

Teorema de Bayes

Testes diagnóstico

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Curso de Estatística e Ciência de Dados

Departamento de Estatística

Universidade Federal do Paraná

2025/2

Exemplo: O problema dos testes diagnóstico

Teste diagnóstico positivo implica doente?

- ▶ Será que o teste sempre acerta o diagnóstico?
- ▶ Se não, qual a chance de erro?
- ▶ Como avaliar um teste? Ou comparar?
- ▶ Se o teste resultar positivo, será que a pessoa certamente está doente?
- ▶ Se o teste resultar negativo, será que a pessoa certamente não está doente?

Exemplo: O problema dos testes diagnóstico

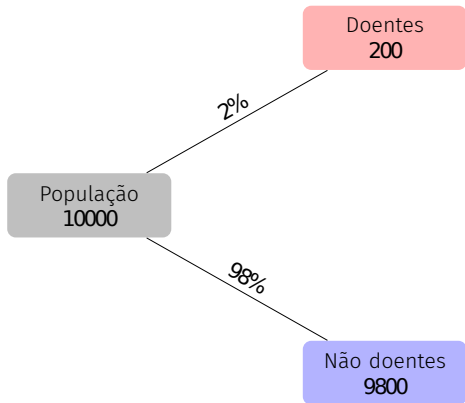
Informação disponível:

- ▶ Teste de varredura/triagem (*screening*) para uma determinada doença.
- ▶ Teste podem ser *imperfeitos*, suponha que:
acerta 90% dos que tem doença e 80% dos que não tem.
- ▶ A doença ocorre em 2% da população.

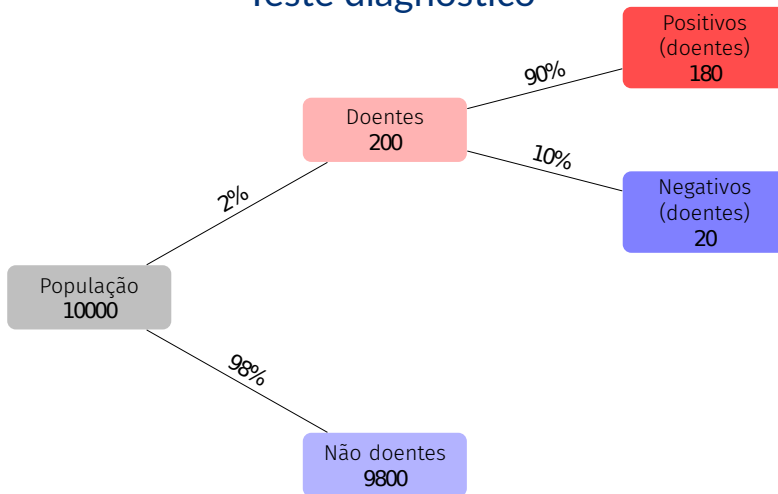
Perguntas de interesse:

- ▶ Se uma pessoa testou positivo, qual a chance de ter a doença?
- ▶ Se testou negativo, qual a chance de estar livre da doença?

Teste diagnóstico

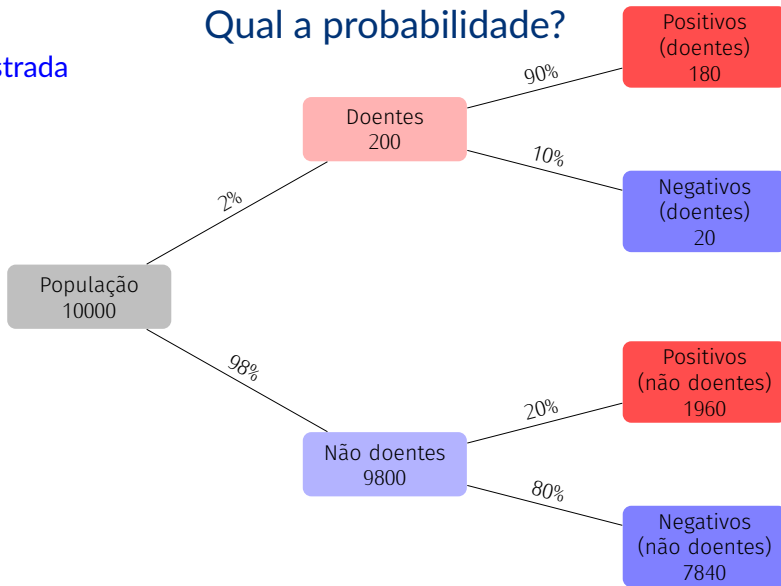


Teste diagnóstico



Qual a probabilidade?

