Exercícios de Probabilidade

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Versão compilada em 13 de dezembro de 2018 às 17:08

1. Forneça exemplos que ilustrem situações nas quais probabilidades são avaliadas pelas definições: a) clássica, b) frequentista, c) subjetiva.

---

2. Três indivíduos tentam, de forma independente, resolver um problema. O primeiro tem 50% de chance de resolver, o segundo tem 65% e o terceiro tem 30%. Qual a probabilidade do problema ser resolvido?

Solução:

$$
\begin{aligned}
A &: \text{o primeiro resolve o problema} \quad P(A) = 0,50 \quad P(\overline{A}) = 0,50 \\
B &: \text{o segundo resolve o problema} \quad P(B) = 0,65 \quad P(\overline{B}) = 0,35 \\
C &: \text{o terceiro resolve o problema} \quad P(C) = 0,30 \quad P(\overline{C}) = 0,70
\end{aligned}
$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \overset{ind}{=} 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - (1 - 0,50)(1 - 0,65)(1 - 0,70) = 0,878$$

---

3. Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma das quatro questões do teste, cada uma com cinco alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

Solução:

$$
\begin{aligned}
A_i &: \text{acerta a } i\text{-ésima questão} \;\; i = 1, \ldots, 4 \\
\forall i \;\; P(A_i) &= 0,2 \;\; P(\overline{A}_i) = 0,8 \\
P(\text{acertar alguma}) &= 1 - P(\text{errar todas}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) \overset{ind}{=} 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4})) = \\
&= 1 - (0,8)^4 = 0,59
\end{aligned}
$$

---

4. Dentre seis números inteiros pares e oito ímpares, dois números são escolhidos ao acaso e multiplicados. Qual a probabilidade de que o produto seja par?

Solução:

Evento	$Par \cap Par$	$Par \cap Impar$	$Impar \cap Impar$	$Impar \cap Impar$
Produto	Par	Par	Par	$Impar$
Probabilidade	$\frac{6}{14}\frac{5}{13}$	$\frac{6}{14}\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}\frac{6}{13}$	$\frac{8}{14}\frac{7}{13}$

$$P[ProdutoPar] = 1 - P[ProdutoImpar] = 1 - \frac{8}{14}\frac{7}{13} = 0,692$$

---

5. Dois dados são lançados. Calcule a probabilidade de:

   (a) sairem dois números iguais,
   (b) o produto dos números que sairam ser ímpar,
   (c) o produto dos números que sairam ser ímpar ou a soma ser maior ou igual a 10,
   (d) a soma dos valores ser maior ou igual a sete, sabendo-se que em um dos dados saiu três,
   (e) a soma ser maior que sete sabendo que sairam dois números iguais.

Solução:

$$X_1 : \text{resultado do primeiro dado} \quad X_2 : \text{resultado do segundo dado}$$
$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots(6,6)\}(\text{equiprovável}) \quad n(\Omega) = 36$$

(a) $P[X_1 = X_2] = \frac{n(X_1=X_2)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = 0,167$

$$\text{evento } A : X_1 = X_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$P[A] = \frac{n(X_1 = X_2)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,167$$

(b)

$$\text{evento } B : X_1 \cdot X_2 \text{ é impar}\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$
$$P[B] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$$

(c)

$$\text{evento } C_1 : X_1 \cdot X_2 \text{ é imparidem B anterior}$$
$$\text{evento } C_2 : X_1 + X_2 \geq 10 = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$P[C_1 \cup C_2] = P[C_1] + P[C_2] - P[C_1 \cap C_2] = \frac{9}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = 0,389$$

(d) a soma dos valores ser maior ou igual a sete, sabendo-se que em um dos dados saiu três,

$$\text{evento } D_1 : X_1 + X_2 \geq 7$$
$$\{(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),$$
$$(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$P[D_1] = \frac{21}{36}$$
$$\text{evento } D_2 : X_1 = 3 \cup X_2 = 3$$
$$\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(1,3),(2,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$$
$$P[D_2] = \frac{11}{36}$$
$$P[D_1|D_2] = \frac{P[D_1 \cap D_2]}{P[D_2]} = \frac{6/36}{11/36} = \frac{6}{11} = 0,545$$

(e) a soma ser maior que sete sabendo que sairam dois números iguais.

$$\text{evento } E_1 : X_1 + X_2 \geq 7 (\text{mesmo que evento} D_1)$$
$$\text{evento } E_2 : X_1 = X_2 (\text{mesmo que evento} A)$$
$$P[E_1|E_2] = \frac{P[E_1 \cap E_2]}{P[E_2]} = \frac{3/36}{6/36} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

---

6. Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma das 5 questões, cada uma com quatro alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

Solução:

$$\begin{aligned}
A_i &: \text{acerta a } i\text{-ésima questão } \ i = 1, \ldots, 5 \\
P(A_i) &= 0,25 \ \ P(\overline{A_i}) = 0,75 \ \ \forall i \\
P(\text{acertar alguma}) &= 1 - P(\text{errar todas}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}) \stackrel{ind}{=} 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) \cdot P(\overline{A_5}) = \\
&= 1 - (0,75)^5 = 0,763
\end{aligned}$$

---

7. Um reservatório recebe água de três fontes diferentes. A primeira tem 5% de chance de apresentar alguma contaminação, a segunda tem 6,5% e a terceira tem 12%. Qual a probabilidade do reservatório ser contaminado?

Solução:
Evento $A:$ a água da primeira fonte é contaminada
Evento $B:$ a água da segunda fonte é contaminada
Evento $C:$ a água da terceira fonte é contaminada
Evento $R:$ o reservatório é contaminado
Dados:

$$P[A] = 0,05 \quad ; P[\overline{A}] = 0,95$$
$$P[B] = 0,065 \quad ; P[\overline{B}] = 0,935$$
$$P[C] = 0,12 \quad ; P[\overline{C}] = 0,88$$
$$P[R] = P[A \cup B \cup C] = 1 - P[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}] \stackrel{ind}{=} 1 - [\overline{A}] \cdot P[\overline{B}] \cdot P[\overline{C}] = 1 - 0.95 \cdot 0.935 \cdot 0.88 = 0,2183$$

---

8. Considere a seguinte situação.
Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma das cinco questões, cada uma com quatro alternativas, entre as quais apenas uma é correta. eseja-se saber a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão.

   (a) Indique como fica o espaço amostral do experimento (sem necessariamente listar todos os elementos).
   (b) Defina a variável aleatória (v.a) adequada ao interesse do problema.
   (c) Monte uma tabela com a distribuição de probabilidades desta variável
   (d) Caso possível identifique a distribuição de probabilidades desta variável e fornecendo a equação da função de probabilidades.
   (e) Mostre como obter a probabilidade solicitada a partir do resultado de alguns dos itens anteriores.

Solução:

(a) $\Omega = \{(\overline{AAAAA}), (\overline{AAAA}A), (\overline{AAA}A\overline{A}), \ldots (AAAA\overline{A}), (AAAAA)\}$
$n(\Omega) = 2^5 = 32$

(b) $X:$ número de acertos

(c)

x	0	1	2	3	4	5
$P[X = x]$	$(0,75)^5$ =0,2373	$\binom{5}{1}(0,25)^1(0,75)^4$ =0,3955	$\binom{5}{2}(0,25)^2(0,75)^3$ =0,2637	$\binom{5}{3}(0,25)^3(0,75)^2$ =0,08789	$\binom{5}{4}(0,25)^4(0,75)^1$ =0,01465	$(0,25)^5$ =0,0009766

(d) $X \sim B(n = 5, p = 0,25)$
$P[X = x] = \binom{5}{x}(0,25)^x(1 - 0,25)^{5-x}$

(e) $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{5}{0}(0,25)^0(1-0,25)^{5-0} = 0,763$

Solução computacional com o programa **R**:

```
> (probs <- dbinom(0:5, size=5, prob=0.25))

[1] 0,2373047 0,3955078 0,2636719 0,0878906 0,0146484 0,0009766

> (pbinom(0, size=5, prob=0.25, lower=FALSE))

[1] 0,7627
```

---

9. Nas situações a seguir (i) identifique a v.a., (ii) liste seus possíveis valores e (iii) forneça a expressão da função de probabilidades.

   (a) Sabe-se que a proporção de respondentes a um anúncio é de 5%. Vou verificar quantos acessos serão feitos sem obter resposta até que seja obtida a marca de 10 respondentes.

   (b) Vou escolher ao acaso 500 habitantes de Curitiba e verificar quantos sabem o nome do vice-prefeito(a) para estimar a proporção dos que conhecem.

   (c) Supondo que a proporção da população que possua um determinado tipo de sangue seja de 12%, vou verificar quantos doadores vou receber até conseguir um que tenha o tipo desejado.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} X &: \text{número de acessos não respondentes até obter } 10^o \text{ respondente} \\ x &\in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ X &\sim \text{BN}(k = 10, p = 0,05) \\ P[X = x] &= \binom{x + 10 - 1}{x}(0,05)^{10}(0,95)^x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} X &: \text{número que conhecem entre os 500 entrevistados} \\ x &\in \{0, 1, 2, \ldots 500\} \\ X &\sim \text{B}(n = 500, p) \\ P[X = x] &= \binom{500}{x}(p)^{10}(1-p)^x \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} X &: \text{número de doadores, até obter o que possui o tipo sangue desejado} \\ x &\in \{1, 2, \ldots\} \\ X &\sim \text{G}(p = 0,12) \\ P[X = x] &= (0,12)(1 - 0,12)^{x-1} \text{ ou} \\ X &: \text{número de doadores que não possuem o tipo de sangue desejado, até obter o que possui} \\ x &\in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ X &\sim \text{G}(p = 0,12) \\ P[X = x] &= (0,12)(1 - 0,12)^x \end{aligned}$$

---

10. Considere a seguinte situação.
Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma de quatro questões, cada uma com cinco alternativas da qual apenas uma é correta. Deseja-se saber qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão.

