dessa definição, o comprimento do IC vale $u - l = 2E$.
3. Ao se fixar um nível de confiança, $1 - \alpha$ e tamanho máximo para o erro, conhecendo-se σ, pode-se determinar o número mínino para n, pois se

$$E \leqslant z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{então}$$
$$n \geqslant \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2.$$

1. São limites unilaterais $[l, \infty]$ e $[-\infty, u]$.
2. A probabilidade complementar a $1 - \alpha$ fica concentrada.
3. O IC é calculado por

$$\text{IC}(\mu)_{1-\alpha} : \begin{cases} \{\mu : \mu \leqslant u = \bar{x} + z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}, & \text{se unilateral à direira.} \\ \{\mu : \mu \geqslant l = \bar{x} - z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}, & \text{se unilateral à esquerda.} \end{cases}$$

1. Essa a situação é real.
2. Como σ^2 é desconhecido, considera a variância amostral, S^2, estimada com a própria amostra.

$\sim$ t de Student

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,1)$$

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1},$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

3. No entanto, a v.a. não tem distribuição Normal padrão e sim t de Student.

4. A função densidade da distribuição de probabilidades t é

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}} \cdot \left(\frac{t^2}{\nu} + 1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty,$$

   em que $\nu > 0$ é o parâmetro chamado de graus de liberdade.

5. Deve-se então considerar essa distribuição para se obter o intervalo de confiança.

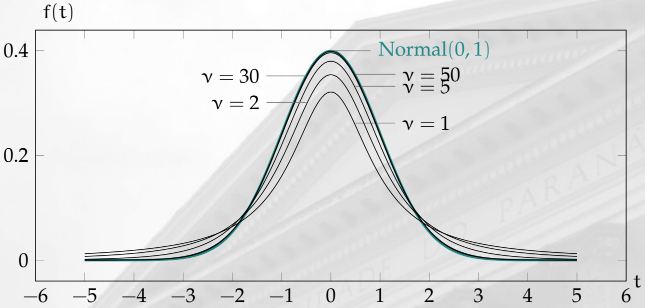


Figura 4. Função densidade da distribuição t de Student. Números indicam o valor do parâmetro grau de liberdade ν que a medida que aumenta aproxima a distribuição t de Student da distribuição normal padrão.

Intervalo de confiança para μ, σ desconhecido

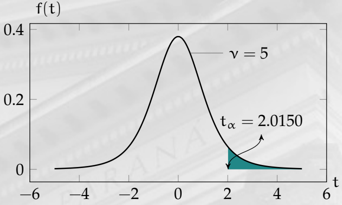
O intervalo de confiança bilateral de cobertura $1-\alpha$ para μ de uma variável aleatória X de variância σ^2 desconhecida, é

$$\begin{aligned} IC(\mu)_{1-\alpha} &: \{\mu : l \leqslant \mu \leqslant u\} \\ &: \mu \in [l, u] \\ &: [l, u]. \end{aligned}$$

em que $l = \bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$, $u = \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ e $t_{\alpha/2}$ é o quantil superior da distribuição t de Student, cuja massa à direita é de $\alpha/2$.

Tabela 1. Tabela com os valores de quantis unilaterais para distribuição t de Student com ν graus de liberdade.

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
$\nu = 1$	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778



2

Testes de hipótese baseados em uma amostra

1. O sistema de escapamento de uma aeronaves funcionam devido a um propelente sólido. A taxa de queima do propelente é uma característica importante do produto. As especificações requerem que a taxa média de queima seja de 50 cm/s. Sabe-se que o desvio-padrão da taxa de queima é de $\sigma = 2$. Uma amostra aleatória é obtida. Qual o parâmetro de interesse? Que hipótese se deseja testar?

2. A crescente disponibilidade de materiais leves e resistêntes têm revolucionado a fabrição de tacos de golf. Tacos de cabeças ocas e faces finas podem proporcinar tacadas longas devido ao efeito mola que a face fina impõe a bola. Bater na bola e medir a razão entre as velocidades de saída e chegada permite quantificar essa propriedade. Um novo material está sendo aplicado na fabricação. O atualmente usado tem taxa média de restiuição de 0.82. Qual o parâmetro de interesse? Que hipótese deseja-se testar?

