Testes de hipótese para médias, proporções e variâncias

Prof. Paulo Justiniano Ribeiro Junior

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Testes para comparar médias de duas populações

Testes para comparar duas médias

Exemplo: comparação de IRA entre alunos e alunas de uma universidade

Diferentes possibilidades de testes:

- **Testes de hipótese para a diferença de médias de duas populações:** σ^2**'s conhecidos**.
- **Testes de hipótese para a diferença de médias de duas populações:** σ^2**'s desconhecidos**.
  - **Testes de hipótese para amostras emparelhadas**.
  - **Testes de hipótese para amostras independentes**.
    - **Variâncias iguais** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
    - **Variâncias diferentes** $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Testes de hipótese para duas populações

Ao testar uma hipótese para duas populações, devem ser consideradas

- **Amostras independentes**: quando os valores amostrados de uma população **não estão relacionados** ou emparelhados com os da outra população.
  - Exemplo: teste para pressão sanguínea do grupo controle vs grupo medicado.
- **Amostras dependentes ou emparelhadas**: quando cada elemento de uma amostra corresponde ao mesmo elemento da outra amostra (geralmente o mesmo indivíduo analisado antes e depois de um experimento).
  - Exemplo: teste para a diferença de peso **de uma mesma pessoa** antes e depois de uma dieta.

Testes de hipótese para médias de duas populações

Até agora testamos hipóteses para uma único parâmetro populacional

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_a : \mu \neq \mu_0 \quad \text{ou} \quad H_a : \mu < \mu_0 \quad \text{ou} \quad H_a : \mu > \mu_0.$$

Podemos estender o teste de hipótese quando queremos comparar o mesmo parâmetro para **duas populações diferentes**.

Em geral, faremos testes para verificar se a diferença entre estes dois parâmetros é igual a zero

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{vs} \qquad \begin{array}{lcl} H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & \Rightarrow & H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{ou} \\ H_a : \mu_1 - \mu_2 < 0 & \Rightarrow & H_a : \mu_1 < \mu_2 \quad \text{ou} \\ H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0 & \Rightarrow & H_a : \mu_1 > \mu_2. \end{array}$$

Testes de hipótese para a diferença de médias de duas populações: σ^2 conhecido

Distribuição amostral da diferença

Considere duas populações Y_1 e Y_2 com médias μ_1 e μ_2, e desvios-padrão σ_1 e σ_2, ou seja

$$Y_1 \sim \text{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad \text{e} \qquad Y_2 \sim \text{N}(\mu_2, \sigma_2^2).$$

A "**nova**" variável $\overline{Y}_d = (\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2)$ também possui distribuição normal com

$$\begin{aligned} \text{E}(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) &= \mu_1 - \mu_2 \\ \text{V}(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) &= \text{V}(\overline{Y}_1) + \text{V}(\overline{Y}_2) \\ &= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}, \end{aligned}$$

ou seja, a **distribuição amostral da diferença de médias é**

$$\overline{Y}_d = (\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) \sim \text{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Condições para o teste

Quando temos os seguintes requisitos:

- Ambas amostras são AAS.
- Ambas amostras são independentes.
- Ambas populações tem distribuição normal ou $n_1 > 30$ e $n_2 > 30$.

Podemos usar o Teorema do Limite Central para afirmar que a diferença entre as duas médias segue uma distribuição normal, e a **estatística de teste** é dada por

$$z = \frac{(\overline{y}_1 - \overline{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

Etapas do teste

Procedimentos gerais

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste
$$z = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α.
6. Conclusão do teste.

Exercício: tempos de entrega

Uma transportadora de mercadorias tem duas possibilidades de trajeto para realizar entregas. O gerente de logística *desconfia não haver diferença significativa* entre o tempo de cada trajeto.

Foram selecionadas aleatoriamente 45 entregas realizadas no **primeiro** trajeto, resultando em uma média amostral de 57 minutos. No **segundo** trajeto, foram selecionadas aleatoriamente 30 entregas, e o tempo médio foi de 54 minutos.

O desvio-padrão populacional do primeiro trajeto é de $\sigma_1 = 8$ minutos, e o do segundo trajeto é de $\sigma_2 = 6$ minutos. Teste a hipótese de que não existe diferença significativa entre o tempo médio dos dois trajetos, ao nível de 1% de significância.

