Somatório e Produtório

Última atualização: 14 de março de 2024, 21:39:47

Somatório

O **somatório**, denotado pela letra grega $\sum$ (sigma maiúsculo), é uma simbologia matemática para representar a soma de termos sucessivos de uma sequência. A notação de **somatório** é frequentemente utilizada na área de *estatística* em fórmulas e expressões envolvendo somas sucessivas de elementos como, por exemplo, no cálculo de médias, variância, correlações, dentre outras quantidades.

OBS: ao longo deste material denotamos o produto de dois termos de duas formas: $x \cdot y$ ou simplesmente xy. Usamos uma ou outra forma dependendo do contexto para melhor entendimento.

Exemplo 1

Como exemplo inicial considere a seguinte soma de termos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Esta soma pode ser representada, utilizando reticências, por:

$$1 + 2 + \ldots + 10.$$

Uma representação mais geral utiliza a notação de *somatório*:

$$\sum_{i=1}^{10} i$$

que é lida como "somatório de i, com i variando de 1 a 10", em que

- $\sum$ denota o *somatório* indicando que termos obtidos para cada i devem ser somados,
- i em $i = 1$ é o *índice* do somatório, que é elemento que vai tomar os diferentes valores em cada termo da sequência,
- *1* é o índice ou *limite inferior* do somatório,
- *10* é o índice ou *limite superior* do somatório,
- i é *termo* que vai ser somado.

O resultado é:

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + \ldots + 10 = 55$$

Neste caso, o termo foi simplesmente o próprio valor i, mas pode-se ter expressões mais gerais como veremos a seguir.

No caso mais geral da soma de n termos temos:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Exemplo 2

A soma dos inversos de i para i variando de 3 a 8 corresponde a

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$

e pode ser denotada por:

$$\sum_{i=3}^{8}\frac{1}{i}$$

e lida como “somatório de $1/i$, com i variando de 3 até 8”.

$\square$

Exemplo 3

Considere o somatório:

$$\sum_{i=2}^{5}\frac{i^2}{\sqrt{2+i}},$$

lido como “somatório de $i^2/\sqrt{2+i}$, com i variando de 2 a 5”. Este somatório corresponde a avaliar o *termo* $i^2/\sqrt{2+i}$ para $i=2$, $i=3$, $i=4$ e $i=5$, somando os resultados de cada avaliação, ou seja:

$$\sum_{i=2}^{5}\frac{i^2}{\sqrt{2+i}}=\frac{2^2}{\sqrt{2+2}}+\frac{3^2}{\sqrt{2+3}}+\frac{4^2}{\sqrt{2+4}}+\frac{5^2}{\sqrt{2+5}}=\frac{4}{\sqrt{4}}+\frac{9}{\sqrt{5}}+\frac{16}{\sqrt{6}}+\frac{25}{\sqrt{7}}=22.006.$$

$\square$

Embora seja comum indicar o *índice* pela letra i, pode-se utilizar qualquer outra letra para denotar o índice.

Exemplo 4

Abrindo o somatório. O somatório:

$$\sum_{y=0}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-y}$$

corresponde a

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-0}+\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-0}=$$
$$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot 1=$$
$$\left(\frac{8}{27}\right)+\left(\frac{4}{27}\right)+\left(\frac{2}{27}\right)+\left(\frac{1}{27}\right)^{3}=0.556$$

$\square$

Operações com elementos

O índice pode indicar elementos de um conjunto de valores e o somatório vai indicar a soma dos elementos ou de alguma função dos elementos.
Seja x_i um elemento geral de um conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A soma destes valores é denotada por:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

e a soma de alguma função $f(\cdot)$ destes valores será então:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Exemplo 5

Sejam os valores 24, 27, 18, 30 e 25. Para indicar que o primeiro valor é 24, o segundo é 27 e assim por diante. Denotamos: $x_1 = 24, x_2 = 27, x_3 = 18, x_4 = 30$ e $x_5 = 25$. A soma dos valores é denotada por $\sum_{i=1}^{5} x_i$ que corresponde a