3. Usa-se uma máquina automática para encher garrafas de detergente líquido. Um excesso de variabilidade implica em uma proporção considerável de embalagens com volume fora das especificações. A variância no volume de enchimento não deve exceder 0.01 (onça fluída)^2. Qual o parâmetro de interesse? Que hipótese deseja-se testar?

4. Um fabricante de semicondutores produz controladores usados em aplicações automotivas. O consumidor requer que a fração defeituosa em uma etapa do processo de fabricação não supere 0.05. Uma amostra de 200 itens é inspecionada e 4 são defeituosos. Qual o parâmetro de interesse? Que hipótese deseja-se testar?

Hipótese estatística

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações.

- a média de altura de alunos vestibulandos homens é de $\mu = 1.83$;
- a proporção de pegamento de mudas de roseira em solo arenoso é de $p = 0.95$;
- a variância do tempo de espera para ser atendido por ligação telefônica é de $\sigma^2 = 9 \text{ min}^2$

Hipótese nula, H_0

As afirmações de igualdade são chamadas de hipótese nula. Ex: H_0: $\mu = 1.83$; H_0: $p = 0.95$; H_0: $\sigma^2 = 9$.

Hipótese alternativa, H_a ou H_1

Um subconjunto do conjunto complementar àquele da hipótese nula é chamado de hipótese alternativa. A hipótese alternativa pode ser:

- Bilateral: H_a: $\mu \neq 1.83$.
- Unilateral à direita: H_a: $\mu > 1.83$.
- Unilateral à esquerda: H_a: $\mu < 1.83$.

Note que $\{\mu = 1.83\} \cap \{\mu \neq 1.83\} = \varnothing$ e o mesmo vale para as demais hipóteses alternativas.

Erro tipo I

A rejeição da hipótese nula quando ela for verdadeira é definida como como erro tipo I.

Erro tipo II

A não rejeição da hipótese nula quando ela for falsa é definida como como erro tipo II.

Em estatística evita-se dizer "aceitar H_0" para se usar "não rejeitar H_0". Além disso, rejeitar H_0 não implica que se aceita H_a.

Tabela 2. Erros de decisão em testes de hipótese.

Decisão	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não rejeitar H_0	nenhum erro	erro tipo II
Rejeitar H_0	erro tipo I	nenhum erro

Probabilidade de erro tipo I

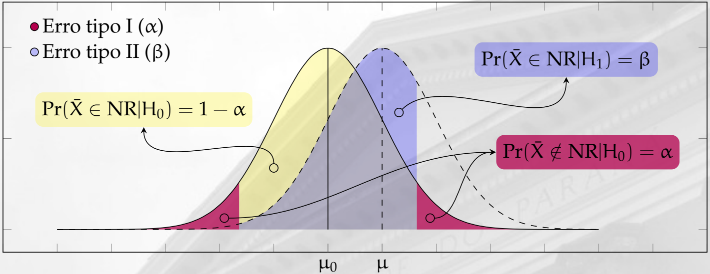
$\alpha = \Pr(\text{erro tipo I}) = \Pr(\text{rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ for verdeira}).$

Probabilidade de erro tipo II

$\beta = \Pr(\text{erro tipo II}) = \Pr(\text{não rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ for falsa}).$

Poder do teste

É a probabilidade de rejeitar corretamente uma hipótese nula quando esta é falsa. Por isso, a potência é $1 - \beta$.



NR: região de não rejeição de H_0.
α: nível de significância.

Figura 5. Tipos de erros de decição em testes de hipótese para a média μ

.

Valor P

- O valor P é o menor nível de significância a ser estabelecido para que seja feita a rejeição da hipótese nula com os dados fornecidos.
- Também pode ser entendido como a probabilidade de obter uma estatística de teste igual ou mais extrema para rejeição de H_0 que a atualmente observada dado que a hipótese nula é verdadeira.

1. A partir do contexto do problema, identique o parâmetro de interesse;
2. Estabeleça a hipótese nula H_0;
3. Especifique uma hipótese alternativa apropriada, H_a;
4. Defina um nível de significância, α;
5. Determine uma estatística apropriada de teste;
6. Estabeleça a região de rejeição para a estatística do teste;
7. Calcule quaisquer grandezas amostrais necessárias, substitua/aplique na equação/procedimento para se chegar à estatística de teste.
8. Decida se H_0 deve ou não ser rejeitada e interprete isso no contexto do problema.

