

# GNA pelo método da aceitação e rejeição

Importância, algoritmo e implementação

Prof. Walmes Zeviani  
walmes@ufpr.br

Laboratório de Estatística e Geoinformação  
Departamento de Estatística  
Universidade Federal do Paraná

Atualizado em 2018-08-22

## Justificativas

- ▶ A GNA pelo MTIP nem sempre é possível por causa da não existência de  $F_X^{-1}(\cdot)$ .
- ▶ O método da aceitação-rejeição é aplicável quando se possui a função de densidade de probabilidade ou de probabilidade.

## Objetivos

- ▶ Apresentar o método da aceitação-rejeição.
- ▶ Descrever e implementar o algoritmo.

# O algoritmo

Objetivo: obter uma amostra aleatória da variável aleatória  $X$  que tem distribuição representada pela função de densidade  $f_X(x)$ .

1. Encontrar uma v.a.  $Y$  candidata, com função de densidade  $f_Y(y)$ , da qual se possui GNA e cujo suporte contenha o suporte de  $X$ .
2. Encontrar o valor  $M$  tal que  $f_X(x) \leq Mf_Y(x)$  para todo valor de  $x$  no suporte de  $X$ .
3. Gerar uma realização de  $y$  da distribuição candidata cuja função de densidade é  $f_Y(y)$ .
4. Gerar uma realização de  $u$  da distribuição  $U(0, 1)$ .
5. Se  $u \leq f_X(y)/(Mf_Y(y))$ , fazer com que  $x = y$ , caso contrário, repetir de 3–5.
6. Repetir 3–5 o número necessário de vezes para ter uma amostra de  $X$  de tamanho  $n$ .

# Exemplo: Gerar números da triangular usando a uniforme

- ▶ Considere que  $X$  tenha distribuição triangular com função de densidade

$$f_X(x, a, b, c) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a < x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c < x < b \\ 0 & \text{casos contrários.} \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ Gerar números de  $X \sim f_X(x, a = -b, b = 1, c = 0)$  usando como v.a. candidata  $Y \sim U(t, v)$  cuja densidade é

$$f_Y(y) = \frac{1}{v-t} \cdot I(t < y < v) \quad (2)$$

- ▶ Para que o suporte de  $Y$  contenha o suporte de  $X$ ,  $t = -b$  e  $v = b$ .
- ▶ Para que  $f_X(x) \leq Mf_Y(x)$  para todo  $x$ , o valor de  $M = 2$ .

# Implementação em R

```
# Densidade da X, distribuição alvo.
```

```
f_X <- function(x, r) {  
  b <- r; a <- -r; c <- 0  
  f <- 0 + 2 * (x - a)/((b - a) * (c - a)) * (x <= c) * (x > a) +  
    2 * (b - x)/((b - a) * (b - c)) * (x > c) * (x < b)  
  return(f)  
}
```

```
# Densidade da Y, distribuição candidata.
```

```
f_Y <- function(y, r) {  
  f <- 1/(2 * r) * (y > -r) * (y < r)  
  return(f)  
}
```

```
# Gráficos.
```

```
curve(f_X(x, r = 1), from = -1, to = 1)  
curve(f_Y(y, r = 1), xname = "y", add = TRUE, col = 2, lty = 2)  
curve(2 * f_Y(y, r = 1), xname = "y", add = TRUE, col = 2)
```

# Implementação em R

```
M <- 2
n <- 10000
x <- numeric(n)
i <- 1
k <- 1
while (i <= n) {
  y <- runif(1, min = -1, max = 1)
  u <- runif(1)
  ratio <- f_X(y, r = 1)/(M * f_Y(y, r = 1))
  if (u < ratio) {
    x[i] <- y
    i <- i + 1
  }
  k <- k + 1
}

n/k          # Proporção de aceitação.
plot(ecdf(x)) # Acumulada empírica.
plot(density(x, from = -1, to = 1))          # Dens. empírica.
curve(f_X(x, r = 1), add = TRUE, col = 2) # Dens. teórica.
```

# Complementos

- ▶ Exercício: Gerar de  $X \sim$  Triangular usando  $Y \sim$  Beta.
- ▶ Exercício: Gerar de  $X \sim$  Cauchy usando  $Y \sim$  Normal.
- ▶ Veja a animação que ilustra o método: <http://leg.ufpr.br/~walmes/ensino/EC2/tutoriais/06-met-ac-rej.html>.

# Questões

- ▶ O que considerar ao escolher uma v.a. candidata?
- ▶ Como melhorar a taxa de aceitação do método?
- ▶ Como fazer para v.a. discretas?





## Próxima aula

- ▶ Métodos derivados da aceitação e rejeição.
- ▶ Alternativas para GNA baseado em relações entre v.a.

## Avisos

- ▶ Sabatina 04 com o conteúdo desta semana.