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 + 27 + 18 + 30 + 25 = 124.$$

Como um exemplo de uma função dos valores considere a soma de quadrados:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 24^2 + 27^2 + 18^3 + 30^4 + 25^5 = 576 + 729 + 324 + 900 + 625 = 3154.$$

Neste caso $f(x) = x^2$ e $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2$. □

Relação com vetores

Dizemos que os valores formam um *vetor* que aqui chamaremos de y.

$$y = \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 18 \\ 30 \\ 25 \end{bmatrix}$$

O transposto deste vetor (denotado por y' ou y^T) é:

$$y^T = \begin{bmatrix} 24 & 27 & 18 & 30 & 25 \end{bmatrix}$$

A notação y_i denota um elemento genérico do vetor.

Desta forma o somatório $\sum_{i=1}^{5} y_i$ denota a soma dos valores do vetor y e corresponde à operação:

$$\mathbb{1}_5' y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 18 \\ 30 \\ 25 \end{bmatrix} = 1 \cdot 24 + 1 \cdot 27 + 1 \cdot 18 + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 25 = \sum_{i=1}^{5} y_i = 124,$$

em que $\mathbb{1}_5$ denota um vetor de dimensão cinco (5) em que todos elementos são iguais a 1 (um).

A soma de quadrados dos valores $\sum_{i=1}^{5} y_i^2$ corresponde à operação:

$$y'y = \begin{bmatrix} 24 & 27 & 18 & 30 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 18 \\ 30 \\ 25 \end{bmatrix} = 24^2 + 27^2 + 118^2 + 30^2 + 25^2 = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 3154,$$

Esse tipo de soma acima é chamada de forma quadrática e será utilizada em disciplinas como regressão, estatística multivariada entre outras.

O número de termos de um vetor corresponde a:

$$\mathbb{1}'\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5,$$

Algumas propriedades

- *PS1* O somatório pode ser decomposto

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=k+1}^{n} y_i\,, \quad k < n$$

Exemplo 6

Sejam os valores do **Exemplo 5** e $k = 3$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = \sum_{i=1}^{3} y_i + \sum_{i=4}^{5} y_i = (24 + 27 + 18) + (30 + 25)$$

$\square$

- *PS2* Soma de produtos com uma constante

$$\sum_{i=1}^{n} (a y_i) = a \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exemplo 7

Sejam os valores do **Exemplo 5** e $k = 3$

$$\sum_{i=1}^{5} 3y_i = 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 3y_5 = 3(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 3\sum_{i=1}^{5} y_i$$

$\square$

- *PS3* O somatório de uma constante

$$\sum_{i=1}^{n} C = nC$$

Exemplo 8

$$\sum_{i=1}^{5} 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20$$

$\square$

- *PS4* O somatório de somas (ou subtrações)

$$\sum_{i=1}^{n} (f(i) \pm g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$$

- *OBS* Uma função matemática que satisfaça tanto *PS3* quanto *PS4* é dita 'linear'. Outros exemplos clássicos de funções lineares são a derivada e a integral, ambas estudadas em Cálculo.

Exemplo 9

Sejam $f(i) = i$ e $g(i) = \sqrt{i}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} (i + \sqrt{i}) &= (1 + \sqrt{1}) + (2 + \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{3}) = 10.146 \\ &= (1 + 2 + 3) + (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 10.146\end{aligned}$$

$\square$

Notação abreviada

Para indicar uma operação de somatório em todos os elementos de um vetor de valores podemos simplificar ou mesmo omitir os índices. Seja y um vetor de n elementos. A notação abreviada fica

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i} y_i = \sum y_i.$$

A simplificação também pode implicar que a expressão é válida para quaisquer limites do somatório. A simplificação deve ser usada com cautela e somente quando for implícito no contexto os valores dos índices do somatório.