As etapas de 1–4 devem ser feitas antes da coleta/inspeção dos dados.

	H_0	Estat. de teste	Distribuição sob H_0	Região de rejeição
1	$\mu = \mu_0$	$Z_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z_0 \sim \text{Normal}(0, 1)$	$z_{\alpha/2}$ ou z_α tabela normal.
2	$\mu = \mu_0$	$T_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$T_0 \sim$ t de Student$(\nu = n - 1)$	$t_{\alpha/2}$ ou t_α tabela t.
3	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$X_0 = \dfrac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2}$	$X_0 \sim$ chi quadrado$(\nu = n - 1)$	$\chi_{\alpha/2}$ ou χ_α tabela χ^2.
4	$p = p_0$	$Z_0 = \dfrac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$	$Z_0 \sim \text{Normal}(0, 1)$	$z_{\alpha/2}$ ou z_α tabela normal.

Situação problema 1.

1. O parâmetro de interesse é μ, a taxa média de queima;
2. H_0: $\mu = 50$ cm/s;
3. H_a: $\mu \neq 50$ cm/s;
4. $\alpha = 0.05$;
5. A estatística de teste é
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}};$$
6. Rejeitar H_0 se $z_0 \in (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty)$ ou $|z_0| > 1.96$;
7. Cálculos: da amostra de $n = 25$ elementos tem-se que $\bar{x} = 51.3$ e que $\sigma = 2$,
$$z_0 = \frac{51.3 - 50}{2/\sqrt{25}} = 3.25.$$
8. Conclusão: uma vez que $z_0 = 3.25 > 1.96$, rejeita-se $H_0 : \mu = 50$ com nível de significância $\alpha = 0.05$. Concluí-se que a taxa média de queima difere de 50 cm/s baseado em uma a.a. de 25 medidas.

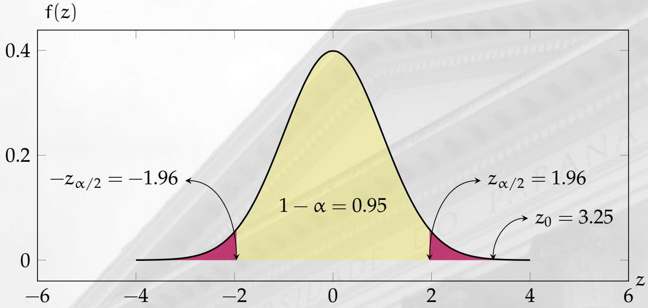


Figura 6. Região de rejeição da hipótese nula e valor observado da estatística de teste para hipótese sobre a média.

Situação problema 2.

1. O parâmetro de interesse é μ, a taxa média de restituição;
2. H_0: $\mu = 0.82$;
3. H_a: $\mu > 0.82$;
4. $\alpha = 0.05$;
5. A estatística de teste é
$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}};$$
6. Rejeitar H_0 se $t_0 > 1.761$;
7. Cálculos: da amostra de $n = 15$ elementos tem-se que $\bar{x} = 0.83725$ e que $s = 0.02456$,
$$t_0 = \frac{0.83725 - 0.82}{0.02456/\sqrt{15}} = 2.72.$$
8. Conclusão: uma vez que $t_0 = 2.72 > 1.761$, rejeita-se $H_0 : \mu = 0.82$ com nível de significância $\alpha = 0.05$. Concluí-se que o coeficiente médio de restituição excede 0.82.

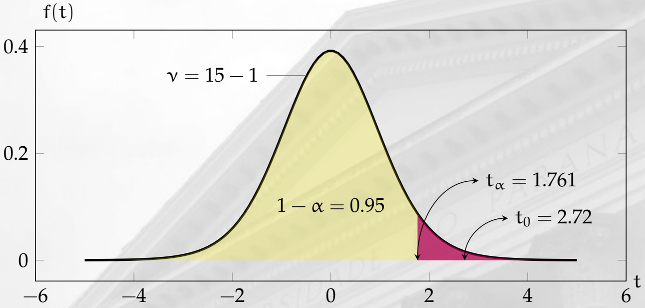


Figura 7. Região de rejeição da hipótese nula e valor observado da estatística de teste para hipótese sobre a média.

Situação problema 3.