    (a) Indique como fica o espaço amostral do experimento (sem necessariamente listar todos os elementos).
    (b) Defina a variável aleatória (v.a) adequada ao interesse do problema.
    (c) Monte uma tabela com a distribuição de probabilidades desta variável
    (d) Caso possível identifique a distribuição de probabilidades desta variável e fornecendo a equação da distribuição.
    (e) Mostre como obter a probabilidade solicitada a partir do resultado de alguns dos itens anteriores.
    (f) Qual o valor esperado da v.a. ? Como este valor deve ser interpretado?

Solução:

(a) $\Omega = \{(\overline{AAAA}), (\overline{AAA}A), (\overline{AA}A\overline{A}), \ldots (AAA\overline{A}), (AAAA)\} \quad n(\Omega) = 2^4 = 16$

(b) X : número de acertos

(c)

x	0	1	2	3	4
$P[X = x]$	$(0,8)^4$ =0,4096	$\binom{4}{1}(0,2)^1(0,8)^3$ =0,4096	$\binom{4}{2}(0,2)^2(0,8)^2$ =0,1536	$\binom{4}{3}(0,2)^3(0,8)^2$ =0,0256	$(0,2)^4$ =0,0016

(d) $X \sim B(n = 4, p = 0,2)$
$P[X = x] = \binom{4}{x}(0,2)^x(1 - 0,8)^{4-x}$

(e) $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{4}{0}(0,2)^0(1 - 0,2)^{4-0} = 0,59$

(f) $E[X] = n \cdot p = 4 \cdot 0,2 = 0,8$. *Interpretação de* $E[X]$*...*

Solução computacional com o programa **R**:

```
> (probs <- dbinom(0:4, size=4, prob=0.2))

[1] 0,4096 0,4096 0,1536 0,0256 0,0016

> (pbinom(0, size=4, prob=0.2, lower=FALSE))

[1] 0,5904
```

---

11. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (a) Mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida.
    (b) Obtenha $P[0,5 < X < 1,5]$.
    (c) Obtenha $P[X > 1,2]$.
    (d) Obtenha $P[X > 1,2 | X > 0,5]$.
    (e) Obtenha o valor esperado de X.

Solução:

(a)

$$\text{Mostrar que: } f(x) \geq 0 \; \forall x \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\frac{3}{8}\frac{2^3 - 0^3}{3} = 1$$

a função acumulada $F(x)$ é dada por:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\frac{x^3 - 0^3}{3} = \frac{x^3}{8}$$

(b) $P[0,5 < X < 1,5] = \int_{0,5}^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = F(1,5) - F(0,5) = 0,406$

(c) $P[X > 1,2] = \int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(1,2) = 0,784$

(d) $P[X > 1,2 | X > 0,5] = \frac{\int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{0,5}^{2} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{1-F(1,2)}{1-F(0,5)} = 0,796$

(e)

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\frac{2^4 - 0^4}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

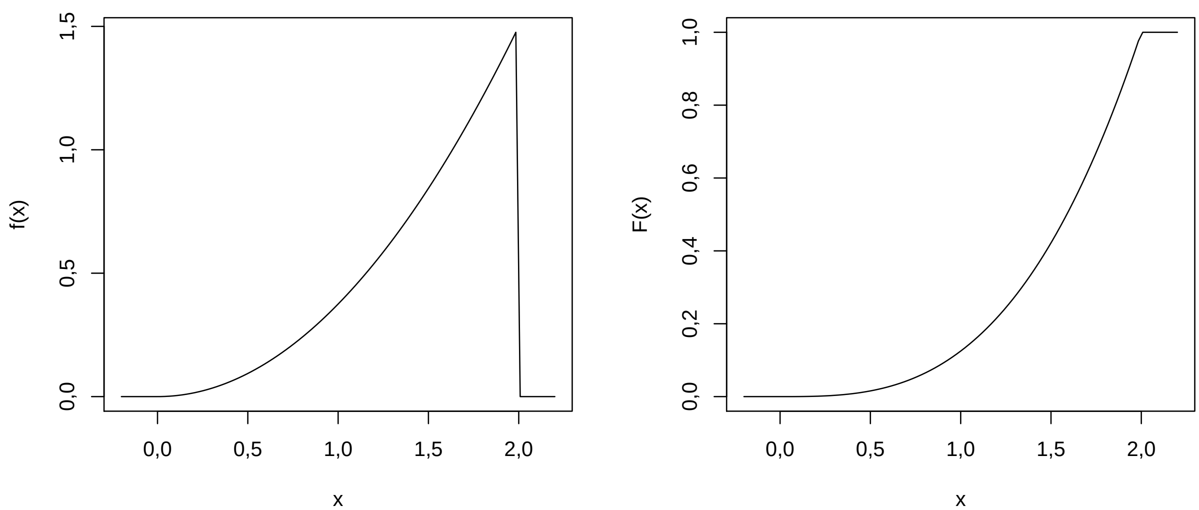


Figura 1: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição (direita).

Solução computacional com o programa *R*:

```
> require(MASS)
> ## a)
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, (3*x^2)/8, 0)
> integrate(fx, 0, 2)$value

[1] 1

> Fx <- function(x) ifelse(x>0, ifelse(x<=2, (x^3)/8,1), 0)
> Fx(2)

[1] 1
```

```
> ## b)
> integrate(fx, 0.5, 1.5)$value

[1] 0,4062

> Fx(1.5)-Fx(0.5)

[1] 0,4062

> ##c)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value

[1] 0,784

> 1-Fx(1.2)

[1] 0,784

> ## d)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value/integrate(fx, 0.5, 2)$value

[1] 0,7964

> (1-Fx(1.2))/(1-Fx(0.5))

[1] 0,7964

> ## e)
> efx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, x*(3*x^2)/8, 0)
> integrate(efx, 0, 2)$value

[1] 1,5
```

---

12. Seja uma v.a. contínua com função de distribuição de probabilidades (f.d.p) $f(x) = k(1 - x^2)\mathrm{I}_{(0,1]}(x)$, obtenha:

    (a) valor de k para que $f(x)$ seja uma f.d.p. válida,

    (b) a média de X,

    (c) a mediana de X,

    (d) a função de distribuição (acumulada) $F(x)$,

    (e) $P[X > 1/2]$,

    (f) $P[X < 0,75]$,

    (g) o primeiro quartil,

    (h) o terceiro quartil,

    (i) $P[0,25 < X < 0,75]$,

    (j) $P[X < 0,75|X > 0,5]$,

Solução:

(a)

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$$
$$k[(1-0)\frac{1}{3}(1^3-0^3)] = 1$$
$$k = \frac{3}{2}$$

(b)

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}[\frac{1}{2}(1^2-0^2) - \frac{1}{4}(1^4-0^4)] = \frac{3}{8} = 0,375$$

(c)

$$\int_0^{Md} f(x)\mathrm{d}x = 0,5$$
$$\frac{3}{2}[(Md-0) - \frac{1}{3}(Md^3-0^3)] = 0,5$$
$$Md = 0,347$$

(d) a função de distribuição (acumulada) $F(x)$,

$$F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}[(x-0) - \frac{1}{3}(x^3-0^3)] = \frac{1}{2}(3x-x^3)$$

(e)

$$P[X > 1/2] = \int_{1/2}^1 f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(1/2) = 0,312$$

(f)

$$P[X < 0,75] = \int_0^{0,75} f(x)\mathrm{d}x = F(0,75) = 0,914$$

(g)

$$\int_0^{Q_1} f(x)\mathrm{d}x = 0,25$$
$$\frac{3}{2}[(Q_1-0) - \frac{1}{3}(Q_1^3-0^3)] = 0,25$$
$$Q_1 = 0,168$$

(h)

$$\int_0^{Q_3} f(x)\mathrm{d}x = 0,75$$
$$\frac{3}{2}[(Q_3-0) - \frac{1}{3}(Q_3^3-0^3)] = 0,75$$
$$Q_3 = 0,558$$

(i)

$$P[0,25 < X < 0,75] = \int_{0,25}^{0,75} f(x)\mathrm{d}x = F(0,75) - F(0,25) = 0,547$$

(j)

$$P[X < 0,75|X > 0,5] = \frac{P[0,50 < X < 0,75]}{P[X > 0,50]} = \frac{\int_{0,50}^{0,75} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{0,50}^{1} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{F(0,75) - F(0,50)}{1 - F(0,50)} = 0,725$$

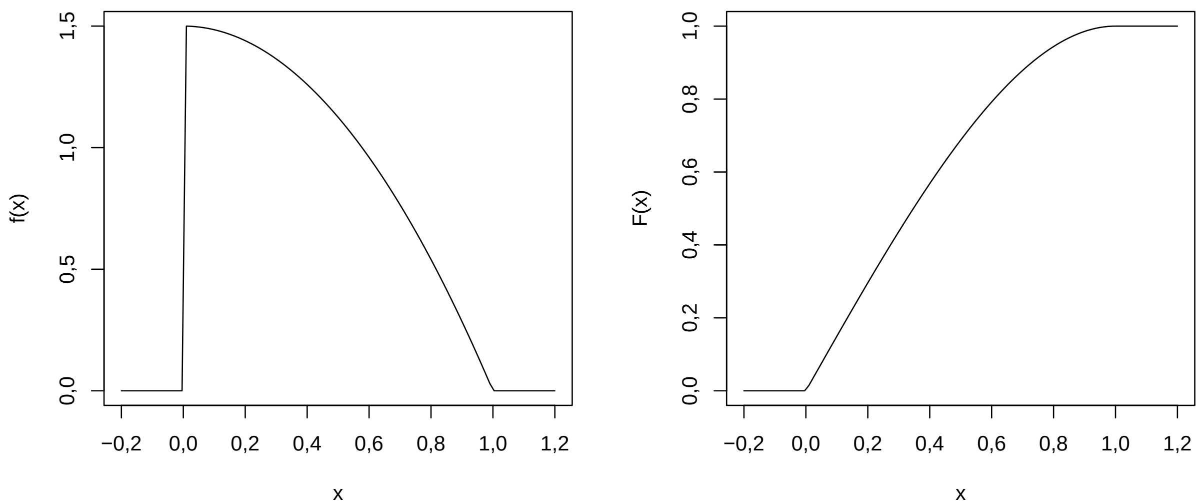


Figura 2: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição.