Solução ilustrada



Qual a probabilidade?

Terminologia específica.

- ▶ Teste de *screening* para uma determinada doença.
- ▶ Teste *imperfeito*:
acerta 90% dos que tem doença (*sensibilidade*) e portanto 10% de *falso negativo*,
acerta 80% dos que não tem (*especificidade*) e portanto 20% de *falso positivo*.
- ▶ A doença ocorre em 2% da população (*prevalência*).

Perguntas de interesse:

- ▶ Se uma pessoa testou positivo, qual a chance de ter a doença?
(*valor preditivo positivo*)
- ▶ Se testou negativo, qual a chance de estar livre da doença?
(*valor preditivo negativo*)

Testes diagnóstico - Organizando dados em tabelas

Características do teste (para diagnósticos conhecidos)

	Positivo	Negativo	
c/ Doença	0,90	0,10	1
s/ Doença	0,20	0,80	1

Temos 2% com a doença na população (e portanto 98% sem)

	Positivo	Negativo	Total
c/ Doença	0,018	0,002	0,02
s/ Doença	0,196	0,784	0,98
Total	0,214	0,786	1

Conhecendo o resultado do teste

	Positivo	Negativo	
c/ Doença	0.0841	0.00254	
s/ Doença	0.916	0.997	
Total	1	1	

Testes diagnóstico

A notação é nossa amiga!

$$P[+|D] = 0,90 \longrightarrow P[-|D] = 0,10$$

$$P[-|\bar{D}] = 0,80 \longrightarrow P[+|\bar{D}] = 0,20$$

$$P[D] = 0,02 \longrightarrow P[\bar{D}] = 0,98$$

$$P[D|+] = ? \qquad P[\bar{D}|-] = ?$$

E um Teorema resolve o problema!

$$\begin{aligned} P[D|+] &= \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\bar{D}] \cdot P[\bar{D}]} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0,02}{0,90 \cdot 0,02 + 0,20 \cdot 0,98} = 0,0841 \end{aligned}$$

Testes diagnóstico

Solução ilustrada (com notação)

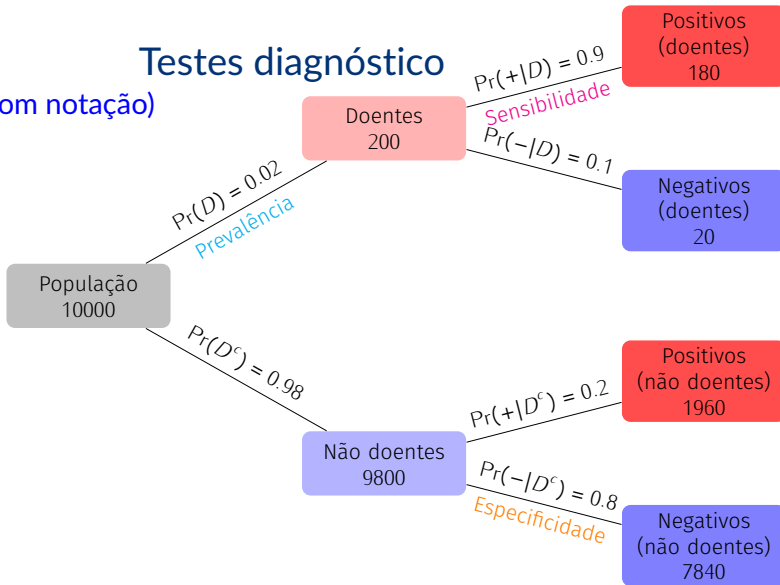


Figura 1. Ilustração do problema do teste diagnóstico.

Terminologia no contexto

$$P[+|D] = 0,90 \text{ (sens)} \longrightarrow P[-|D] = 0,10 \text{ (1 - sens)}$$

$$P[-|\bar{D}] = 0,80 \text{ (esp)} \longrightarrow P[+|\bar{D}] = 0,20 \text{ (1 - esp)}$$

$$P[D] = 0,02 \text{ (prev)} \longrightarrow P[\bar{D}] = 0,98 \text{ (1 - prev)}$$

$$P[D|+] = ? \text{ (vpp)}$$

$$P[\bar{D}|-] = ? \text{ (vpn)}$$

Teste +

$$\begin{aligned} \text{vpp} &= \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\bar{D}] \cdot P[\bar{D}]} \\ &= \frac{\text{sens} \cdot \text{prev}}{\text{sens} \cdot \text{prev} + (1 - \text{esp}) \cdot (1 - \text{prev})} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0,02}{0,90 \cdot 0,02 + 0,20 \cdot 0,98} = 0,0841 \end{aligned}$$

