

# Métodos baseados no aceitação e rejeição

Amostrador independente e Metropolis Random Walk

Prof. Walmes Zeviani  
walmes@ufpr.br

Laboratório de Estatística e Geoinformação  
Departamento de Estatística  
Universidade Federal do Paraná

Atualizado em 2018-08-27

## Justificativas

- ▶ O método da aceitação e rejeição é útil, porém tem limitações.
- ▶ Métodos baseados nele foram propostos e são utilizados em vários contextos, principalmente em inferência bayesiana.

## Objetivos

- ▶ Apresentar o método do amostrador independente.
- ▶ Apresentar o método do Metropolis Random Walk.

# O amostrador independente

Objetivo: gerar números de uma v.a.  $X$  a partir de valores de uma v.a. candidada  $Y$ .

1. Escolher uma v.a.  $Y$  para gerar valores candidatos para a v.a. alvo  $X$ . O suporte de  $Y$  deve conter o de  $X$ . Tem-se que ter um GNA para  $Y$ . A função de densidade de ambas,  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$  deve ser computável para todo  $x$ .
2. Fornecer um valor inicial  $x_0 = y_0$ .
3. Criar a variável contadora  $i = 1$ .

## O amostrador independente

4. Gerar um valor  $y_i$  com o GNA da v.a.  $Y$ .
5. Gerar um número uniforme  $u$  vindo da  $U(0, 1)$ .
6. Calcular a probabilidade de aceitação

$$r = \frac{\frac{f_X(y_i)}{f_X(x_{i-1})}}{\frac{f_Y(y_i)}{f_Y(x_{i-1})}} = \frac{f_X(y_i)}{f_X(x_{i-1})} \frac{f_Y(x_{i-1})}{f_Y(y_i)} = \frac{f_X(y_i)}{f_Y(y_i)} \frac{f_Y(x_{i-1})}{f_X(x_{i-1})}. \quad (1)$$

7. Se  $u < r$ , fazer  $x_i = y_i$ , caso contrário, fazer  $x_i = x_{i-1}$ .
8. Incrementar  $i$  em uma unidade.
9. Repetir de 4–8 até atingir o número desejado de valores de  $X$ .

Código exemplo: <http://leg.ufpr.br/~walmes/ensino/ce089-2014-02/ce089-2014-02-aula06.html>.

# Aspectos importantes

- ▶ A cadeia de números aleatórios irá apresentar valores repetidos.
- ▶ Um número grande  $n$  de valores de  $X$  deve ser gerado para que a distribuição seja apropriadamente representada (convergência da cadeia).
- ▶ Pode-se, ao final, reamostrar um número  $m < n$  de valores para ter uma amostra independente.
- ▶ Tal amostragem pode ser sistemática, pegando um elemento a cada  $k$  consecutivos (raleamento).

# O Metropolis Random Walk

Objetivo: gerar números de uma v.a.  $X$  a partir de valores de uma v.a. candidada  $Y$ .

1. Escolher uma v.a.  $Y$  para gerar valores candidatos para a v.a. alvo  $X$ . O suporte de  $Y$  deve ser da mesma natureza que  $X$ . Tem-se que ter um GNA para  $Y$ . A função de densidade de ambas,  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$  deve ser computável para todo  $x$ .
2. A v.a.  $Y$  deve ter uma **função de densidade simétrica**.
3. Fornecer um valor inicial  $x_0 = y_0$ .
4. Criar a variável contadora  $i = 1$ .

# O Metropolis Random Walk

5. Gerar um valor  $y_i$  com o GNA da v.a. condicional  $Y$ , ou seja,  $f_Y(y|x_{i-1})$ .
6. Gerar um número uniforme  $u$  vindo da  $U(0, 1)$ .
7. Calcular a probabilidade de aceitação

$$r = \frac{f_X(y_i)}{f_X(x_{i-1})}. \quad (2)$$

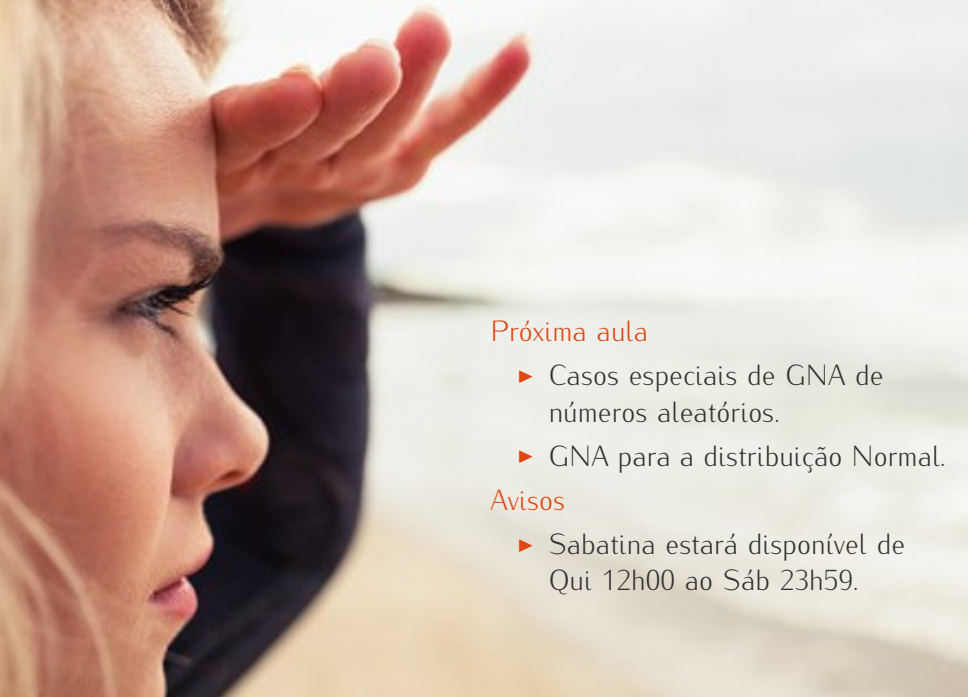
8. Se  $u < r$ , fazer  $x_i = y_i$ , caso contrário, fazer  $x_i = x_{i-1}$ .
9. Incrementar  $i$  em uma unidade.
10. Repetir de 4–9 até atingir o número desejado de valores de  $X$ .

Código exemplo: <http://leg.ufpr.br/~walmes/ensino/ce089-2014-02/ce089-2014-02-aula06.html>.

# Aspectos importantes

- ▶ Valem as mesmas considerações do amostrador independente.
- ▶ Se a função de densidade da v.a. candidata não for simétrica, uma modificação do cálculo da probabilidade de aceitação deve ser feito.
- ▶ Isso leva ao algoritmo de Metropolis–Hastings (mais geral).





### Próxima aula

- ▶ Casos especiais de GNA de números aleatórios.
- ▶ GNA para a distribuição Normal.

### Avisos

- ▶ Sabatina estará disponível de Qui 12h00 ao Sáb 23h59.