Figura 1. Foto de Norma Mortenson no Pexels.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ (teste bilateral).
2. Estatística de teste

$$z = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{57 - 54}{\sqrt{\frac{8^2}{45} + \frac{6^2}{30}}} = 1.853.$$

3. Nível de significância
$\alpha = 0.01 \rightarrow RC = \{z < -2.576 \text{ ou } z > 2.576\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $z \notin RC$, portanto **não rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= 2 \times P(Z > 1.853) = 0.064$: não existem evidências para rejeitar a hipótese de que os tempos dos trajetos sejam iguais.

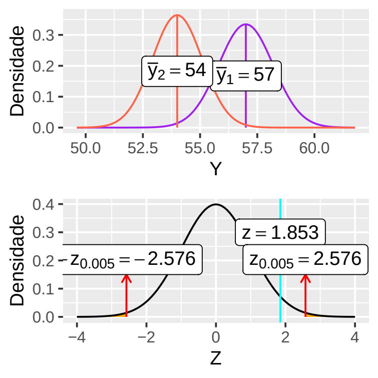

Figura 2. Distribuição amostral das médias e região de rejeição da hipótese nula.

Testes de hipótese para a diferença de médias de duas populações: σ^2 desconhecido

Suposições sobre as variâncias

- Quando não conhecemos σ^2, usamos a **estimativa** amostral s^2.
- Nesse caso, já vimos que usamos a **distribuição** t **no lugar da distribuição** z.
- No entanto, quando temos duas amostras, devem ser considerados dois casos distintos:
  - **Variâncias iguais:** quando é razoável supor que as variâncias populacionais são iguais, ou seja $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
  - **Variâncias diferentes:** quando não se pode fazer nenhuma suposição sobre a igualdade das variâncias populacionais, ou seja $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Estatística do teste para o caso de variâncias iguais $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Neste caso, calculamos a **média ponderada das variâncias amostrais** s_1^2 e s_2^2 para obter uma estimativa da variância populacional comum

$$\hat{s}^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

A estatística de teste fica

$$t = \frac{(\overline{y}_1 - \overline{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{s}^2}{n_1} + \dfrac{\hat{s}^2}{n_2}}} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{s}^2}{n_1} + \dfrac{\hat{s}^2}{n_2}}} \sim t_\nu,$$

em que

$$\nu = n_1 + n_2 - 2$$

são os graus de liberdade.

Etapas do teste

Procedimentos gerais

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste

$$t = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{n_1} + \frac{\hat{s}^2}{n_2}}} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\hat{s}^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

   em que $\hat{s}^2$ é a variância combinada das amostras.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α (**Obs:** use $\nu = n_1 + n_2 - 2$).
6. Conclusão do teste.

Exercício: rendimento das turmas

- Em uma avaliação de estatística, foi selecionada uma amostra de 12 alunos da turma A, resultando em uma média de 7.9 com desvio-padrão 0.6.
- Na turma B, foram selecionados 15 alunos, os quais tiraram nota média 6.7 com desvio-padrão 0.8.
- As notas possuem distribuição normal e assume-se que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
- Teste a hipótese de que a turma A tem média maior do que a turma B, com um nível de significância de 1%.

Figura 3. Foto de Kaboompics.com do Pexels.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu_1 > \mu_2 = \mu_1 - \mu_2 > 0$ (unilateral à direita).
2. Variância combinada

$$\hat{s}^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(12 - 1) \cdot 0.6^2 + (15 - 1) \cdot 0.8^2}{12 + 15 - 2} = 0.517.$$

3. Estatística de teste

$$t = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\hat{s}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{7.9 - 6.7}{\sqrt{0.517 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right)}} = 4.309.$$

4. Nível de significância $\alpha = 0.01 \rightarrow \text{RC} = \{t > 2.485\}$.

Solução

4. Conclusão do teste:
   - $t \in$ RC, portanto **rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= P(T > 4.309) = 0.0001$.

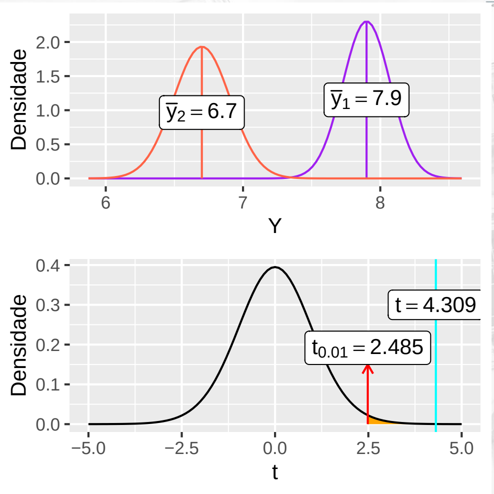

Figura 4. Distribuição amostral das médias e região de rejeição da hipótese nula.