Teste -

$$\begin{aligned} \text{vpn} &= \frac{P[-|\bar{D}] \cdot P[\bar{D}]}{P[-|\bar{D}] \cdot P[\bar{D}] + P[-|D] \cdot P[D]} \\ &= \frac{\text{esp} \cdot (1 - \text{prev})}{\text{esp} \cdot (1 - \text{prev}) + (1 - \text{sens}) \cdot \text{prev}} \\ &= \frac{0,80 \cdot 0,98}{0,80 \cdot 0,98 + 0,10 \cdot 0,02} = 0,997 \end{aligned}$$

Algo estranho ...ou não?

O resultado surpreende?

- ▶ A probabilidade $P[D|+] = 0.0841$ é baixa,
- ▶ mas por outro lado, após o resultado do teste, a chance de ter a doença aumentou (mais que) quatro vezes ind $P[D] = 0,02$ para $P[D|+] = 0.0841$.
- ▶ Já a probabilidade $P[\bar{D}|-] = 0.997$ é bastante elevada.

O teste positivo não implica na presença da doença, mas o teste negativo, quase certamente, descarta a doença.

O problema dos testes diagnóstico

E se o teste tivesse sido feito por recomendação médica após um exame?
Mudaria algo?

Baseado em sua experiência o médico estima que 30% dos pacientes com os sintomas apresentados possuem a doença.

Solução?

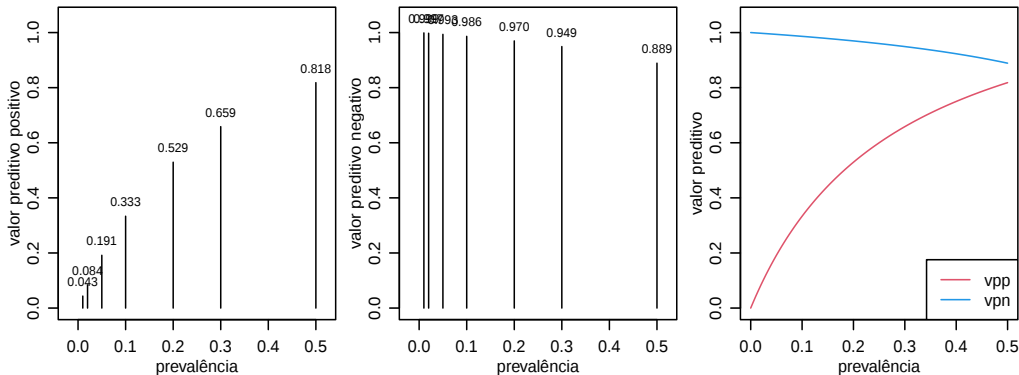
Neste caso $P[D] = 0,30$ (reproduzir passos acima!):

$$\begin{aligned} P[D|+] &= \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\bar{D}] \cdot P[\bar{D}]} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0,30}{0,90 \cdot 0,30 + 0,20 \cdot 0,70} = 0.659 \end{aligned}$$

Comparação e *interpretação* (e ... muito cuidado!)

O problema dos testes diagnóstico

Valor preditivo positivo (vpp) e negativo (vpn) para diferentes prevalências.
 Resultados para sensibilidade = 0,90 e especificidade = 0,80.



Um outro olhar sobre o problema

- ▶ Existência de uma probabilidade inicial (*a priori*).

Estado	Doente (D)	Sadio ($\bar{D}$)
Probabilidade	0.02	0.98

- ▶ Informação

Teste positivo: $P[+|D] = 0,90$ e $P[+|\bar{D}] = 0,20$

- ▶ (possivelmente) alterando probabilidades (*a posteriori*).

Estado	Doente (D)	Sadio ($\bar{D}$)
Probabilidade	0.084	0.916

- ▶ Classificação de possíveis *estados da natureza* e suas probabilidades.
- ▶ Decisão guiada pela probabilidade.

Teorema de Bayes: notação “usual”

$$P[D|+] = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]}$$
$$\propto P[+|D] \cdot P[D]$$

$D : A_1, \overline{D} : A_2$ e $+: B, -: \overline{B}$

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$
$$\propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

Teorema de Bayes

Reescrevendo e reinterpretando como problema de classificação.