1. O parâmetro de interesse é a variância de enchimento σ^2;
2. H_0: $\sigma^2 = 0.01$ (onça fluída)^2;
3. H_a: $\sigma^2 > 0.01$ (onça fluída)^2;
4. $\alpha = 0.05$;
5. A estatística de teste é
$$X_0^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2};$$
6. Rejeitar H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{\alpha,\nu=19} = 30.14$;
7. Cálculos: da amostra de $n = 20$ elementos tem-se que $S^2 = 0.0153$,
$$X_0^2 = \frac{(20-1) \cdot 0.0153}{0.01} = 29.07.$$
8. Conclusão: uma vez que $X_0^2 < \chi^2_{\alpha,\nu=19} = 30.14$, não rejeita-se $H_0 : \sigma^2 = 0.01$ com nível de significância $\alpha = 0.05$. Concluí-se que não há evidência de que a variância de enchimento de embalagens seja superior a 0.01 (onça fluída)^2.

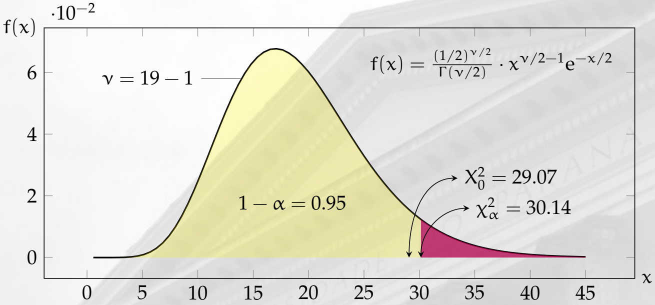


Figura 8. Região de rejeição da hipótese nula e valor observado da estatística de teste para hipótese sobre a variância.

Situação problema 4.

1. O parâmetro de interesse é a fração de itens defeituosos p;
2. H_0: $p = 0.05$;
3. H_a: $p > 0.05$;
4. $\alpha = 0.05$;
5. A estatística de teste é
$$z_0 = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}};$$
6. Rejeitar H_0 se $z_0 > z_\alpha = 1.645$;
7. Cálculos: da amostra de $n = 200$ itens avaliados $x = 4$ itens defeituosos,
$$z_0 = \frac{4 - 200 \cdot 0.05}{\sqrt{200 \cdot 0.05(1 - 0.05)}} = -1.95.$$
8. Conclusão: uma vez que $z_0 < z_\alpha = 1.645$, não rejeita-se $H_0 : p = 0.05$ com nível de significância $\alpha = 0.05$. Concluí-se que não há evidência de que a fração de itens defeituosos seja superior a 0.05.

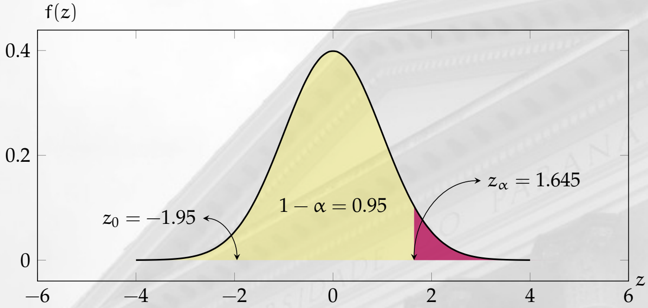


Figura 9. Região de rejeição da hipótese nula e valor observado da estatística de teste para hipótese sobre a proporção.

Situação 1: Ao cruzar ervilhas amarelas lisas com verdes rugosas, obteve-se na descendência (F1) ervilhas amarelas lisas. Estas, por autofecundação, produziram uma descendência (F2) com $2 \times 2 = 4$ tipos de ervilhas. Por teoria mendeliana, sob dominância e segregação independente, as proporções esperadas em F2 são: $9/16$, $3/16$, $3/16$ e $1/16$.

Fenótipo (genótipo)	Freq. observada (O)	Freq. esperada (E)
Amarelas lisas (A_B_)	315	$556 \times 9/16 = 312.75$
Amarelas rugosas (A_bb)	101	$556 \times 3/16 = 104.25$
Verdes lisas (aaB_)	108	$556 \times 3/16 = 104.25$
Verdes rugosas (aabb)	32	$556 \times 1/16 = 34.75$
Total	556	

Situação 2: O número de árvores por quadrante da espécie *Guapira opposita* (X) foi obtida para verificar-se o padrão de distribuição espacial. Um total de 94 quadrantes foi avaliado e o número de árvores presentes foi registrado.