Solução computacional com o programa *R*:

```
> require(MASS)
> ## a)
> kfx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 1, (1-x^2), 0)
> fractions(1/integrate(kfx, 0, 1)$value)

[1] 3/2

> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 1, (3/2)*(1-x^2), 0)
> integrate(fx, 0, 1)$value

[1] 1

> ## b)
> Ex <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 1, x*fx(x), 0)
> ## c)
> Qx <- function(x, quantil) (integrate(fx, 0, x)$value - quantil)^2
> (md <- optimize(Qx, c(0,1), quantil=0.5)$min)

[1] 0,3473

> ## d)
> Fx <- function(x) ifelse(x>0, ifelse(x<=1, (3*x - x^3)/2,1), 0)
> Fx(1)

[1] 1

> ## e)
> 1-Fx(1/2)

[1] 0,3125

> ## f)
> Fx(0.75)

[1] 0,9141
```

```
> ## g)
> (q1 <- optimize(Qx, c(0,1), quantil=0.25)$min)
```

```
[1] 0,1683
```

```
> ## h)
> (q3 <- optimize(Qx, c(0,1), quantil=0.75)$min)
```

```
[1] 0,5579
```

```
> ## i)
> Fx(0.75) - Fx(0.25)
```

```
[1] 0,5469
```

```
> ## j)
> (Fx(0.75) - Fx(0.5))/(1-Fx(0.5))
```

```
[1] 0,725
```

Outra forma para quantis:

```
> require(rootSolve)
> quantil <- function(p){q <- Re(polyroot(c(2*p,-3,0,1)));q[q>0&q<=1]}
> quantil(0.25)
```

```
[1] 0,1683
```

```
> quantil(0.5)
```

```
[1] 0,3473
```

```
> quantil(0.75)
```

```
[1] 0,5579
```

---

13. Alguns biólogos fizeram estudos de laboratório sobre o comportamento de animais quando submetidos a um estímulo, o quais poderiam apresentar ou não resposta positiva. Em particular estavam interessados nas respostas positivas os estímulo. Considera-se que na população destes animais, 10% sejam sensíveis ao estímulo.

    O biologo A possuia um grupo em que 10 animais eram sensíveis e 20 eram insensíveis. Ele selecionou ao acaso 8 animais para teste.

    O biólogo B dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar o terceiro sensível ao estímulo.

    O biólogo C tomou fazia testes diários e encontrava uma média de 2,8 animais sensíveis a cada dia.

    O biólogo D submeteu 10 animais ao estímulo.

    O biólogo E dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar um sensível ao estímulo.

    (a) Qual a probabilidade do biólogo A encontrar ao menos 2 animais sensíveis?
    (b) Qual a probabilidade do biólogo B precisar testar no máximo 6 animais?
    (c) Qual a probabilidade do biólogo C encontrar menos que dois sensíveis em um determinado dia?
    (d) Qual a probabilidade do biólogo D encontrar mais que 3 animais sensíveis?
    (e) Qual a probabilidade do biólogo E precisar testar mais que 3 animais?

    Sugestão: especifique a(s) variável(eis) aleatória, sua(s) distribuição(ções) e suposições feitas.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
&X_a : \text{número de sensíveis entre os 8 selecionados}\\
&x_a \in \{0,1,2,\dots 8\}\\
&X_a \sim HG(N=30, K=10, n=8)\\
P[X_a = x] &= \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-x}}{\binom{30}{8}}\\
P[X_a \geq 2] &= 1 - P[X_a \leq 1] = 1 - (P[X_a = 0] + P[X_a = 1]) = 0,846
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&X_b : \text{número de não sensíveis examinados até encontrar o terceiro sensível}\\
&x_b \in \{0,1,\dots\}\\
&X_b \sim BN(k=3, p=0,1)\\
P[X_b = x] &= \binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x = \binom{x+2}{x} 0,1^3 0,9^x\\
P[X_b \leq 3] &= P[X_b = 0] + P[X_b = 1] + P[X_b = 2] + P[X_b = 3] = 0,016
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
&X_c : \text{número de sensíveis encontrados em um dia}\\
&x_c \in \{0,1,\dots\}\\
&X_c \sim P(\lambda = 2,8)\\
P[X_c = x] &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{\mathrm{e}^{-2,8} 2,8^x}{x!}\\
P[X_c < 2] &= P[X_c = 0] + P[X_c = 1] = 0,231
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
&X_d : \text{número de sensíveis entre os 10 examinados}\\
&x_d \in \{0,1,\dots 10\}\\
&X_d \sim B(n=10, p=0,1)\\
P[X_d = x] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{10}{x} 0,1^x 0,9^{10-x}\\
P[X_d > 3] &= 1 - P[X_d \leq 3] = 1 - (P[X_d = 0] + P[X_d = 1] + P[X_d = 2] + P[X_d = 3]) = 0,013
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
&X_e : \text{número de não sensíveis examinados até encontrar o primeiro sensível}\\
&x_e \in \{0,1,\dots\}\\
&X_e \sim G(p=0,1)\\
P[X_e = x] &= p(1-p)^x = 0,1 \cdot 0,9^x\\
P[X_e > 3] &= 1 - P[X_e \leq 3] = 1 - (P[X_e = 0] + P[X_e = 1] + P[X_e = 2] + P[X_e = 3]) = 0,656
\end{aligned}$$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> pa <- phyper(1, m=10, n=20, k=8, low=FALSE)
> pb <- pnbinom(3, size=3, prob=0.1)
> pc <- ppois(1, lambda=2.8)
> pd <- pbinom(3, size=10, prob=0.1, low=FALSE)
> pe <- pgeom(3,prob=0.1, low=FALSE)
```

14. Dois jogadores vão disputar as finais de um torneio e o campeão será o que vencer três partidas. Baseado no restrospecto dos resultados estima-se que a cada partida as probabilidades de vitória dos jogadores são 0,4 e 0,6. Calcule e/ou responda os itens a seguir.

    (a) Qual a probabilidade de haver mais que três jogos?
    (b) Quais as chances de cada jogador vencer o torneio?
    (c) Qual a probabilidade do jogador com menor chance vencer o torneio caso perca as duas primeiras partidas?
    (d) Qual a probabilidade do jogador com maior chance vencer caso tenha tido apenas uma vitória nas três primeiras partidas?
    (e) Qual(ais) as suposições feitas nos cálculos acima?

Solução:
Eventos e probabilidades:

$$A : \text{jogador A ganha o jogo} \quad B : \text{jogador B ganha o jogo}$$

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,6$$

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(A, A, A),\\ &(B, A, A, A), (A, B, A, A), (A, A, B, A),\\ &(B, B, A, A, A), (B, A, B, A, A), (B, A, A, B, A), (A, B, B, A, A), (A, B, A, B, A), (A, A, B, B, A)\\ &(A, A, B, B, B), (A, B, A, B, B), (A, B, B, A, B), (B, A, A, B, B), (B, A, B, A, B), (B, B, A, A, B)\\ &(A, B, B, B), (B, A, B, B), (B, B, A, B)\\ &(B, B, B)\}\end{aligned}$$

Entretanto o espaço amostral e probabilidades podem ser resumidas na tabela a seguir em que nA é o número de vitórias de A e nB é o número de vitórias de B.

nA	3	3	3	2	1	0
nB	0	1	2	3	3	3
Pr	$p_{3,0} = (0,4)^3$	$p_{3,1} = 3 \cdot 0,4^3 0,6^1$	$p_{3,2} = 6 \cdot 0,4^3 0,6^2$	$p_{2,3} = 6 \cdot 0,4^2 0,6^3$	$p_{1,3} = 3 \cdot 0,4^1 0,6^3$	$p_{0,3} = 0,6^3$

(a) $P(nA + nB > 3) = p_{3,1} + p_{3,2} + p_{2,3} + p_{1,3} = 1 - p_{4,0} - p_{0,4} = 1 - (0,4)^3 - (0,6)^3 = 0,72$

(b)

$$P(\text{A vencer}) = P(nA = 3) = p_{3,0} + p_{3,1} + p_{3,2} = 0,3174$$
$$P(\text{B vencer}) = P(nB = 3) = 1 - P(nA = 3) = 0,6826$$

(c)

$$P[nA = 3|(B, B, *)] =?$$
$$\Omega_1 = \{(B, B, A, A, A), (B, B, A, A, B), (B, B, A, B), (B, B, B)\}$$
$$P[nA = 3|(B, B, *)] = \frac{(0,4)^3(0,6)^2}{(0,4)^3(0,6)^2 + (0,4)^2(0,6)^3 + (0,4)^1(0,6)^3 + (0,6)^3} = 0,064$$

Alternativamente pode-se pensar que se A perdeu as duas primeiras precisa ganhar as três próximas partidas e portanto,

$$P[nA = 3|(B, B, *)] = (0,4)^3 = 0,064$$

(d)

$$\Omega_2 = \{(B, A, A, A), (A, B, A, A), (A, A, B, A), (B, A, A, B, A), (A, B, A, B, A),$$
$$(A, A, B, B, A), (A, A, B, B, B), (A, B, A, B, B), (B, A, A, B, B)\}$$
$$P = \frac{3(0,4)^2(0,6)^3}{3(0,4)^3(0,6)^1 + 3(0,4)^3(0,6)^2 + 3(0,4)^2(0,6)^3} = 0,36$$

Alternativamente pode-se pensar que B se perdeu as duas primeiras precisa ganhar as duas próximas partidas e portanto,

$$P[nB = 3|\text{ganhou 1 das 3 primeiras}] = (0,6)^2 = 0,36$$

(e)

---

15. Em um programa da regeneração são plantadas 10 mudas de uma determinada espécie em cada uma das unidades de manejo. A probabilidade de que qualquer muda complete dois anos de idade é de 0,20. Fazendo suposições necessárias, responda os itens a seguir.

    (a) Qual a probabilidade de uma unidade ter alguma planta com dois anos?

    (b) Quantas mudas deveriam plantadas para que a probabilidade de alguma planta completar dois anos seja superior a 0,99 ?

    (c) Qual deveria ser a probabilidade de cada muda completar dois anos para que a probabilidade da unidade ter alguma muda fosse superior a 0,95?

    (d) Descreva e discuta as suposições feitas para resolver o problema indicando situações em que elas poderiam ser inválidas.

Solução:

$$\begin{aligned} \text{Evento } P_i:&\ \text{a i-ésima planta completa 2 anos} \quad P[P_i] = 0,2 = P[P] \longrightarrow P[\overline{P}_i] = 0,8 = P[\overline{P}] \\ \text{Evento } C:&\ \text{a unidade tem ao menos 1 planta após 2 anos} \end{aligned}$$

(a) $P[C] = 1 - P[\overline{C}] = 1 - P[\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \ldots \cap \overline{P}_{10}] = 1 - \prod_{i=1}^{10} P[\overline{P}_i] = 1 - P[\overline{P}]^{10} = 1 - 0,8^{10} = 0,893$

(b) $P[C] > 0,99 \longrightarrow 1 - 0,8^n > 0,99 \longrightarrow 0,8^n < 0,01 \longrightarrow n \geq \frac{\log(0,01)}{\log(0,80)} = 21$

(c) $P[C] > 0,95 \longrightarrow 1 - P[\overline{P}]^{10} > 0,95 \longrightarrow P[\overline{P}]^{10} < 0,05 \longrightarrow P[\overline{P}] < (0,05)^{1/10} = 0,74 \longrightarrow P[P] = 0,26$

(d)

---

16. Um biólogo percorre uma trilha de 5 km procurando avistar um exemplar de uma determinada ave. A chance de avistar a ave durante uma passada no percurso é de 25% e constante em todo o percurso.

    (a) Qual a probabilidade avistar a ave e que seja nos primeiros 2 km do percurso?

    (b) Se ele avista a ave, qual a probabilidade de que seja nos últimos 500 metros do percurso?

    (c) Se ele avista a ave, qual a probabilidade de que seja no primeiro ou último quilometro do percurso?

    (d) Se ele avistou a ave e sabe-se que não foi nos primeiros 2 km qual a probabilidade de que tenha sido nos últimos 1.500 metros do percurso?

    (e) É adotada a seguinte classificação para uma campanha: A: ave avistada nos primeiros 1.500 metros; B: ave avistada entre 1.500 e 4.000 metros; C: ave avistada nos últimos 1.000 metros; X: ave não avistada. Monte a distribuição de probabilidades da classificação da campanha.

Solução:

$$\begin{gathered} A: \text{a ave é vista} \quad P[A] = 0,25 \\ X: \text{posição na qual a ave é avistada} \\ X|A \sim U_c[0,5] \\ f(x|A) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5}\mathrm{I}_{[0,5]}(x) \qquad F(x) = \frac{x-0}{5-0} = \frac{x}{5} \end{gathered}$$

(a) $P[A \cap X < 2] = P[A] \cdot P[X < 2|A] = 0,25 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10} = 0,1$

(b) $P[X > 4,5|A] = \frac{0,5}{5} = \frac{1}{10} = 0,1$

(c) $P[X < 1 \cup X > 4|A] = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$

(d) $P[X > 3,5|A \cap X > 2] = \frac{\frac{5-3,5}{5}}{\frac{5-2}{5}} = \frac{1}{2} = 0,5$

(e)

$$Y \sim \text{classificação da campanha} \quad y \in \{A, B, C, X\}$$

y	A	B	C	X
$P[Y=y]$	$P[A \cap X < 1,5]$	$P[A \cap 1,5 < X < 4]$	$P[A \cap X > 4]$	$P[\overline{A}]$
$P[Y=y]$	$P[A] \cdot P[X < 1,5\|A]$	$P[A] \cdot P[1,5 < X < 4\|A]$	$P[A] \cdot P[X > 4\|A]$	$P[\overline{A}]$
$P[Y=y]$	$0,25 \cdot 1,5/5 = 0,075$	$0,25 \cdot 2,5/5 = 0,125$	$0,25 \cdot 1/5 = 0,05$	0,75

---

17. Assume-se que o tempo entre acessos a um blog tem uma distribuição com média de 1,5 segundos. Assumindo alguma distribuição responda os itens a seguir.

(a) Qual a probabilidade de haver duas conexões com intervalo inferior a 1,5 segundos?

(b) Qual a probabilidade de se passarem 5 segundos sem conexão alguma?

(c) Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade da próxima conexão ocorrer entre 0,5 e 2,5 segundos?

(d) Se já se passou 1 segundo sem conexão, qual a probabilidade de se passar mais 0,5 segundos adicionais sem conexão?

(e) Qual a probabilidade do intervalo entre conexões não superar 3,5 segundos se já se passaram 2 segundos sem conexão?

Solução:
Não se especificou a distribuição e vamos assumir a distribuição exponencial considerando: (i) que devem ser valores positivos, (ii) pela possibilidade de cálculos com as informações fornecidas.

$$X : \text{intervalo de tempo entre conexões (segundos)}$$
$$X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/1,5 = 2/3)$$
$$f(x) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2x/3}\ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x) \qquad F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x/3}$$

(a) $P[X < 1,5] = \int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = F(1,5) = 0,63$

(b) $P[X > 5] = \int_5^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(5) = 0,036$

(c) $P[X < 0,5] = \int_{0,5}^{2,5} f(x)\mathrm{d}x = F(2,5) - F(0,5) = 0,53$

(d) $P[X > 1,5|X > 1] = \frac{\int_{1,5}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x}{\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} =$ [1] $P[X > 0,5] = 1 - F(0,5) = 0,72$

(e) $P[X < 3,5|X > 2] = \frac{\int_2^{3,5} f(x)\mathrm{d}x}{\int_2^{3,5} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{F(3,5)-F(2)}{1-F(2)} =$ [1] $P[X < 1,5] = F(1,5) = 0,63$

Solução computacional com o programa *R*:

```
> (pa <- pexp(1.5, rate=2/3))

[1] 0,6321

> (pb <- pexp(5, rate=2/3, lower=F))

[1] 0,03567

> (pc <- diff(pexp(c(0.5,2.5), rate=2/3)))

[1] 0,5277

> (pd <- pexp(0.5, rate=2/3, lower=F))
```

[1] propriedade de falta de memória da exponencial

```
[1] 0,7165
> (pe <- pexp(1.5, rate=2/3))
[1] 0,6321
```

---

18. Dois jogadores vão disputar as finais de um torneio e o campeão será o que vencer quatro partidas. Baseado no restrospecto dos resultados estima-se que a cada partida as probabilidades de vitória dos jogadores são 0,4 e 0,6. Calcule e/ou responda os itens a seguir.

    (a) Qual a probabilidade de haver mais que quatro jogos?
    (b) Quais as chances de cada jogador vencer o torneio?
    (c) Qual a probabilidade do jogador com menor chance vencer o torneio caso perca as duas primeiras partidas?
    (d) Qual a probabilidade do jogador com maior chance vencer caso tenha tido apenas uma vitória nas quatro primeiras partidas?
    (e) Qual(ais) as suposições feitas nos cálculos acima?

Solução:
Eventos e probabilidades:

$$A : \text{jogador A ganha o jogo} \quad B : \text{jogador B ganha o jogo}$$

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,6$$

$$\begin{aligned}
\Omega = \{&(A, A, A, A),\\
&(B, A, A, A, A), (A, B, A, A, A), (A, A, B, A, A), (A, A, A, B, A),\\
&(B, B, A, A, A, A), (B, A, B, A, A, A), (B, A, A, B, A, A), (B, A, A, A, B, A), (A, B, B, A, A, A),\\
&(A, B, A, B, A, A), (A, B, A, A, B, A), (A, A, B, B, A, A), (A, A, B, A, B, A), (A, A, A, B, B, A),\\
&(B, B, B, A, A, A, A), (B, B, A, B, A, A, A), (B, B, A, A, B, A, A), (B, B, A, A, A, B, A), (B, A, B, B, A, A, A),\\
&(B, A, B, A, B, A, A), (B, A, B, A, A, B, A), (B, A, A, B, B, A, A), (B, A, A, B, A, B, A), (B, A, A, A, B, B, A),\\
&(A, B, B, B, A, A, A), (A, B, B, A, B, A, A), (A, B, B, A, A, B, A), (A, B, A, B, B, A, A), (A, B, A, B, A, B, A),\\
&(A, B, A, A, B, B, A), (A, A, B, B, B, A, A), (A, A, B, B, A, B, A), (A, A, B, A, B, B, A), (A, A, A, B, B, B, A),\\
&(A, A, A, B, B, B, B), (A, A, B, A, B, B, B), (A, A, B, B, A, B, B), (A, A, B, B, B, A, B), (A, B, A, A, B, B, B),\\
&(A, B, A, B, A, B, B), (A, B, A, B, B, A, B), (A, B, B, A, A, B, B), (A, B, B, A, B, A, B), (A, B, B, B, A, A, B),\\
&(B, A, A, A, B, B, B), (B, A, A, B, A, B, B), (B, A, A, B, B, A, B), (B, A, B, A, A, B, B), (B, A, B, A, B, A, B),\\
&(B, A, B, B, A, A, B), (B, B, A, A, A, B, B), (B, B, A, A, B, A, B), (B, B, A, B, A, A, B), (B, B, B, A, A, A, B),\\
&(A, A, B, B, B, A), (A, B, A, B, B, B), (A, B, B, A, B, B), (A, B, B, B, A, B), (B, A, A, B, B, B),\\
&(B, A, B, A, B, B), (B, A, B, B, A, B), (B, B, A, A, B, B), (B, B, A, B, A, B), (B, B, B, A, A, B),\\
&(A, B, B, B, B), (B, A, B, B, B), (B, B, A, B, B), (B, B, B, A, B),\\
&(B, B, B, B)\}
\end{aligned}$$

Entretanto o espaço amostral e probabilidades podem ser resumidas na tabela a seguir em que nA é o número de vitórias de A e nB é o número de vitórias de B.

nA	4	4	4	4	3	2	1	0
nB	0	1	2	3	4	4	4	4
Pr	$p_{4,0} = (0,4)^4$	$p_{4,1} = 4 \cdot 0,4^4 0,6^1$	$p_{4,2} = 10 \cdot 0,4^4 0,6^2$	$p_{4,3} = 20 \cdot 0,4^4 0,6^3$	$p_{3,4} = 20 \cdot 0,4^3 0,6^4$	$p_{2,4} = 10 \cdot 0,4^2 0,6^4$	$p_{1,4} = 4 \cdot 0,4^1 0,6^4$	$p_{0,4} = 0,6^4$

(a) $P(nA + nB > 4) = p_{4,1} + p_{4,2} + p_{4,3} + p_{3,4} + p_{2,4} + p_{1,4} = 1 - p_{4,0} - p_{0,4} = 1 - (0,4)^4 - (0,6)^4 = 0,8448$

(b)

$$P(\text{A vencer}) = P(nA = 4) = p_{4,0} + p_{4,1} + p_{4,2} + p_{4,3} = 0,2898$$
$$P(\text{B vencer}) = P(nB = 4) = 1 - P(nA = 4) = 0,7102$$

(c)

$$P[nA = 4|(B, B, *)] =?$$
$$\Omega_1 = \{(B, B, A, A, A, A), (B, B, B, A, A, A, A), (B, B, A, B, A, A, A), (B, B, A, A, B, A, A), (B, B, A, A, A, B, A), (B, B, A, A, A, B, B), (B, B, A, A, B, A, B), (B, B, A, B, A, A, B), (B, B, B, A, A, A, B), (B, B, A, A, B, B), (B, B, A, B, A, B), (B, B, B, A, A, B), (B, B, A, B, B), (B, B, B, A, B), (B, B, B, B)\}$$
$$P[nA = 4|(B, B, *)] = \frac{(0,4)^4(0,6)^2 + 4(0,4)^4(0,6)^3}{(0,4)^4(0,6)^2 + 4(0,4)^4(0,6)^3 + 4(0,4)^3(0,6)^4 + 3(0,4)^2(0,6)^4 + 2(0,4)^1(0,6)^4 + (0,6)^4} = 0,087$$

Solução alternativa pode ser obtida pensando-se diretamente no espeço mamostra restrito ao fato de que B venceu os dois primeiros jogos. Neste caso os resultados serão entre B, B, A, A, A, A e $B, B, *, *, *, *, *$ e neste último caso A deve ganhar 4 dentre os 5 jogos e lembrando que B, B, A, A, A, A, B não é possível. Portanto a probabilidade será:

$$P = 0,4^4 + 4 \cdot 0.4^4 0.6 = 0,08704$$

(d)

$$\Omega_2 = \{(B, A, A, A, A), (A, B, A, A, A), (A, A, B, A, A), (A, A, A, B, A), (B, A, A, A, B, A), (A, B, A, A, B, A), (A, A, B, A, B, A), (A, A, A, B, B, A), (B, A, A, A, B, B, A), (A, B, A, A, B, B, A), (A, A, B, A, B, B, A), (A, A, A, B, B, B, A), (A, A, A, B, B, B, B), (A, A, B, A, B, B, B), (A, B, A, A, B, B, B), (B, A, A, A, B, B, B)\}$$
$$P = \frac{4(0,4)^3(0,6)^4}{4(0,4)^4(0,6)^1 + 4(0,4)^4(0,6)^2 + 4(0,4)^4(0,6)^3 + 4(0,4)^3(0,6)^4} = 0,216$$

Alternativamente pode-se pensar que se B perdeu três das quatro primeiras precisa ganhar as três próximas partidas e portanto,

$$P[nB = 4|\text{B teve 1 vitória nas 4 primeiras partidas}] = (0,6)^3 = 0,216$$

(e)

---

19. Para fins de segurança de preservação, são feitas cinco cópias de uma biblioteca de arquivos de imagens. A probabilidade de que qualquer cópia seja corrompida durante um certo intervalo de tempo é de 0,01.

(a) Qual a probabilidade da biblioteca ser perdida durante o período?
(b) Qual deveria ser a probabilidade individual de cada cópia ser corrompida para que a probabilidade de perda da biblioteca não ultrapassasse 0,001?
(c) Quantas cópias deveriam ser feitas para que a probabilidade de falha não ultrapassasse 0,001 caso sejam mantidas as probabilidades individuais de falha de 0,01.
(d) Descreva e discuta as suposições feitas para resolver o problema indicando situações em que elas poderiam ser inválidas.

Solução:

$$\text{Evento } F_i: \text{ falha da i-ésima cópia} \quad P[F_i] = 0,01 = P[F] \longrightarrow P[\overline{F}_i] = 0,99$$
$$\text{Evento } M: \text{ perda da biblioteca}$$

(a) $P[M] = P[F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_5] \prod_{i=1}^{5} P[F_i] = P[F]^5 = 0,01^5$

(b) $P[M] < 0,001 \longrightarrow P[F]^5 < 0,001 \longrightarrow P[F] < (0,001)^{1/5} = 0,25119$

(c) $P[M] < 0,001 \longrightarrow (0,01)^n < 0,001 \longrightarrow n > \frac{\log(0,001)}{\log(0,01)} = 2$

(d)

---

20. Um *site* de vendas pela internet registra 40% dos acessos do estado do PR, 50% de outros estados e 10% do exterior. 20% dos acessos do PR resultam em uma compra, enquanto que os percentuais para outros estados e exterior são de 10% e 30%, respectivamente.

    (a) Qual a probabilidade de um acesso resultar em compra?

    (b) Se foi feita uma compra, qual a probabilidade de ela ter sido do exterior?

Solução:
Eventos:

$$PR: \text{acesso do PR} \quad OE: \text{acesso de outros estados} \quad EX: \text{acesso do exterior}$$

$$C: \text{compra}$$

Probabilidades informadas:

$$P[PR] = 0,40 \quad P[OE] = 0,50 \quad P[EX] = 0,10$$

$$P[C|PR] = 0,20 \quad P[C|OE] = 0,10 \quad P[C|EX] = 0,30$$

(a) $P[C] = P[PR \cap C] + P[OE \cap C] + P[EX \cap C] = P[PR] \cdot P[C|PR] + P[OE] \cdot P[C|OE] + P[EX] \cdot P[C|EX] = (0,40)(0,20) + (0,50)(0,10) + (0,10)(0,30) = 0,16$

(b) $P[EX|C] = \frac{P[EX \cap C]}{P[C]} = \frac{P[EX] \cdot P[C|EX]}{P[C]} = \frac{(0,10)(0,30)}{(0,40)(0,20)+(0,50)(0,10)+(0,10)(0,30)} = 0,1875$

---

21. Uma urna contém doze bolas brancas e oito bolas vermelhas. Serão retiradas, sequencialmente, três bolas da urna. A cada bola anota-se a cor e, se a bola for vermelha ela é retornada à urna e se for branca ela é posta de lado.

    (a) Forneça o espaço amostral do experimento.

    (b) Calcule probabilidade de cada elemento do espaço amostral.

    (c) Qual a probabilidade de não se obter todas as bolas da mesma cor?

    (d) Qual a probabilidade de se retirar ao menos duas bolas brancas?

    (e) Qual a probabilidade de retirar três vermelhas sabendo-se que ao menos uma das bolas é vermelha?

    (f) Se a primeira bola for branca, qual a probabilidade de obter três bolas brancas?

Solução:

(a) $\Omega = \{(B,B,B), (B,B,V), (B,V,B), (V,B,B), (B,V,V), (V,B,V), (V,V,B), (V,V,V)\}$

(b)

Evento	(B,B,B)	(B,B,V)	(B,V,B)	(B,B,V)	(B,V,V)	(V,B,V)	(V,V,B)	(V,V,V)
Probabilidade	$\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}$	$\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18}$	$\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{11}{19}$	$\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{8}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{8}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{12}{20}$	$\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20}$