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]} \propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

Como o paciente deve ser classificado após o teste?

$$P[A_1|B] \propto P[B|A_1] \cdot P[A_1] \text{ (ou, } P[D|+] \propto P[+|D] \cdot P[D])$$

$$P[A_2|B] \propto P[B|A_2] \cdot P[A_2] \text{ (ou, } P[\bar{D}|+] \propto P[+|\bar{D}] \cdot P[\bar{D}])$$

Portanto,

$$P[A_1|B] \propto 0,90 \cdot 0,02 = 0,018$$

$$P[A_2|B] \propto 0,20 \cdot 0,98 = 0,196$$

A_1 e A_2 são todas as categorias possíveis, as probabilidades devem somar 1:

$$P[A_1|B] = \frac{0,018}{0,018 + 0,196} = 0,084$$

$$P[A_2|B] = \frac{0,196}{0,018 + 0,196} = 0,916$$

Teorema de Bayes

Qual a população?

- ▶ teste de varredura (*screening*) $P(A_1) = 0,02$
- ▶ teste por indicação (*auxílio a diagnóstico*) $P(A_1) \gg 0,02$

Consulta levanta suspeita e pede-se o teste.

Opinião especializada após consulta $P(A_1) = 0,50$

$$P[A_1|B] \propto 0.9 \cdot 0.5 = 0.45$$

$$P[A_2|B] \propto 0.2 \cdot 0.5 = 0.1$$

Padronizando para somar 1:

$$P[A_1|B] = \frac{0.45}{0.45 + 0.1} = 0.818$$

$$P[A_2|B] = \frac{0.1}{0.45 + 0.1} = 0.182$$

Testes em série

E se o (mesmo) teste for repetido?

Notação: $B_{(1)}$ positivo no primeiro teste e $B_{(2)}$ positivo no segundo teste.

Supondo independência:

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto P[B_{(2)}|A_1] \cdot P[B_{(1)}|A_1] \cdot P[A_1],$$

$$P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto P[B_{(2)}|A_2] \cdot P[B_{(1)}|A_2] \cdot P[A_2].$$

Portanto, se for o mesmo teste (mesmas características de sensibilidade e especificidade):

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto 0,90^2 \cdot 0,02 = 0.0162,$$

$$P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto 0,20^2 \cdot 0,98 = 0.0392.$$

Logo,

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] = \frac{0.0162}{0.0162 + 0.0392} = \mathbf{0.292} \quad P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] = \frac{0.0392}{0.0162 + 0.0392} = 0.708.$$

A classificação ainda é a mesma mas as chances mudaram!

Com três testes positivos $P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(3)}] = 0.65.$

Testes em série

Testes positivos e negativos?

Notação: $B_{(1)}$ positivo no primeiro teste, e $B_{(2)}$ negativo no segundo teste e $B_{(3)}$ positivo no terceiro teste.

Supondo independência:

$$P[A_1|B_{(1)}, \bar{B}_2, B_{(3)}] \propto P[B_{(3)}|A_1] \cdot P[\bar{B}_2|A_1] \cdot P[B_{(1)}|A_1] \cdot P[A_1]$$

$$P[A_2|B_{(1)}, \bar{B}_2, B_{(3)}] \propto P[B_{(3)}|A_2] \cdot P[\bar{B}_2|A_2] \cdot P[B_{(1)}|A_2] \cdot P[A_2]$$

Portanto, se for o mesmo teste (mesmas características de sensibilidade e especificidade):

$$P[A_1|B_{(1)}, \bar{B}_2, B_{(3)}] \propto 0,90 \cdot 0,10 \cdot 0,90 \cdot 0,02 = 0.00162,$$

$$P[A_2|B_{(1)}, \bar{B}_2, B_{(3)}] \propto 0,20 \cdot 0,80 \cdot 0,20 \cdot 0,98 = 0.0314.$$

Logo,

$$P[A_1|B_{(1)}, \bar{B}_2, B_{(3)}] = \frac{0.00162}{0.00162 + 0.0314} = 0.0491 \quad P[A_2|B_{(1)}, \bar{B}_2, B_{(3)}] = \frac{0.0314}{0.00162 + 0.0314} = 0.951.$$

Testes em série

E se forem usados **testes diferentes**?

Segundo teste: 85% de sensibilidade e 95% de especificidade.

Supondo independência entre os testes.