x	O	Pr(.)	E
0	6	0.057	5.317
1	18	0.162	15.273
2	23	0.233	21.935
3	19	0.223	21.001
4	11	0.160	15.081
5	6	0.092	8.663
6	5	0.044	4.147
7	4	0.018	1.702
8	1	0.007	0.611
$\geqslant 9$	1	0.003	0.270
$\geqslant 7$	6	0.027	2.583

H_0: a espécie se distribui aleatoriamente nessa região $\Rightarrow$ chance de uma árvore ocorrer é constante e independente de qualquer outra árvore $\Rightarrow$ corresponde $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

- O: frequência observada;
- Pr(.): probabilidades obtidas considerando a distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = \sum O_i \cdot \Pr(O_i) / \sum (O_i) = 270/94 = 2.8723404$.
- E: frequência esperada, $n \cdot \Pr(.) = 94 \cdot \Pr(.)$;

Teoria mendeliana.

1. O interesse está no modelo de distribuição de probabilidades (e não em parâmetros);
2. H_0: A distribuição de X é dada pela teoria mendeliana;
3. H_a: A distribuição de X não é dada pela teoria mendeliana;
4. $\alpha = 0.05$;
5. A estatística de teste é
$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i};$$
6. Rejeitar H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{\nu=4-1;\alpha}$, $\nu = 4 - 1 = 3$;
7. Cálculos:
$$X_0^2 = \frac{(315 - 312.75)^2}{312.75} + \cdots + \frac{(32 - 34.75)^2}{34.75} = 0.47.$$
8. Conclusão: uma vez que $X_0^2 < \chi^2_\alpha = 7.82$, não rejeita-se H_0 : de que a distribuição fenotípica corresponde à teoria mendeliana.

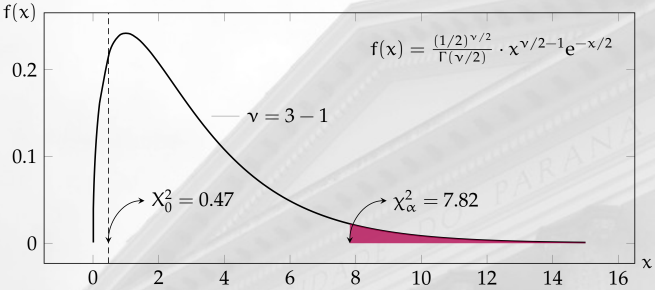


Figura 10. Região de rejeição da hipótese nula e valor observado da estatística de teste para hipótese sobre a aderência a teoria mendeliana.

Distribuição de Poisson.

1. O interesse está no modelo de distribuição espacial (e não em parâmetros);
2. H_0: A distribuição de X é Poisson;
3. H_a: A distribuição de X não é Poisson;
4. $\alpha = 0.05$;
5. A estatística de teste é
$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i};$$
6. Rejeitar H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{\nu;\alpha}$, $\nu = 8 - 1 - 1 = 6$;
7. Cálculos:
$$\lambda = \sum O_i \cdot \Pr(O_i) / \sum (O_i) = 270/94 = 2.8723404,$$
$$X_0^2 = \frac{(6 - 5.3172399)^2}{5.3172399} + \frac{(18 - 15.2729232)^2}{15.2729232} + \cdots + \frac{(6 - 2.5829246)^2}{2.5829246} = 7.4358877.$$
8. Conclusão: uma vez que $X_0^2 < \chi^2_\alpha = 12.5915872$, não rejeita-se H_0 : de que a distribuição das árvores é Poisson.

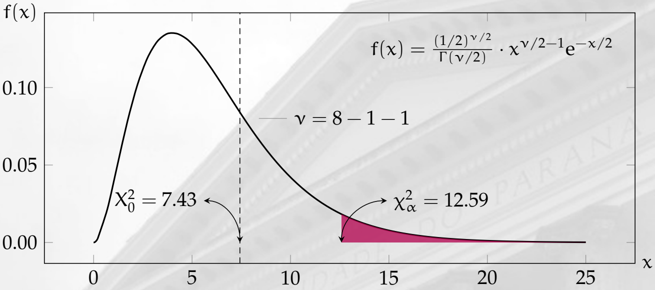


Figura 11. Região de rejeição da hipótese nula e valor observado da estatística de teste para hipótese sobre distribuição espacial de árvores.