(c) $P = 1 - P[(B,B,B)] - P[(V,V,V)] = 1 - \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18} - \frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20} = 0,743$

(d) $P = P[(B,B,B)] + P[(B,B,V)] + P[(B,V,B)] + P[(V,B,B)] = \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18} + \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18} + \frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19} + \frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{11}{19} = 0,6326$

(e) $P = \frac{P[(V,V,V)]}{1-P[(B,B,B)]} = \frac{\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20}}{1-\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}} = 0,0793$

(f) $P = \frac{P[(B,B,B)]}{P[(B,B,B)]+P[(B,B,V)]+P[(B,V,B)]+P[(B,V,V)]} = \frac{\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}}{\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}+\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18}+\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19}+\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{8}{19}} = 0,3216$

---

22. Um candidato está fazendo uma prova de múltipla escolha com cinco alternativas das quais apenas uma é correta. A chance do candidato saber a solução de uma questão é de 40%. Quando ele sabe a solução ele sempre acerta a questão e quando não sabe ele escolhe uma das respostas ao acaso. Se o candidato acerta a questão, qual a probabilidade de ele saber resolver a questão?

Solução:
Evento S : o candidato sabe a questão
Evento $\overline{S}$: o candidato sabe a questão
Evento A : o candidato acerta a questão
Evento $\overline{A}$: o candidato acerta a questão
Dados:

$$\begin{aligned}
P[S] &= 0,40 \quad ; P[\overline{S}] = 0,60 \\
P[A|S] &= 1,00 \quad ; P[\overline{A}|S] = 0,00 \\
P[S] &= 0,40 \quad ; P[\overline{S}] = 0,60 \\
P[A|\overline{S}] &= 0,20 \quad ; P[\overline{A}|\overline{S}] = 0,80 \\
P[S|A] &= ? \\
P[S|A] &= \frac{P[S \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|S] \cdot P[S]}{P[A|S] \cdot P[S] + P[A|\overline{S}] \cdot P[\overline{S}]} = \frac{1 \cdot 0,40}{(1 \cdot 0,40) + (0,20 \cdot 0,60)} = \frac{0,40}{0,52} = 0,769
\end{aligned}$$

---

23. Estamos interessados nos tempos de processamento para um certo procedimento de tratamento de imagens. O algoritmo de tratamento e classificação das imagens funciona em dois estágios. O primeiro estágio é realizado em 20 segundos e a experiência mostra que a classificação é encerrada nesse estágio para 25% das imagens. As demais são processadas em um segundo estágio e destas, o processamento de 80% delas é encerrado com mais 30 segundos e 60 segundos para as restantes.

    Defina a variável aleatória (v.a.), forneça sua distribuição de probabilidades, a esperança e a variância da v.a. Informe ainda o tempo que espera-se gastar no processamento de 1500 imagens.

Solução:

Eventos e espaço amostral:

$$\begin{aligned}
A &: \text{Classifica no primeiro estágio} \\
\overline{A} &: \text{Não classifica no primeiro estágio} \\
B &: \text{Classifica em 30 seg no segundo estágio} \\
\overline{B} &: \text{Classifica em 60 segundos no segundo estágio} \\
\Omega &= \{(A), (\overline{A}, B), (\overline{A}, \overline{B})\}
\end{aligned}$$

Dados:

$$\begin{aligned}
P[A] &= 0,25 \quad P[B|\overline{A}] = 0,80 \\
P[\overline{A}] &= 0,75 \quad P[\overline{B}|\overline{A}] = 0,20 \\
P[B \cap \overline{A}] &= P[B|\overline{A}]P[\overline{A}] = 0,80 \cdot 0,75 = 0,60 \\
P[\overline{B} \cap \overline{A}] &= P[\overline{B}|\overline{A}]P[\overline{A}] = 0,20 \cdot 0,75 = 0,15 \\
X &: \text{tempo de processamento (s)} \\
x &\in \{20, 50, 80\}
\end{aligned}$$

Evento	(A)	$(\overline{A}, B)$	$(\overline{A}, \overline{B})$
x	20	50	80
P[X=x]	$0,25$	$0,60$	$0,15$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum x \cdot P[X = x] = \\
&= 20(0,25) + 50(0,60) + 80(0,15) = 47s \\
\mathrm{Var}(X) &= \sum (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P[X = x] = \\
&= (20 - \mathrm{E}(X))^2(0,25) + (50 - \mathrm{E}(X))^2(0,60) + (80 - \mathrm{E}(X))^2(0,15) = 351s^2 \\
T &= 1500 \cdot \mathrm{E}(X) = 70500s = 19,58hr(\text{tempo para processamento de 1500 imagens})
\end{aligned}$$

---

24. Um sistema de climatização e refrigeração funciona continuamente e pode ocorrer uma interrupção a qualquer instante do dia com igual probabilidade. Supondo que vai haver uma interrupção (falha),

(a) qual a probabilidade de ocorrer a falha no período da noite, entre 20:00 e 6:00?

(b) Qual a probabilidade de ocorrer a falha nos horários de pico de uso entre 9:00-12:00 ou 14:00-17:30?

(c) Se houve falha na primeira metade do dia, qual a probabilidade de que tenha sido no horário comercial entre 8:30-12:00?

(d) Se houve uma falha fora do horário comercial de 9:00-18:00, qual a probabilidade de que tenha sido de madrugada entre 0:00-5:00

(e) Os custos de reparo variam em função do horário do dia. É de R$ 200,00 se a falha é notificada entre 9:00-17:30, R$ 250,00 se a falha é notificada entre 6:00-9:00 ou 17:30-20:00 e R$350,00 para outros horários do dia. Qual o valor esperado para o pagamento de 100 reparos?

Solução:

$$X : \text{horário da falha/interrupção}$$
$$X \sim U_c[0{:}00, 24{:}00]$$
$$f(x) = \frac{1}{24-0} = \frac{1}{24}\mathrm{I}_{[0,24]}(x) \qquad F(x) = \frac{x-0}{24-0} = \frac{x}{24}$$

(a) $P[20{:}00 < X < 24{:}00] + P[0{:}00 < X < 6{:}00] = \frac{4}{24} + \frac{6}{24} = \frac{10}{24} = 0,42$

(b) $P[9{:}00 < X < 12{:}00] + P[14{:}00 < X < 17{:}30] = \frac{3}{24} + \frac{3,5}{24} = \frac{6,5}{24} = 0,27$

(c) $P[8{:}30 < X < 12{:}00 | X < 12{:}00] = \frac{3,5/24}{12/24} = \frac{3,5}{12} = 0,29$

(d) $P[0{:}00 < X < 5{:}00 | (0{:}00 < X < 9{:}00) \cup (18{:}00 < X < 24{:}00)] = \frac{5/24}{(9/24)+(6/24)} = \frac{5}{15} = 0,33$

(e)

$$Y \sim \text{custo do reparo} \quad y \in \{200, 250, 350\}$$

y	200,00	250,00	350,00
$P[Y=y]$	$P[9{:}00 < X < 17{:}30]$	$P[(6{:}00 < X < 9{:}00) \cup (17{:}30 < X < 20{:}00)]$	$P[(0{:}00 < X < 6{:}00) \cup (20{:}00 < X < 24{:}00)]$
$P[Y=y]$	$\frac{8,5}{24}$	$\frac{5,5}{24}$	$\frac{10}{24}$

$$100 \cdot \mathrm{E}[Y] = 100(200 \cdot \frac{8,5}{24} + 250 \cdot \frac{5,5}{24} + 350 \cdot \frac{10}{24}) = R\$27.395,83$$

---

25. Assume-se que o tempo entre conexões a um servidor tem distribuição com média de 2,5 segundos.

(a) Qual a probabilidade de se passarem 10 segundos sem conexão alguma?

(b) Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade de a próxima conexão não ocorrer antes de 1,5 segundos?

(c) Qual a probabilidade do intervalo entre duas conexões ultrapassar 4 segundos?

(d) Se já se passaram 2 segundos sem conexão, qual a probabilidade de se passaram mais 4 segundos adicionais sem conexão?

(e) Qual a probabilidade do intervalo entre conexões superar 4 segundos se já se passaram 2,5 segundos sem conexão?

Solução:
Não se especificou a distribuição e vamos assumir a distribuição exponencial considerando: (i) que devem ser valores positivos, (ii) pela possibilidade de cálculos com as informações fornecidas.

$$X : \text{intervalo de tempo entre conexões (segundos)}$$
$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1/2,5 = 2/5)$$
$$f(x) = \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2x/5} \ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x) \qquad F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x/5}$$

(a) $P[X > 10] = \int_{10}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(10) = 0,0183$

(b) $P[X > 1,5] = \int_{1,4}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(1,5) = 0,549$

(c) $P[X > 4] = \int_{4}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(4) = 0,0000454$

(d) $P[X > 6|X > 2] = \frac{\int_6^{\infty} f(x)\mathrm{d}x}{\int_2^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} \stackrel{2}{=} P[X > 4] = 1 - F(4) = 0,202$

(e) $P[X > 4|X > 2,5] = \frac{\int_4^{\infty} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{2,5}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} \stackrel{2}{=} P[X > 1,5] = 1 - F(1,5) = 0,549$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> (pa <- pexp(10, rate=2/5, low=FALSE))

[1] 0,01832

> (pb <- pexp(1.5, rate=2/5, low=FALSE))

[1] 0,5488

> (pc <- pexp(4, rate=2.5, low=FALSE))

[1] 4,54e-05

> (pd <- pexp(4, rate=2/5, low=FALSE))

[1] 0,2019

> (pe <- pexp(1.5, rate=2/5, low=FALSE))

[1] 0,5488
```