Estatística do teste para o caso de variâncias diferentes $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Neste caso, ainda usamos as variâncias amostrais s_1^2 e s_2^2 para determinar o **erro-padrão da diferença** entre as duas médias.

A estatística de teste fica

$$t = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu.$$

Porém, como as variâncias são diferentes, os **graus de liberdade** devem ser ajustados

$$\nu = \frac{(w_1 + w_2)^2}{\frac{w_1^2}{n_1 - 1} + \frac{w_2^2}{n_2 - 1}},$$

em que

$$w_1 = \frac{s_1^2}{n_1} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{s_2^2}{n_2}.$$

Etapas para o teste

Procedimentos gerais

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste

$$t = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu .$$

5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α (**Obs**: o valor de graus de liberdade ν deve ser calculado conforme equação anterior).
6. Conclusão do teste.

Exemplo: tempo de uma tarefa doméstica

- Uma pesquisa avaliou a eficácia de dois tipos de treinamento, com a finalidade de reduzir o tempo médio de determinada tarefa doméstica.
- Foram selecionadas duas amostras aleatórias de populações com distribuição Normal, onde assume-se que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
- Os dados da pesquisa estão no quadro abaixo. Teste a hipótese de que o tempo médio para a realização da tarefa é igual para os dois treinamentos, ao nível de 5% de significância.

Treinamento 1	$n_1 = 15$	$\overline{y}_1 = 24.2$ min	$s_1 = 3.16$ min
Treinamento 2	$n_2 = 10$	$\overline{y}_2 = 23.9$ min	$s_2 = 4.47$ min

Figura 5. Foto de cottonbro no Pexels.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ (teste bilateral).
2. Estatística de teste

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{24.2 - 23.9}{\sqrt{\frac{3.16^2}{15} + \frac{4.47^2}{10}}} = 0.184.$$

3. Nível de significância $\alpha = 0.05$.
4. Graus de liberdade:

$$w_1 = \frac{s_1^2}{n_1} = \frac{3.16^2}{15} = 0.666 \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{4.47^2}{10} = 1.998.$$

$$v = \frac{(w_1 + w_2)^2}{\frac{w_1^2}{n_1 - 1} + \frac{w_2^2}{n_2 - 1}} = \frac{(0.666 + 1.998)^2}{\frac{0.666^2}{15 - 1} + \frac{1.998^2}{10 - 1}} = 14.933.$$

Solução

3. Nível de significância $\alpha = 0.05 \rightarrow \text{RC} = \{t < -2.132 \text{ ou } t > 2.132\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $t \notin \text{RC}$, portanto **não rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= 2 \times \text{P}(T > 0.184) = 0.856$.

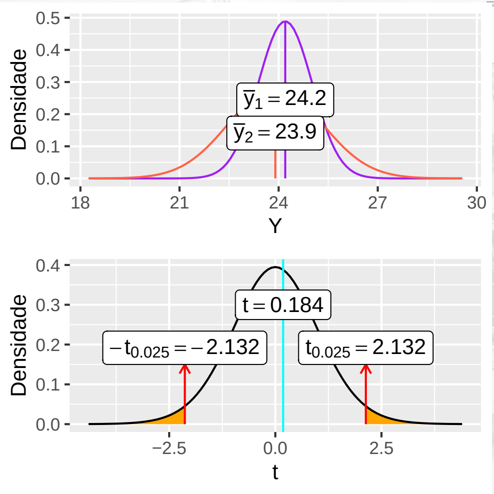

Figura 6. Distribuição amostral das médias e região de rejeição da hipótese nula.

Testes de hipótese para a diferença de médias de duas populações: σ desconhecido e amostras emparelhadas

Amostras emparelhadas

Fazemos testes de comparação de médias para **dados emparelhados** quando os resultados das duas amostras são **relacionados** de acordo com algum critério.

Para cada **par** (Y_{1i}, Y_{2i}), o valor da primeira amostra deve estar claramente associado ao valor da segunda amostra (estudos do tipo "antes" e "depois").

Este teste verifica se o processo ao qual os indivíduos em estudo foram submetidos **produziu alguma alteração**.