3 Testes de hipótese baseados em duas amostras

1. Teste para a diferença de médias de duas populações normais com variância conhecida;
2. Teste para a diferença de médias de duas populações normais com variância desconhecida mas comum ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$).
3. Teste para razão de variâncias de duas populações normais.
4. Teste para diferença de duas proporções.

	H_0	Estat. de teste	Distribuição sob H_0	Região de rejeição
1	$\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$	$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_1 - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z_0 \sim \text{Normal}(0, 1)$	$z_{\alpha/2}$ ou z_α tabela normal.
2	$\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$	$T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_1 - \delta_0}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	$T_0 \sim \text{t de Student}(\nu = (n_1 - 1) + (n_2 - 1))$	$t_{\alpha/2}$ ou t_α tabela t.
3	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_0 \sim \text{F de Snedecor}(\nu_1 = n_1 - 1, \nu_2 = n_2 - 1)$	$F_{\alpha/2}, F_{1-\alpha/2}$ tabela F.
4	$p1 = p2$	$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\hat{P}(1 - \hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$	$Z_0 \sim \text{Normal}(0, 1)$	$z_{\alpha/2}$ ou z_α tabela normal.

Tempo médio de secagem de dois zarcões.

1. O parâmetro de interesse é a diferença nos tempos médios de secagem;
2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0 = 0$;
3. H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 0$ (o zarcão 1 demora mais);
4. $\alpha = 0.05$;
5. A estatística de teste é
$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$
em que $\sigma_1 = \sigma_2 = 8$ e $n_1 = n_2 = 10$;
6. Rejeitar H_0 se $z_0 > 1.645$;
7. Cálculos: $\bar{x}_1 = 121$ e $\bar{x}_2 = 112$, assim $z_0 = \dfrac{9}{3.5777088} = 2.5155765$.
8. Conclusão: uma vez que $z_0 = 2.5155765 > 1.645$, rejeita-se $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ com nível de significância $\alpha = 0.05$. Concluí-se que o novo ingrediente adicionado à tinta reduz o tempo de secagem.

Tempo médio de reação para dois catalizadores.

1. O parâmetro de interesse é a diferença nos tempos médios de reação para dois catalizadores;
2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0 = 0$;
3. H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$;
4. $\alpha = 0.05$;
5. A estatística de teste é

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_1 - \delta_0}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

   em que $n_1 = n_2 = 8$;
6. Rejeitar H_0 se $|t_0| > 2.145$;

7. Cálculos: $\bar{x}_1 = 92.225$ e $\bar{x}_2 = 92.733$, $s_1 = 2.39$ e $s_2 = 2.98$, assim

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_1 - 1)S_1^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(7)2.39^2 + (7)2.98^2}{(8-1) + (8-1)} = 7.30$$

e então

$$t_0 = \frac{92.255 - 92.733}{\sqrt{7.30\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}} = -0.35.$$

8. Conclusão: uma vez que $|t_0| < t_{\alpha/2} = 2.145$, não se rejeita $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ com nível de significância $\alpha = 0.05$. Não se tem evidência para concluir que o catalizador 2 confere em um tempo de reação diferente do catalizador 1.

4 Testes de hipótese aplicados com o R

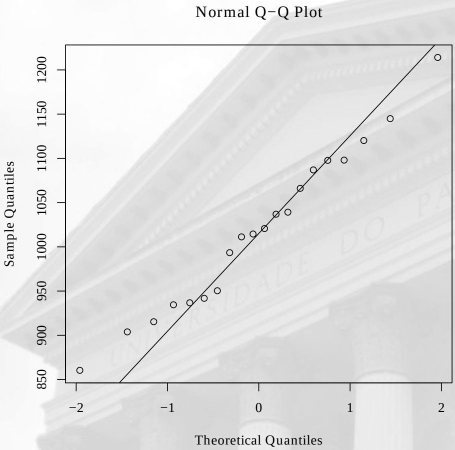
```
apropos("\\.test$")

##  [1] "ansari.test"          "bartlett.test"       "binom.test"
##  [4] "Box.test"             "chisq.test"          "cor.test"
##  [7] "fisher.test"          "fligner.test"        "friedman.test"
## [10] "kruskal.test"         "ks.test"             "mantelhaen.test"
## [13] "mauchly.test"         "mcnemar.test"        "mood.test"
## [16] "oneway.test"          "pairwise.prop.test"  "pairwise.t.test"
## [19] "pairwise.wilcox.test" "poisson.test"        "power.anova.test"
## [22] "power.prop.test"      "power.t.test"        "PP.test"
## [25] "prop.test"            "prop.trend.test"     "quade.test"
## [28] "shapiro.test"         "t.test"              "var.test"
## [31] "wilcox.test"
```