---

26. Seja uma variável aleatória X (v.a.) com função de densidade de probabilidade (f.d.p.) dada por:

$$f(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p..

(b) Obtenha o valor esperado de X.

(c) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(x)$

(d) Obtenha $P[X > 1]$.

(e) Obtenha $P[X < 1,5|X > 1]$.

(f) Obtenha $P[X < 0.25 \text{ ou } X > 0,75]$.

Seja ainda Y uma outra v.a. definida a partir da variável X anterior tal que:

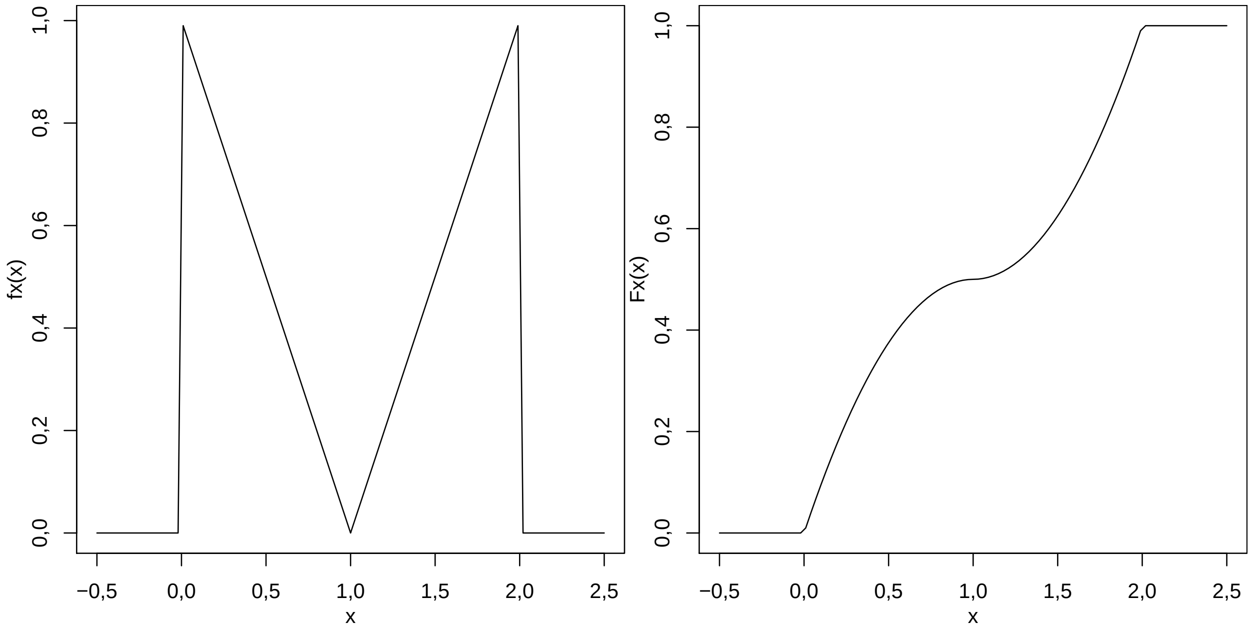
$$Y = \begin{cases} 200 & \text{se } x \leq 0,25 \\ 500 & \text{se } 0,25 < x \leq 0,75 \\ 1000 & \text{se } x > 0,75 \end{cases}$$

(g) Obtenha a função de probabilidade Y.