Exemplos:

- Influência de uma nova dieta sobre os mesmos indivíduos.
- Influência de uma campanha publicitária sobre a intenção de compra do consumidor.
- Influência de hábitos de saúde acompanhando pares de gêmeos.

Distribuição amostral da diferença

Ao invés de analisarmos cada grupo separadamente, observamos somente a **diferença** D_i entre as duas amostras Y_{1i} e Y_{2i},

$$D_i = Y_{1i} - Y_{2i},$$

e calculamos a média destas diferenças

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i,$$

que terá distribuição

$$\overline{D} \sim \mathrm{N}\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right).$$

O parâmetro μ_D é estimado pela média amostral $\overline{D}$, e como usualmente não temos informações sobre σ_D^2, estimamos seu valor por s_D^2.

Média e variância

Além da média das diferenças,

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i,$$

precisamos calcular também a **variância das diferenças** entre os pares, dada por

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2$$
$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2\right].$$

i	y_1	y_2	d
1	y_{11}	y_{21}	$d_1 = y_{11} - y_{21}$
2	y_{12}	y_{22}	$d_2 = y_{12} - y_{22}$
3	y_{13}	y_{23}	$d_3 = y_{13} - y_{23}$
4	y_{14}	y_{24}	$d_4 = y_{14} - y_{24}$
5	y_{15}	y_{25}	$d_5 = y_{15} - y_{25}$
6	y_{16}	y_{26}	$d_6 = y_{16} - y_{26}$
7	y_{17}	y_{27}	$d_7 = y_{17} - y_{27}$
8	y_{18}	y_{28}	$d_8 = y_{18} - y_{28}$
9	y_{19}	y_{29}	$d_9 = y_{19} - y_{29}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	y_{1n}	y_{2n}	$d_n = y_{1n} - y_{2n}$

Estatística do teste

Uma vez que a diferença média é calculada com base nas diferenças entre amostras **emparelhadas** (isto é, σ^2 é **desconhecido**), e que os valores de D_i geralmente tem distribuição normal, **usamos a distribuição** t, com **estatística de teste** dada por

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_d}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \sim t_\nu,$$

em que

- $\nu = n - 1$, com n sendo o **número de pares** observados.
- μ_d é a média das diferenças na população (normalmente $\mu_d = 0$).

Observação para H_a

Normalmente $H_0 : \mu_d = 0$ e

- $\mu_d < 0$ significa que houve **aumento** “depois”.
- $\mu_d > 0$ significa que houve **diminuição** “depois”.

Etapas do teste

Procedimentos gerais

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste
$$t = \frac{\overline{d} - \mu_d}{s_d/\sqrt{n}}.$$
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α (**Obs:** $\nu = n - 1$, sendo n o **número de pares** observados).
6. Conclusão do teste.

Exemplo: manutenção preventiva

- Em uma fábrica, sete máquinas foram selecionadas aleatoriamente a fim de determinar o **efeito da manutenção preventiva** na produção.
- Inicialmente, as máquinas trabalharam por um período na forma habitual, e **depois** trabalham o mesmo período recebendo manutenções preventivas.
- O total de trabalho produzido, **antes** e **depois** da adoção das manutenções, está na tabela ao lado.
- Ao nível de 5%, podemos concluir que o trabalho médio produzido **é maior depois** da adoção das manutenções preventivas?

i	Antes	Depois	Diferença
1	12.10	12.50	−0.40
2	12.30	16.00	−3.70
3	11.10	12.90	−1.80
4	12.80	14.00	−1.20
5	14.10	12.90	1.20
6	8.40	12.50	−4.10
7	13.30	13.50	−0.20

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : \mu_d = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu_d < 0$ (unilateral à esquerda).
2. Estatística de teste

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_d}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{-1.457 - 0}{1.913/\sqrt{7}} = -2.015.$$

3. Nível de significância
$\alpha = 0.05 \rightarrow \text{RC} = \{t < -1.943\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $t \in \text{RC}$, portanto **rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= \text{P}(T < -2.015) = 0.045$: existem evidências de que o tempo médio de funcionamento das máquinas é maior quando recebem manutenções preventivas.

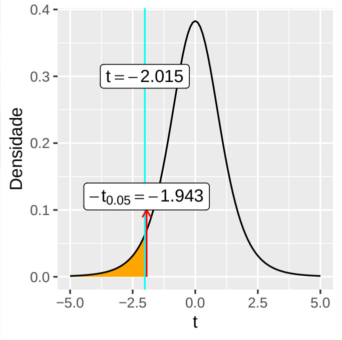

Figura 7. Resultado do teste de hipótese.