Um Engenheiro de produção quer testar, com base nos dados da Tabela a seguir, e para um nível de significância $\alpha = 0{,}05$, se a altura média de uma haste está próxima do valor nominal 1055 mm. Uma amostra de 20 hastes foi analisada e na a seguir estão as medidas obtidas.

903,88	1036,92	1098,04	1011,26
1020,7	915,38	1014,53	1097,79
934,52	1214,08	993,45	1120,19
860,41	1039,19	950,38	941,83
936,78	1086,98	1144,94	1066,12

http://www.portalaction.com.br/manual-action/1811-dados-completos

```r
x <- c(903.88, 1020.7, 934.52, 860.41, 936.78, 1036.92,
       915.38, 1214.08, 1039.19, 1086.98, 1098.04, 1014.53, 993.45,
       950.38, 1144.94, 1011.26, 1097.79, 1120.19, 941.83, 1066.12)

t.test(x, mu=1055, alternative="two.sided", conf.level=0.95)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  x
## t = -1.744, df = 19, p-value = 0.09731
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 1055
## 95 percent confidence interval:
##   976.6067 1062.1303
## sample estimates:
## mean of x
##  1019.369

## Avaliando a suposição de normalidade.
qqnorm(x); qqline(x)
```


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
850
900
950
1000
1050
1100
1150
1200
−2
−1
0
1
2
Theoretical Quantiles

Queremos testar a igualdade das médias de duas populações que tem variâncias iguais. Uma amostra de cada população foi obtida, conforme as Tabelas a seguir.

18.800	17.591	20.835	19.169	18.755
20.504	18.756	17.527	19.290	19.203
18.621	18.977	17.078	22.059	18.419
19.919	20.308	17.620	18.585	20.764
21.117	18.899	21.426	17.890	21.055

22.284	22.057	22.629	24.620	21.491	21.198
21.901	22.881	22.860	22.058	22.699	22.909
25.302	17.968	24.515	23.150	24.662	23.327
22.447	23.382	22.426	22.787	21.983	24.534
22.771	21.043	21.203	24.009	21.917	21.152

http://www.portalaction.com.br/manual-action/1821-dados-em-grupos-diferentes

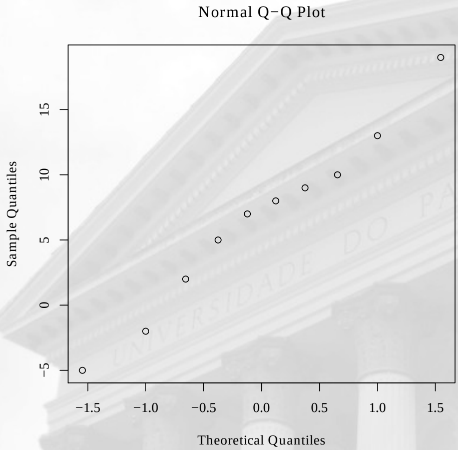
```
x1 <- c(18.8, 20.504, 18.621, 19.919, 21.117, 17.591, 18.756, 18.977,
        20.308, 18.899, 20.835, 17.527, 17.078, 17.62, 21.426, 19.169,
        19.29, 22.059, 18.585, 17.89, 18.755, 19.203, 18.419, 20.764,
        21.055)
x2 <- c(22.284, 21.901, 25.302, 22.447, 22.771, 22.057, 22.881, 17.968,
        23.382, 21.043, 22.629, 22.86, 24.515, 22.426, 21.203, 24.62,
        22.058, 23.15, 22.787, 24.009, 21.491, 22.699, 24.662, 21.983,
        21.917, 21.198, 22.909, 23.327, 24.534, 21.152)

t.test(x=x1, y=x2, var.equal=TRUE)

##
##  Two Sample t-test
##
## data:  x1 and x2
## t = -8.6217, df = 53, p-value = 1.152e-11
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -4.041599 -2.516041
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##  19.32668  22.60550

par(mfrow=c(1,2))
qqnorm(x1); qqnorm(x2)
```

Dez cobaias foram submetidas ao tratamento de engorda com certa ração. Os pesos em gramas, antes e após o teste são dados a seguir. Podemos concluir que o uso da ração contribuiu para o aumento do peso médio dos animais?