Exercícios

1. Obtenha o valor dos seguintes somatórios.

   (a) $\sum_{j=5}^{10} j$

   (b) $\sum_{i=1}^{10} 3i$

   (c) $\sum_{i=2}^{5} i(i-1)$

   (d) $\sum_{j=1}^{10} 2$

   (e) $\sum_{i=4}^{9} 2$

   (f) $\sum_{n=1}^{10} (a\,n+b)$

   (g) $\sum_{j=0}^{4} 10^j$

   (h) $\sum_{i=1}^{6} i^2$

   (i) $\sum_{i=1}^{4} (i+2)$

   (j) $\sum_{i=1}^{4} (2+i^2)$

   (k) $\sum_{i=0}^{5} \frac{1}{i!}$

   (l) $\sum_{i=0}^{4} \left(\frac{i}{2}+5\right)$

   (m) $\sum_{n=1}^{10} (-1)^n$

   (n) $\sum_{n=1}^{11} (-1)^n$

   (o) $\sum_{k=1}^{8} \frac{(-1)^k}{k+1}$

2. Obtenha a expressão de somatório e o valor das somas a seguir.

   (a) $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

   (b) $1+3+5+7+9+11+13+15$

   (c) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{9}{10}$

   (d) $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$
   em que termos da forma $\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$ correspondem ao número de combinações possíveis de n elementos, tomando-se x a cada combinação.

   (e) $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$

   (f) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$

3. Sejam os vetores $x=(2,5,8,4)'$ e $y=(15,11,10,12)'$, ambos com $n=4$ elementos. Obtenha os resultados dos somatórios a seguir.

   (a) $\sum_{i=1}^{n} x_i$

   (b) $\sum_{i=2}^{3} x_i$

   (c) $\sum_{i=1}^{n} (2x_i-4)$

   (d) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2+y_i^2}$

   (e) $\sum_i x_i$

   (f) $\bar{x}=\frac{\sum_i x_i}{n}$

   (g) $\sum_i y_i$

   (h) $\bar{y}=\frac{\sum_i y_i}{n}$

   (i) $\sum_i (y_i-\bar{y})$

   (j) $\sum_i (y_i-\bar{y})^2$

   (k) $\frac{\sum_i (y_i-\bar{y})^2}{3}$

   (l) $\frac{\sum_i y_i^2-n\bar{y}^2}{3}$

   (m) $\sum_i x_i y_i$

   (n) $\sum_i x_i^2$

   (o) $\left(\sum_i x_i\right)^2$

   (p) $n\bar{x}^2$

   (q) $\frac{\left(\sum_i x_i\right)^2}{n}$

   (r) $\frac{\sum_{i=2}^{4} x_i y_{i-1}}{\sum_{i=2}^{4} x_{i-1} y_i}$

   (s) $\sum_{i=2}^{4} \frac{x_i y_{i-1}}{x_{i-1} y_i}$

   (t) $\frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_i x_i^2-n\bar{x}^2)(\sum_i y_i^2-n\bar{y}^2)}}$

   (u) $\frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x_i^2-n\bar{x}^2}$

   (v) $\sum_i \frac{y_i}{x_i}$

   (w) $\frac{\sum_i y_i}{\sum_i x_i}$

Duplo somatório

O duplo somatório ocorre quando cada termo de um somatório é dado por um outro somatório.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i\cdot j) &= \sum_{i=1}^{n}(i\cdot 1 + i\cdot 2 + \ldots + i\cdot m)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(i\cdot 1) + \sum_{i=1}^{n}(i\cdot 2) + \ldots + \sum_{i=1}^{n}(i\cdot m)\\
&= (1\cdot 1 + 2\cdot 1 + \ldots + n\cdot 1) + (1\cdot 2 + 2\cdot 2 + \ldots + n\cdot 2) + \ldots + (1\cdot m + 2\cdot m + \ldots + n\cdot m)
\end{aligned}
$$