Teste de hipótese para a diferença de proporção de duas populações

Hipóteses

Se a amostra for suficientemente grande, sabemos, pelo **Teorema do Limite Central**, que a distribuição de probabilidade da proporção amostral tem um comportamento aproximadamente **Normal**.

Na **comparação** de duas proporções populacionais p_1 e p_2, usaremos como estimador a diferença entre as respectivas proporções amostrais, $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$.

Supondo que duas amostras foram retiradas de duas populações **independentes**, teremos duas proporções amostrais independentes, e a **diferença entre elas** também terá distribuição aproximadamente **Normal**.

Assim, o interesse será em testar

$$
\begin{array}{lcll}
H_0 : p_1 - p_2 = 0 & \Rightarrow & H_0 : p_1 = p_2 & \\
& \text{vs} & & \\
H_a : p_1 - p_2 \neq 0 & \Rightarrow & H_a : p_1 \neq p_2 & \text{ou} \\
H_a : p_1 - p_2 < 0 & \Rightarrow & H_a : p_1 < p_2 & \text{ou} \\
H_a : p_1 - p_2 > 0 & \Rightarrow & H_a : p_1 > p_2. &
\end{array}
$$

Distribuição amostral

Desse modo, o estimador a ser utilizado será $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, cuja distribuição será aproximada pela **Normal**, com parâmetros

$$
\begin{aligned}
E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) &= p_1 - p_2 \\
V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) &= V(\hat{p}_1) + V(\hat{p}_1) \\
&= \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \overset{\text{aprox}}{\sim} \mathrm{N}\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right).
$$

Teste de hipótese para a proporção de duas populações

Se a hipótese nula for verdadeira, as proporções populacionais são iguais. Denotando seu **valor comum** por $\overline{p}$, temos

$$p_1 = p_2 = \overline{p}.$$

Podemos obter um **estimador** para $\overline{p}$, através da ponderação dos estimadores $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$, obtendo a proporção **combinada**

$$\overline{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2},$$

em que y_1 e y_2 são os números de sucessos em cada amostra.

Substituindo os valores de p_1 e p_2 na expressão da $\mathrm{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$, temos que a **estatística de teste** para a diferença de duas proporções é

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{\text{aprox}}{\sim} \mathrm{N}(0, 1).$$

Etapas do teste

Procedimentos gerais

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1 - \overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

   onde $\overline{p}$ é calculado pela equação apresentada anteriormente.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α.
6. Conclusão do teste.

Exercício: celular no trânsito

- Em um estudo com 2870 motoristas, 1210 afirmaram ter o hábito de **mexer no celular com o carro em movimento**. Depois de sancionada uma multa, foi realizado outro estudo com 2200 motoristas, dos quais 725 afirmaram ter ainda o hábito.
- Usando um nível de significância de 10%, é possível verificar a alegação de que a proporção de motoristas com hábito de mexer no celular no trânsito **diminuiu significativamente após a criação da multa**?

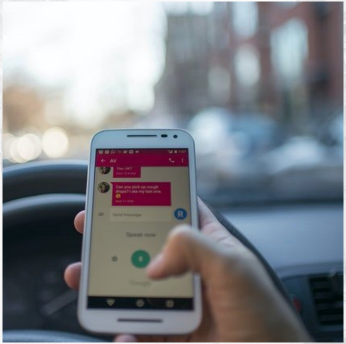

Figura 8. Foto de Roman Pohorecki no Pexels.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{vs} \quad H_a : p_1 > p_2$ (unilateral à direita).
2. Proporções

$$\hat{p}_1 = \frac{y_1}{n_1} = \frac{1210}{2870} = 0.422 \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 = \frac{y_2}{n_2} = \frac{725}{2200} = 0.33$$

$$\overline{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{1210 + 725}{2870 + 2200} = 0.382.$$

Estatística de teste

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1 - \overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.422 - 0.33}{\sqrt{0.382(1 - 0.382)\left(\frac{1}{2870} + \frac{1}{2200}\right)}} = 6.682.$$

Solução

3. Nível de significância
   $\alpha = 0.1 \rightarrow \text{RC} = \{z > 1.282\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $z \in \text{RC}$, portanto **rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= \text{P}(Z > 6.682) \approx 0$: existem evidências de que a criação da multa teve efeito.