Antes	Depois	Cobaia
635	640	1
704	712	2
662	681	3
560	558	4
603	610	5
745	740	6
698	707	7
575	585	8
633	635	9
669	682	10

```
## head(da)
colMeans(da[,-3])

##  Antes Depois
##  648.4  655.0

## T pareado.
t.test(x=da$Depois, y=da$Antes, alternative="greater", paired=TRUE)

##
##  Paired t-test
##
## data:  da$Depois and da$Antes
## t = 2.9635, df = 9, p-value = 0.007935
## alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
## 95 percent confidence interval:
##  2.517464      Inf
## sample estimates:
## mean of the differences
##                     6.6
```

```r
## T para uma amostra, a da difernça entre os valores.
t.test(x=da$Depois-da$Antes, alternative="greater")

##
##  One Sample t-test
##
## data:  da$Depois - da$Antes
## t = 2.9635, df = 9, p-value = 0.007935
## alternative hypothesis: true mean is greater than 0
## 95 percent confidence interval:
##  2.517464      Inf
## sample estimates:
## mean of x
##       6.6

qqnorm(da$Depois-da$Antes)
```


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
−5
0
5
10
15
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
Theoretical Quantiles

Um fabricante garante que 90% das peças que fornece à linha de produção de uma determinada fábrica está de acordo com as especificações exigidas. A análise de uma amostra de 200 peças revelou 25 defeituosas. Podemos dizer que é verdadeira a afirmação do fabricante?

```
n <- 200
x <- 25

chisq.test(x=c(25, 200-25), p=c(0.1, 0.9))

##
##  Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  c(25, 200 - 25)
## X-squared = 1.3889, df = 1, p-value = 0.2386

binom.test(x=x, n=n, p=0.1) ## Exato.

##
##  Exact binomial test
##
## data:  x and n
## number of successes = 25, number of trials = 200, p-value = 0.2378
## alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.1
## 95 percent confidence interval:
##  0.08255234 0.17897375
## sample estimates:
## probability of success
##                  0.125
```

Uma empresa que presta serviços de assessoria econômica a outras empresas está interessada em comparar a taxa de reclamações sobre os seus serviços em dois de seus escritórios em duas cidades diferentes. Suponha que a empresa tenha selecionado aleatoriamente 100 serviços realizados pelo escritório da cidade A e foi constatado que em 12 deles houve algum tipo de reclamação. Já do escritório da cidade B foram selecionados 120 serviços e 18 receberam algum tipo de reclamação. A empresa deseja saber se estes resultados são suficientes para se concluir que os dois escritórios apresentam diferença significativa entre suas taxas de reclamações.

```r
n1 <- 100; x1 <- 12
n2 <- 120; x2 <- 18

p1 <- x1/n1
p2 <- x2/n2
p <- (x1+x2)/(n1+n2)

z <- (p1-p2)/sqrt(p*(1-p)*(1/n1+1/n2))
z

## [1] -0.6456331

qnorm(c(0.025, 0.975))

## [1] -1.959964  1.959964

2*pnorm(abs(z), lower.tail=FALSE)

## [1] 0.518517
```

```r
## browseURL("http://www.portalaction.com.br/manual-action/142-teste-de-independencia")
## da <- read.table("clipboard", header=TRUE, sep="\t", encoding="latin1")
## dput(da)
## str(da)

da <- structure(list(X = structure(c(2L, 1L, 3L), .Label = c("Atividade Não Retar-
dada "     ,
"Atividade Retardada ", "Total "), class = "factor"), Desordem.Afetiva = c(12,
18, 30), Esquizofrenia = c(13, 17, 30), Neurose = c(5, 25, 30
), Total = c(30L, 60L, 90L)), .Names = c("X", "Desordem.Afetiva",
"Esquizofrenia", "Neurose", "Total"), class = "data.frame", row.names = c(NA,
-3L))

chisq.test(da[1:2, 2:4])

##
##  Pearson's Chi-squared test
##
## data:  da[1:2, 2:4]
## X-squared = 5.7, df = 2, p-value = 0.05784
```