Sejam dois vetores $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j &= \sum_{i=1}^{n}(x_i y_1 + x_i y_2 + \ldots + x_i y_m)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i y_1) + \sum_{i=1}^{n}(x_i y_2) + \ldots + \sum_{i=1}^{n}(x_i x_m)\\
&= (x_1 y_1 + x_2 y_1 + \ldots + x_n y_1) + (x_1 y_2 + x_2 y_2 + \ldots + x_n x_2) + \ldots + (x_1 y_m + x_2 y_m + \ldots + x_n y_m)
\end{aligned}
$$

Mais propriedades

- *PS5* Distributiva e fatoração
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i\,j) = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} j\right)$$
- *PS6* Comutativa e associativa
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i y_j$$
- *PS7* Distributiva
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right)$$

Exemplo 10

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(i\cdot j) &= \left(\sum_{i=1}^{3} i\right)\left(\sum_{j=1}^{5} j\right) = 6\times 15 = 90,\\
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5}(i\cdot j) &= \left(\sum_{i=1}^{3} i\right)\left(\sum_{j=2}^{5} j\right) = 6\times 14 = 84.
\end{aligned}
$$

Exemplo 11

Sejam os vetores $x = (2, 5, 8)'$ e $y = (15, 11, 10, 12)'$, com $n = 3$ e $m = 4$ elementos, respectivamente.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j = (2\cdot 15 + 2\cdot 11 + 2\cdot 10 + 2\cdot 12) + (5\cdot 15 + 5\cdot 11 + 5\cdot 10 + 5\cdot 12) + (8\cdot 15 + 8\cdot 11 + 8\cdot 10 + 8\cdot 12)] = 720.$$

ou, usando *PS5*,

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{4} y_j\right) = (2 + 5 + 8)\cdot(15 + 11 + 10 + 12) = 15\cdot 48 = 720.$$

Exercícios

4. Seja $n = 3$ e $m = 4$. Calcule:

   (a) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i+j)$

   (b) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i\,j)$

   (c) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i/j)$

   (d) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{m}(i+j)$

   (e) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i\,j)$

5. Seja $x = (2,5,8)'$ e $y = (15,11,10,12)'$. Calcule:

   (a) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i y_j)$

   (b) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + x_j)$

   (c) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_i/x_i)$

   (d) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i x_j)$

   (e) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(x_i + x_j)$

   (f) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(x_i x_j)$

Alguns somatórios especiais

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. (Teorema binomial) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-1}b^i \setminus$ em que $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$.

Exercícios

4. Resolva utilizando as expressões dos somatórios especiais.

   (a) $\sum_{i=1}^{10} i$

   (b) $\sum_{i=1}^{20} i$

   (c) $\sum_{i=1}^{5} i^2$

   (d) $\sum_{i=1}^{10} i^2$

5. Expandir utilizando o Teorema Binomial

   (a) $(x+y)^2$

   (b) $(x+y)^4$

Produtório

O **produtório**, denotado pela letra grega $\prod$ (pi maiúsculo), é uma simbologia matemática para representar ***o produto*** de termos sucessivos de uma sequência.

Exemplo 12

O produto dos termos:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10,$$

pode ser representada, utilizando reticências, por:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10.$$

e um representação mais geral utiliza a notação de *produtório*:

$$\prod_{i=1}^{10} i$$

que é lida como "produtório de i, com i variando de 1 a 10", com termos análogos aos de somatório.

Desta forma, o produto dos n primeiros números naturais será:

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$$

Para um conjunto de valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o produtório é denotado por:

$$\prod_{i=1}^{n} y_i$$

Exemplo 13

Seja o vetor de $y' = (24, 27, 18, 30, 25)$

$$\prod_{i=1}^{5} y_i = 24 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 30 \cdot 25 = 8.748 \times 10^6$$

Algumas propriedades

- *PP1* O produtório pode ser decomposto

$$\prod_{i=1}^{n} y_i = \prod_{i=1}^{k} y_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} y_i \ , \quad k < n$$