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto P[B_{(2)}|A_1] \cdot P[B_{(1)}|A_1] \cdot P[A_1]$$

$$P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto P[B_{(2)}|A_2] \cdot P[B_{(1)}|A_2] \cdot P[A_2]$$

Portanto, aplicando em série tem-se:

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,02 = 0.0153$$

$$P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto 0,05 \cdot 0,20 \cdot 0,98 = 0.0098$$

Logo,

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] = \frac{0.0153}{0.0153 + 0.0098} = \mathbf{0.6096} \quad P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] = \frac{0.0098}{0.0153 + 0.0098} = 0.3904$$

Notação de variável e parâmetro

$$P[D|+] = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\bar{D}] \cdot P[\bar{D}]}$$

$$\propto P[+|D] \cdot P[D]$$

$$D : A_1, \bar{D} : A_2 \quad \text{e} \quad + : B, - : \bar{B}$$

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$

$$\propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

$$D : \theta = 1, \bar{D} : \theta = 0 \quad \text{e} \quad + : Y = 1, - : Y = 0$$

$$P[\theta = 1|Y = 1] = \frac{P[Y = 1|\theta = 1] \cdot P[\theta = 1]}{\sum_{j=0}^1 P[Y = 1|\theta = j] \cdot P[\theta = j]}$$

$$\propto P[Y = 1|\theta = 1] \cdot P[\theta = 1]$$

Adaptando notação

- Existência de uma probabilidade inicial (*a priori*).

Estado	$\theta = 1$ (Doente)	$\theta = 0$ (Sadio)
Probabilidade	0.02	0.98

- Dado/Informação $Y = 1$ se positivo, $Y = 0$ se negativo,
 Teste positivo e $P[Y = 1|\theta = 1] = 0,90$ e $P[Y = 1|\theta = 0] = 0,20$

- atualizando probabilidades (*a posteriori*).

Estado	$\theta = 1$ (Doente)	$\theta = 0$ (Sadio)
Probabilidade	0.084	0.916

- Distribuição de probabilidades dos *valores do parâmetro* e suas probabilidades.

Repetindo o teste - resumo

Estados da natureza:

Estado (θ)	$\theta = 0(\overline{D})$	$\theta = 1(D)$
Probabilidade	0,98	0,02

Estados da natureza após primeiro exame positivo:

Estado ($\theta y_1 = 1$)	$\theta = 0(\overline{D})$	$\theta = 1(D)$
Probabilidade	0,916	0,084

Estados da natureza após segundo exame positivo:

Estado ($\theta y_1 = 1, y_2 = 1$)	$\theta = 0(\overline{D})$	$\theta = 1(D)$
Probabilidade	0,708	0,292

Estados da natureza após terceiro exame positivo:

Estado ($\theta y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 1$)	$\theta = 0(\overline{D})$	$\theta = 1(D)$
Probabilidade	0,350	0,650

Notações

$$P[D|+] = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\bar{D}] \cdot P[\bar{D}]}$$

$$\propto P[+|D] \cdot P[D]$$

$$D : A_1, \bar{D} : A_2 \quad \text{e} \quad + : B, - : \bar{B}$$

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$

$$\propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

$$D : \theta = 1, \bar{D} : \theta = 0 \quad \text{e} \quad + : Y = 1, - : Y = 0$$

$$P[\theta = 1|Y = 1] = \frac{P[Y = 1|\theta = 1] \cdot P[\theta = 1]}{\sum_j P[Y = 1|\theta = j] \cdot P[\theta = j]}, j = \{0, 1\}$$

$$\propto P[Y = 1|\theta = 1] \cdot P[\theta = 1]$$

$$D : \text{Hipótese} \quad \text{e} \quad + : \text{Evidência}$$

$$P[H|E] = \frac{P[E|H] \cdot P[H]}{P[E|H] \cdot P[H] + P[E|\neg H] \cdot P[\neg H]}$$

$$\propto P[E|H] \cdot P[H]$$

Probabilidades e Odds

Evento (A)	Probabilidade	Razão ($P(A)/P(\bar{A})$)	Odds
5 no lançamento de dado	$\frac{1}{6}$	$\frac{1/6}{5/6}$	1:5
Cara no lançamento de moeda	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/2}{1/2}$	1:1
Figura em uma carta de baralho	$\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$	$\frac{12/52}{40/52}$	3:10
Prevalência no exemplo	$\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$	$\frac{2/100}{98/100}$	1:49

► Probabilidade (P): medida em $[0, 1]$.