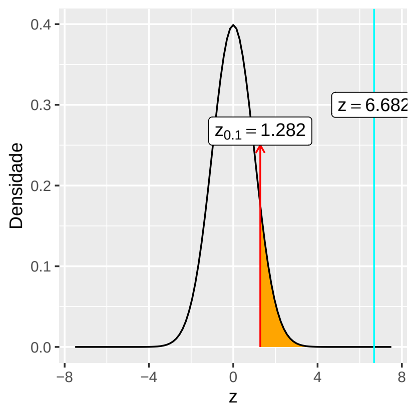

Figura 9. Resultado do teste de hipótese.

Teste de hipótese para a razão de variâncias de duas populações

Ideia geral

Considerando duas populações Y_1 e Y_2 com médias μ_1 e μ_2, e variâncias σ_1^2 e σ_2^2, ou seja

$$Y_1 \sim \text{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad \text{e} \qquad Y_2 \sim \text{N}(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Já vimos que a **distribuição amostral** da razão de duas variâncias amostrais (s_1^2 e s_2^2) possui distribuição F com $n_1 - 1$ graus de liberdade no numerador e $n_2 - 1$ graus de liberdade no denominador.

Intuitivamente:

- Se a **razão das duas variâncias** for próxima de 1, então elas são aproximadamente iguais.
- Em um teste de hipótese para a **igualdade de variâncias** entre duas populações, verifica-se então se a razão das variâncias está ou não próxima de 1.

Condições para o teste

Quando temos os seguintes requisitos:

- Temos uma AAS.
- As duas populações são independentes.
- As duas populações têm, **cada uma**, distribuição Normal (essa é uma exigência estrita).

Sendo assim, usamos a **estatística de teste**

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{\nu_1,\nu_2},$$

em que $\nu_1 = n_1 - 1$ graus de liberdade no numerador e $\nu_2 = n_2 - 1$ graus de liberdade no denominador.

Importante: s_1^2 deve ser sempre a **maior** das duas variâncias amostrais.

Etapas do teste

Procedimentos gerais para um teste de hipótese para a diferença de duas variâncias

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α.
6. Conclusão do teste.

Exemplo: variação em moedas de quarto de dólar

- Nos EUA, as moedas de quarto de dólar sofreram alterações no peso depois de 1964.
- Uma amostra de 40 moedas fabricadas *antes* de 1964 resultou em um desvio-padrão de 0.087 g.
- Uma amostra de 40 moedas fabricadas *depois* de 1964 resultou em um desvio-padrão de 0.06194 g.
- Ao se projetar uma máquina de vendas com moedas, deve-se considerar os desvios-padrão antes e depois de 1964.
- Use o nível de significância de 5% para testar a afirmativa de que os pesos de quarto de dólar antes e depois de 1964 **são provenientes de populações com o mesmo desvio-padrão**.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (bilateral).
2. Estatística de teste

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.087^2}{0.06194^2} = \frac{0.0076}{0.0038} = 1.973.$$

3. Nível de significância
   $\alpha = 0.05 \to \text{RC} = \{F < 0.529 \text{ ou } F > 1.891\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $F \in \text{RC}$, portanto **rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= 2 \times \text{P}(F > 1.973) = 2 \times 0.018 = 0.036$: existem evidências de que a variação dos pesos de quarto de dólar feitos depois de 1964 é significativamente diferente da variação entre os quartos de dólar feitos antes de 1964.

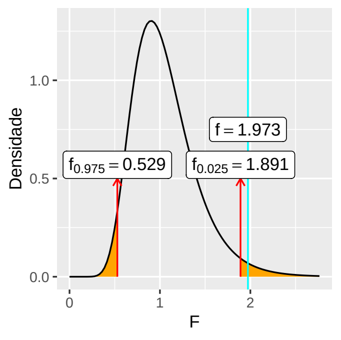

Figura 10. Resultado do teste de hipótese.

Estrutura da unidade

- Fundamentos de testes de hipóteses.
- Testes para uma população.
- **Testes para duas populações**.
  - **Testes de hipótese para a diferença de média de duas populações:** σ^2 **conhecido**.
  - **Testes de hipótese para a diferença de média de duas populações:** σ^2 **desconhecido**.
    - **Variâncias iguais** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
    - **Variâncias diferentes** $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
  - **Testes de hipótese para a diferença de média de duas populações:** σ^2 **desconhecido e amostras emparelhadas**.
  - **Teste de hipótese para a diferença de proporção de duas populações**.
  - **Teste de hipótese para a razão de variâncias de duas populações**.
- Testes de aderência e de associação.