Exemplo 14

Sejam os valores do **Exemplo 5** e $k = 3$

$$\prod_{i=1}^{5} y_i = \prod_{i=1}^{3} y_i \cdot \prod_{i=4}^{5} y_i = (24 \cdot 27 \cdot 18) \cdot (30 \cdot 25)$$

$\square$

- *PP2* Produtos com uma constante

$$\prod_{i=1}^{n} (ay_i) = ay_1 \cdot ay_2 \cdot \ldots \cdot ay_n = a^n (y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n) = a^n \prod_{i=1}^{n} y_i$$

Exemplo 15

Sejam os valores do **Exemplo 5** e $k = 3$

$$\prod_{i=1}^{5} 3y_i = 3y_1 \cdot 3y_2 \cdot 3y_3 \cdot 3y_4 \cdot 3y_5 = 3^5 (y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5) = 3^5 \prod_{i=1}^{5} y_i$$

$\square$

- *PP3* Produtório de uma constante

$$\prod_{i=1}^{n} C = C^n$$

Exemplo 16

$$\prod_{i=1}^{5} 4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$$

Atenção aos índices.

$$\prod_{i=3}^{5} 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

$\square$

- *PP5* Pelas propriedades associativas e comutativas tem-se que

$$\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)$$

- *PP6*

$$\prod_{i=1}^{n} y_i^a = \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^a$$

- *PP7* Relação com potência

$$\prod_{i=1}^{n} C^{y_i} = C^{\Sigma_{i=1}^{n} y_i}$$

Exemplo 17

Sejam os vetores $x = (1, 8, 5)'$ e $y = (15, 10, 12)'$, com $n = 3$ em cada um deles.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_j = (1 \cdot 15) \cdot (8 \cdot 10) \cdot (5 \cdot 12) = 7.2 \times 10^4.$$

ou, usando *PS6*,

$$\sum_{i=1}^{3} x_i y_j = (1 \cdot 8 \cdot 4) \cdot (15 \cdot 10 \cdot 12) = 7.2 \times 10^4.$$

Notação abreviada

Assim como em somatórios, para indicar o produto de todos os elementos de um vetor de valores podemos simplificar ou mesmo omitir os índices.

$$\prod_{i=1}^{n} y_i = \prod_{i} y_i = \prod y_i.$$

A simplificação também pode implicar que a expressão é válida para quaisquer limites do somatório. Por exemplo, as propriedades são válidas para quaisquer índices e podem ser escritas de formas equivalentes.

$$\prod_{i=1}^{n} a^{y_i} = a^{\Sigma_{i=1}^{n} y_i} \qquad \text{A igualdade é válida para } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\prod_{i=l}^{u} a^{y_i} = a^{\Sigma_{i=l}^{n} y_u} \qquad \text{e também é válida para } i = l, (l+1), \ldots, u,$$

$$\prod a^{y_i} = a^{\Sigma y_i} \qquad \text{e portanto válida para quaisquer limites.}$$

A simplificação deve ser usada com cautela e somente quando for implícito no contexto os valores dos índices do somatório.

- *PP8* Relação com logarítmos

Uma propriedade particularmente importante relaciona o produtório ao somatório através de logarítmos.

O logarítmo pode ser entendido como a solução de uma equação em que a variável é uma potência. Se

$$b^x = a,$$

então o valor de x que torna a equação verdadeira é o "logarítmo" de a na "base" b,

$$x = \log_b a.$$

Duas propriedades do logarítmos serão utilizadas aqui.

- *PL1* O logarítmo de um produto é a soma de logarítmos:

$$\log{(A \cdot B)} = \log A + \log B$$

- *PL2* É válida a igualdade

$$b^{\log_b a} = a.$$

  Ambos resultados são válidos para qualquer base dos logarítmos.