(h) Obtenha o valor esperado de Y.

(i) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(y)$

(j) Obtenha $P[Y = 1000|Y \geq 500]$.



Solução:

(a) Mostrar que $f(x) \geq 0 \; \forall x$ e que $\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x = 1$.
Notar que:

$$f(x) = |1-x| I_{(0,2)}(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} = \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) $E[X] = \int_0^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x) \mathrm{d}x + \int_1^2 x(x-1) \mathrm{d}x \ldots = 1$

(c)

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 1 - x \mathrm{d}x = \frac{x(2-x)}{2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \int_0^1 1 - x \mathrm{d}x + \int_1^x x - 1 \mathrm{d}x = \frac{x^2-2x+2}{2} & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(d) $P[X > 1] = 1 - F(1) = 0,5$

(e) $P[X < 1,5 | X > 1] = \frac{P[1<X<1,5]}{P[X>1]} = \frac{F(1,5)-F(1)}{1-F(1)}$

(f) $P[X < 0,25 \text{ ou } X > 0,75] = F(0,25) + (1 - F(0,75))$

(g)

Y	200	500	1000
$P[Y = y]$	$P[X \leq 0,25] =$ $F(0,25) =$ $0,21875$	$P[0,25 < X \leq 0,75] =$ $F(0,75) - F(0,25) =$ $0,25$	$P[X > 0,75] =$ $1 - F(0,75) =$ $0,53125$

(h)

$$\mathrm{E}[Y] = \sum y P[Y = y] = 200 \cdot 0,21875 + 500 \cdot 0,25 + 1000 \cdot 0,53125 = 700$$

(i)

Y	$y < 200$	$200 \leq y < 500$	$500 \leq y < 1000$	$y \geq 1000$
$F(y) = P[Y \leq y]$	0	$0,21875$	$0,46875$	1

(j) $P[Y = 1000 | Y \geq 500] = \frac{P[Y=1000]}{P[Y=500]+P[Y=1000]} = 17/25 = 0,68$.

---

27. Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75% . Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.

(a) Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?

(b) Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?

(c) Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?

(d) Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.

(e) Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?

(f) Qual a probabilidade de que o tempo para resposta de uma questão seja superior a 40 segundos?

Solução:

(a)

$$X : \text{Número de acertos até o primeiro erro}$$
$$X \sim \mathrm{G}(0,25)$$
$$P[X \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - \sum_{i=0}^{3} (1-0,25)^i (0,25) = 0,316$$

(b)

$$X : \text{Número de acertos em cinco perguntas}$$
$$X \sim \mathrm{B}(\mathrm{n}=5, \mathrm{p}=0,75)$$
$$P[X \geq 4] = P[X=4] + P[X=5] = \sum_{i=4}^{5} \binom{5}{i} 0,75^i (1-0,75)^{5-i} = 0,633$$

(c)

$$X : \text{Número de erros até o terceiro acerto}$$
$$X \sim \mathrm{BN}(\mathrm{r}=3, \mathrm{p}=0,75)$$
$$P[X=1] = \binom{3+1-1}{3-1} 0,75^3 (1-0,75)^1 = 0,316$$

(d)

$$X : \text{Número de acertos nas seis questões selecionadas}$$
$$X \sim \mathrm{HG}(30,10,6)$$
$$P[X \geq 5] = P[X=5] + P[X=6] = \sum_{i=5}^{6} \frac{\binom{30}{i}\binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} = 0,526$$

(e)

$$X : \text{Número de questões respondidas em 3 minutos}$$
$$X \sim \mathrm{P}(3 \cdot 1,8 = 5,4)$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-5,4} 5,4^{\mathrm{i}}}{i!} = 0,905$$

(f)

$$X : \text{tempo (em min.) para responder uma questão}$$
$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1,8)$$
$$P[X \geq 40/60] = \int_{40/60}^{\infty} 1,8\mathrm{e}^{-1,8\mathrm{x}} \mathrm{dx} = 0,301$$

Solução computacional com o programa R:

```
> (pa <- pgeom(3,p=0.25, lower=F))

[1] 0,3164

> (pb <- pbinom(3, size=5, prob=0.75, lower=F))

[1] 0,6328

> (pc <- dnbinom(1, size=3, prob=0.75))

[1] 0,3164

> (pd <- phyper(4, m=30, n=10, k=6, lower=F))

[1] 0,526

> (pe <- ppois(2, lam=5.4, lower=F))

[1] 0,9052

> (pf <- pexp(40/60, rate=1.8, lower=F))

[1] 0,3012
```

---

28. Seja uma v.a. X com distribuição normal de média $\mu = 250$ e variância $\sigma^2 = 225$. Obtenha:

(a) $P[X > 270]$.
(b) $P[X < 220]$.
(c) $P[|X - \mu| > 25]$.
(d) $P[|X - \mu| < 30]$.
(e) $P[X < 270|X > 250]$.
(f) o valor x_1 tal que $P[X > x_1] = 0,80$.
(g) o valor x_2 tal que $P[X < x_2] = 0,95$.
(h) qual deveria ser um novo valor da média μ para que $P[X < 240] \leq 0,10$?
(i) com $\mu = 250$ qual deveria ser um novo valor da variância σ^2 para que $P[X < 240] \leq 0,10$?
(j) qual deveria ser um novo valor da variância σ^2 para que $P[|X - \mu| > 15] \leq 0,10$?

Solução:

$$X \sim \mathrm{N}(250, 15^2)$$

(a) $P[X > 270] = P[Z > \frac{270-250}{15}] = P[Z > 1,3333] = 0,0912$
(b) $P[X < 220] = P[Z < \frac{220-250}{15}] = P[Z < -2] = 0,0228$
(c) $P[|X - \mu| > 25] = P[X < 225 \cup X > 275] = P[Z < -1,667] + P[Z > 1,667] = 0,0956$
(d) $P[|X - \mu| < 30] = P[220 < X < 280] = P[-2 < Z < 2] = 0,9545$
(e) $P[X < 270|X > 250] = \frac{P[250<X<270]}{P[X>250]} = \frac{0,4088}{0,5} = 0,8176$
(f) $z = \frac{x_1-250}{15} = -0,842 \longrightarrow x_1 = 237,4$
(g) $z = \frac{x_2-250}{15} = 1,645 \longrightarrow x_2 = 274,7$
(h) $z = \frac{240-\mu}{15} = -1,282 \longrightarrow \mu = 259,2$

(i) $z = \frac{240-250}{\sigma} = -1,282 \longrightarrow \sigma = 7,8 \longrightarrow \sigma^2 = 60,8$

(j) $P[|X < \mu| > 15] = P[X < \mu - 15 \cup X > \mu + 15] \leq 0,10 \longrightarrow z = \frac{15}{\sigma} = 1,645 \longrightarrow \sigma = 9,1 \longrightarrow \sigma^2 = 83,1$

Solução computacional com o programa R:

```
> (qa <- pnorm(270, mean=250, sd=15, lower=FALSE))

[1] 0,09121

> (qb <- pnorm(220, mean=250, sd=15))

[1] 0,02275

> (qc <- 2*pnorm(250-25, mean=250, sd=15))

[1] 0,09558

> (qd <- diff(pnorm(c(250-30,250+30), mean=250, sd=15)))

[1] 0,9545

> (qe <- diff(pnorm(c(250,270), mean=250, sd=15))/pnorm(250, mean=250, sd=15, lower=FALSE))

[1] 0,8176

> (qf <- qnorm(0.80, mean=250, sd=15, lower=FALSE))

[1] 237,4

> (qg <- qnorm(0.95, mean=250, sd=15))

[1] 274,7

> (qh <- 240 - 15 * round(qnorm(0.10), dig=3))

[1] 259,2

> (qi <- (240 - 250)/round(qnorm(0.10), dig=3))

[1] 7,8

> (qj <- 15/round(qnorm(0.95), dig=3))

[1] 9,119
```

---

29. Um professor preparou 40 versões diferentes de uma lista de exercícios. As listas são atribuídas ao acaso sorteando-se para cada estudante um número de 1 a 40 que identifica a lista a ser recebida. Se um grupo de três colegas decide fazer as listas juntos, qual a probabilidade de que dois ou mais deles recebam a mesma versão?

Solução:

$$\begin{aligned}
\text{Espaço Amostral: } & S \text{ todas possíveis atribuições de 40 listas para 3 estudantes} \\
n(S) &= 40 \cdot 40 \cdot 40 \\
\text{Evento: } & E \text{ coincidência de lista em ao menos 2 estudantes} \\
& \overline{E} \text{ sem coincidência de listas} \\
n(\overline{E}) &= 40 \cdot 39 \cdot 38 \\
P[E] &= 1 - P[\overline{E}] = 1 - \frac{n(\overline{E})}{n(S)} = 1 - \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{40^3} = 0,0737.
\end{aligned}$$

Nota: este exercício é semelhante ao problema da *coincidência de aniversários* em um grupo de pessoas.