► $\log(\frac{P}{1-P})$: medida em $[-\infty, +\infty]$.

► Odds: medida em $[0, +\infty]$.

► $\log(\text{Odds})$: medida em $[-\infty, +\infty]$.

Odds no teste diagnóstico

$$\frac{P[D|+]}{P[\bar{D}|+]} = \frac{\frac{P[+|D]P[D]}{P[+]}}{\frac{P[+|\bar{D}]P[\bar{D}]}{P[+]}} = \frac{P[+|D]}{P[+|\bar{D}]} \frac{P[D]}{P[\bar{D}]}$$

Odds a posteriori = razão de verossimilhanças · *Odds a priori*

- ▶ (Neste caso) Razão de verossimilhanças (dados): **fator de Bayes**.
- ▶ Interpretação direta: quanto o dado (resultado do teste) modifica a *odds a priori*.

Odds para Teste +

$$\begin{aligned} \frac{P[D|+]}{P[\bar{D}|+]} &= \frac{P[+|D]}{P[+|\bar{D}]} \frac{P[D]}{P[\bar{D}]} \\ \frac{\text{vpp}}{1 - \text{vpp}} &= \frac{\text{sen}}{1 - \text{esp}} \frac{\text{prev}}{1 - \text{prev}} \\ &= \frac{0,90}{0,20} \frac{2}{98} \quad (9 : 98 \approx 1 : 11) \end{aligned}$$

Odds para Teste -

$$\begin{aligned} \frac{P[D|-]}{P[\bar{D}|-]} &= \frac{P[-|D]}{P[-|\bar{D}]} \frac{P[D]}{P[\bar{D}]} \\ \frac{\text{vpn}}{1 - \text{vpn}} &= \frac{1 - \text{sen}}{\text{esp}} \frac{\text{prev}}{1 - \text{prev}} \\ &= \frac{0,10}{0,80} \frac{2}{98} \quad (1 : 392) \end{aligned}$$

Alguns tópicos adicionais em *testes diagnóstico*

- ▶ **Opinião especialista (subjetiva):**
probabilidade pré-teste.
- ▶ **Estimação de características dos testes:**
probabilidades podem ser estimadas a partir de dados,
dados organizados em tabelas de frequências/probabilidades.
- ▶ **Desenho amostral:**
amostra aleatória (total fixado),
desenho controlado (margins fixadas).
- ▶ **Resposta contínua (ex. glicose):**
dicotomização para resultado,
curva ROC para diferentes probabilidades "de corte".

Generalizações e comentários

- ▶ Dois ou mais testes:
 - ▶ sequenciais ou em paralelo,
 - ▶ testes com características diferentes,
 - ▶ estratégias para aplicação dos testes.
- ▶ Procedimento ilustra, de forma simplificada, o método científico.
conhecimento atual → nova informação → conhecimento atualizado.
- ▶ Notação de probabilidade condicional expressa tal atualização.
 $P[D|+]$.
- ▶ Aprendizado sequencial.
- ▶ Problemas de classificação e decisão
(spam, concessão de crédito, reconhecimento de padrão, etc).

Teorema de Bayes

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$

- ▶ No exemplo só haviam duas categorias:

$A_1(D)$: com a doença, $A_2(\bar{D})$: sem a doença.

- ▶ O resultado é mais geral, válido para várias categorias.
- ▶ Um outro exemplo: *trauma score*.
- ▶ Aplicação em **problemas de classificação** (algoritmo **Naïve Bayes**).
- ▶ Categorias são possíveis **estados do sistema**:
 - ▶ **estados do sistema** categóricos (ou ainda discretos ou enumeráveis),
 - ▶ **estados do sistema** em uma escala contínua:

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta) \cdot f(\theta)}{\int f(y|\theta) \cdot f(\theta) d\theta}.$$

Generalizações e comentários

- ▶ Dois ou mais testes:
 - ▶ sequenciais ou em paralelo,
 - ▶ testes com características diferentes,
 - ▶ estratégias para aplicação dos testes.
- ▶ Procedimento ilustra, de forma simplificada, o método científico.
conhecimento atual → nova informação → conhecimento atualizado.
- ▶ Notação de probabilidade condicional expressa tal atualização.
 $P[D|+]$.
- ▶ Aprendizado sequencial.
- ▶ Problemas mais gerais de classificação e decisão
(spam, concessão de crédito, reconhecimento de padrão, etc).