Por simplicidade e, sem perda de generalidade, vamos considerar aqui que estamos usando logarítmo *neperiano*, ou seja, $\log = \log_e = \ln$ de tal forma que:

$$\log a = x \longrightarrow e^x = a$$

e podemos denotar ainda na forma

$$\exp(x) = a.$$

Aplicando estes resultados temos que

$$A \cdot B = \exp\{\log(A \cdot B)\} = \exp\{\log(A) + \log(B)\}$$

E, de forma mais geral,

$$\prod_{i=1}^{n} y_i = \exp\{\log(\prod_{i=1}^{n} y_i)\} = \exp\{\sum_{i=1}^{n} \log(y_i)\} = \exp\{n\ \overline{\log(y_i)}\},$$

em que $\overline{\log y_i}$ é a média dos logarítmos dos dados y_i.

Exemplo 18

$\prod_{i=1}^{4} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \mathrm{e}^{log(1)} + \mathrm{e}^{log(2)} + \mathrm{e}^{log(3)} + \mathrm{e}^{log(4)} = \mathrm{e}^{(log(1)+log(2)+log(3)+log(4))} = \exp\{\sum_{i=1}^{4} \log(i)\} = 24$

Exercícios

6. Calcule os seguintes produtórios.

(a) $\prod_{i=2}^{6} i$
(b) $\prod_{i=1}^{5} \frac{1}{i}$
(c) $\prod_{i=1}^{10} (i+2)$
(d) $\prod_{i=3}^{5} 2i$
(e) $\prod_{i=2}^{5} i(i-1)$
(f) $\prod_{i=2}^{5} \frac{i}{(i-1)}$
(g) $\prod_{i=1}^{4} 2^i$

7. Calcule as expressões a seguir. (**OBS:** $\exp\{x\} = e^x$)

(a) $\exp\{\sum_{i=2}^{6} \log(i)\}$
(b) $\exp\{-\sum_{i=1}^{5} \log(i)\}$
(c) $\exp\{\sum_{i=1}^{10} \log(i+2)\}$
(d) $\exp\{\sum_{i=3}^{5} \log(2i)\}$
(e) $\exp\{3\log(2) + \sum_{i=3}^{5} \log(i)\}$
(f) $\exp\{\sum_{i=2}^{5} \log(i) + \sum_{i=2}^{5} \log(i-1)\}$
(g) $\exp\{\log(2) \cdot \sum_{i=1}^{4} i\}$
(h) $2^{\Sigma_{i=1}^{4} i}$
(i) $10^{\Sigma_{i=2}^{6} \log_{10} i}$
(j) $2^{\Sigma_{i=2}^{6} \log_{2} i}$

8. Seja um vetor de dados $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{10})$ de dimensão $n = 10$. Tem-se que $\sum_i y_i = 25$. Obtenha o valor numérico ou a expressão das quantidades a seguir.

(a) $\prod_{i=1}^{n} y_i$
(b) $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}$
(c) $\prod_i e^2 2^{y_i}$
(d) $\prod_i e^a a^{y_i}$
(e) $\prod_i a e^{-a\, y_i}$

Médias

Seja um vetor y de dados com elementos $y_1, y_2 \ldots y_n$.

1. A **média aritmética** (denotada por $\overline{y}$) é escrita utilizando a notação de somatório.

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

2. A **média harmônica** (denotada por $\overline{y_H}$) também é escrita utilizando a notação de somatório.

$$\overline{y_H} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/y_i} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^{-1}}{n}\right)^{-1} = \left(\overline{y^{-1}}\right)^{-1},$$

em que $\overline{y^{-1}}$ é a média dos inversos dos dados y_i.

3. A **média geométrica** (denotada por $\overline{y_G}$) também é definida por um produtório mas pode ser escrita utilizando a notação de somatório de logarítmos.

$$\overline{y_G} = \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i} = \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \ldots y_n} = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \log y_i}{n}\right) = \exp\left(\overline{\log y_i}\right),$$

em que $\overline{\log y_i}$ é a média dos logarítmos dos dados y_i.

Somatórios e Produtórios - Casos curiosos

1. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = \mathrm{e}$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$