---

30. Um determinado componente de computador é despachados de uma fábrica para entrega em lotes de 70 unidades. Antes do despacho de um lote, 25 das unidades escolhidas ao acaso passam por um teste detalhado. Se alguma destas unidades falha no teste, todo o lote é rejeitado.

    (a) Qual a probabilidade de um lote contendo exatamente quatro unidades falhas ser despachado?

    (b) Indique os cálculos necessários para obter o número de unidades que deveriam ser testadas para que esta probabilidade não ultrapasse 0,02?

Solução:

$$X : \text{número de unidades que apresentam falhas entre as unidades testadas}$$

$$X \sim HG(N = 70, K = 4, n = 25) \quad P[X = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

(a) $P[X = 0] = \frac{\binom{4}{0}\binom{66}{25}}{\binom{70}{25}} = 0,1625$

(b) $n = ?|P[X = 0] \leq 0,02 \longrightarrow \frac{\binom{4}{0}\binom{66}{n}}{\binom{70}{n}} \leq 0,02 \longrightarrow \frac{(70-n)!}{(66-n)!\prod_{i=67}^{70} i} \overset{\text{sol. numérica}}{\longrightarrow} n \geq 43$

Solução computacional com o programa *R*:

```
> la <- dhyper(0,m=4, n=66, k=25)
> fn1 <- function(n) log(gamma(71-n)) - log(gamma(67-n)) - sum(log(67:70))-log(0.02)
> fn2 <- function(n) gamma(71-n)/(gamma(67-n)*prod(67:70)) - 0.02
> n.un <- ceiling(uniroot(fn2, c(25,50))$root)
```

---

31. Sabe-se que em um sistema de transmissão de dados, uma tempestade causa, em média, a falha de transmissão de um *pacote* em cada 200. Transmitindo 500 *pacotes* nestas condições, qual a probabilidade que:

    (a) no máximo três *pacotes* não sejam transmitidos

    (b) todos sejam transmitidos

Solução:

$$X : \text{número falhas de transmissão em 500 pacotes}$$

$$X \sim B(n = 500, p = 1/200) \quad P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^(n-x)$$

$$X \approx P(\lambda = 500 \cdot (1/200)) \quad P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

(a) $P[X \leq 3] = 0,7578$

(b) $P[X = 0] = 0,0816$

Solução computacional com o programa R:

```
> (pa <- pbinom(3, size=500, prob=1/200))

[1] 0,7578

> (pa1 <- ppois(3, lambda= 500*1/200))

[1] 0,7576

> (pb <- dbinom(0, size=500, prob=1/200))

[1] 0,08157

> (pb1 <- dpois(0, lambda= 500*1/200))

[1] 0,08208
```

---

32. A probabilidade de haver algum acidente considerado grave em um dia, em um trecho de uma rodovia é de 0,04 se não chove e de 0,12 se chove. Sabe-se que, no período considerado, chove em 30% dos dias.

    (a) Se em um determinado dia não houve nenhum acidente, qual a probabilidade que não tenha chovido?

    (b) qual a probabilidade de que, chovendo ou não, haja acidente?

Solução:
Eventos e probabilidades informadas:

$$A : \text{ocorre acidente} \quad \overline{A} : \text{não ocorre acidente}$$
$$C : \text{chove} \quad \overline{C} : \text{não chove}$$
$$P[A|\overline{C}] = 0,04 \longrightarrow P[\overline{A}|\overline{C}] = 1 - 0,04 = 0,96$$
$$P[A|C] = 0,12 \longrightarrow P[\overline{A}|C] = 1 - 0,12 = 0,88$$
$$P[\overline{C}] = 0,30 \longrightarrow P[\overline{C}] = 1 - 0,30 = 0,70$$

Probabilidades pedidas:

(a) $P[\overline{C}|\overline{A}] = \frac{P[\overline{C} \cap \overline{A}]}{P[\overline{A}]} = \frac{P[\overline{C} \cap \overline{A}]}{P[C \cap \overline{A}] + P[\overline{C} \cap \overline{A}]} = \frac{P[\overline{C}] \cdot P[\overline{A}|\overline{C}]}{P[\overline{C}] \cdot P[\overline{A}|\overline{C}] + P[C] \cdot P[\overline{A}|C]} = \frac{0,70 \cdot 0,96}{0.70 \cdot 0,96 + 0,30 \cdot 0,88} = 0,718$

(b) $P[A] = P[A \cap C] + P[A \cap \overline{C}] = P[C] \cdot P[A|C] + P[\overline{C}] \cdot P[A|\overline{C}] = 0,30 \cdot 0,12 + 0,70 \cdot 0,04 = 0,064$

---

33. Ainda no contexto da questão anterior:

    (a) qual distribuição poderia ser usada para descrever o tempo entre acidentes graves?

    (b) qual a probabilidade de se passarem 10 dias sem acidentes graves?

    (c) qual o tempo médio entre acidentes graves?

    (d) se não houve acidentes por um período de 5 dias consecutivos, qual a probabilidade de haver um acidente nos próximos 10 dias?

Solução:
Supondo que os acidentes são eventos independentes pode-se considerar que ocorrem segundo um Processo de Poisson. Desta forma, a probabilidade de ocorrer acidente em um dia $P(A) = 0,064$ corresponde ao número médio de acidentes por dia.
Pode-se então usar a relação entre a distribuição Poisson (do número de acidentes em um dia) e a exponencial (do intervalo de tempo entre acidentes).

(a)

$$\begin{aligned}
X &: \text{Numero de acidentes por dia} \\
X &\sim \mathrm{P}(\lambda = 0,064) \\
T &: \text{Tempo (em dias) entre acidentes} \\
T &\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 0,064) \\
f(t) &= \lambda \exp\{-\lambda t\} = \exp\{-0,064t\} \\
F(t) &= 1 - \exp\{-\lambda t\} = 1 - \exp\{-0,064t\}
\end{aligned}$$

(b) $P[T > 10] = 1 - F(10) = 0,527$

(c) $\mathrm{E}[T] = \frac{1}{\lambda} = 1/0,064 = 16$ dias

(d) $P[T < 15|T > 5] = P[T < 10] = 0,473$

Solução computacional com o programa R:

```
> (ac.a <- pexp(10, rate=pA, lower=FALSE))

[1] 0,5273

> (ac.c <- pexp(10, rate=pAr))

[1] 0,4727
```

---

34. Considere agora que ocorrem em média 0,8 acidentes graves por semana.

(a) Com a informação disponível, qual distribuição de probabilidades (dentre as vistas no curso) poderia ser adequada para descrever *o número de acidentes semanais na rodovia*? Justifique a sua resposta e mencione quais as suposisões que devem ser feitas ao adotar esta distribuição.

(b) Qual a probabilidade de que haja ao menos um acidente grave em uma semana?

(c) Qual a probabilidade de que não haja acidentes graves em um mês?

(d) Qual a probabilidade de que sejam registrados mais que dois acidentes graves em uma semana?

(e) Qual a probabilidade de que não haja mais do que cinco acidentes graves em um mês?

(f) Sabendo que em um mês houve pelo menos um acidente grave, qual a probabilidade de que ocorram mais que quatro?

(g) Se não houveram acidentes graves até a metade do mês, qual a probabilidade de não haja acidentes no restante do mês.

(h) E se já ocorreu algum acidente na primeira metade do mês?

Solução:

$$X : \text{o número de acidentes semanais na rodovia}$$

(a) $X \sim P(\lambda = 0,8)$, assumindo-se que os acidentes ocorrem segundo um processo de Poisson, portanto, de forma independente (ocorrência de um acidente não influencia a probabilidade de ocorrência de outro).

(b) $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{e^{-0,8}0,8^0}{0!} = 0,5507$.

(c)

$$Y: \text{o número de acidentes } \textbf{mensais} \text{ (supondo mês de 30 dias) na rodovia}$$
$$Y \sim P(\lambda = \frac{30}{7} \cdot 0,8 \approx 3,43)$$
$$P[Y = 0] = \frac{e^{-3.43} 3.43^0}{0!} = 0,03239$$

(d) $P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^{2} P[X = i] = 0,04742$

(e) $P[Y \leq 5] = \sum_{i=0}^{5} P[Y = i] = 0,8667$

(f) $P[Y > 4 | Y \geq 1] = \frac{P[Y>4 \cap Y \geq 1]}{P[Y \geq 1]} = \frac{P[Y>4]}{P[Y \geq 1]} = \frac{1-P[Y \leq 4]}{1-P[Y=0]} = 0,2702.$

(g) Pelas propriedades do processo de Poisson os eventos são independentes e portanto a probabilidade de acidentes na segunda metade independe da ocorrência na primeira metade. Logo,

$$Y_1: \text{o número de acidentes na primeira metade do mês na rodovia}$$
$$Y_2: \text{o número de acidentes na segunda metade do mês na rodovia}$$
$$Y_1 \text{ e } Y_2 \sim P(\lambda = \frac{15}{7} \cdot 0,8 \approx 1,71)$$
$$P[Y_2 | Y_1] = P[Y_2]$$
$$P[Y_2 = 0 | Y_1 = 0] = P[Y_2 = 0] = \frac{e^{-1,71} 1,71^0}{0!} = 0,1809$$

(h) $P[Y_2 = 0 | Y_1 \geq 0] = P[Y_2 = 0] = \frac{e^{-1,71} 1,71^0}{0!} = 0,1809.$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> (qb <- ppois(0, lam=0.8, lower=FALSE))

[1] 0,5507

> (qc <- dpois(0, lam=3.43))

[1] 0,03239

> (qd <- ppois(2, lam=0.8, lower=FALSE))

[1] 0,04742

> (qe <- ppois(5, lam=3.43))

[1] 0,8667

> (qf <- ppois(4, lam=3.43, lower=F)/ppois(0, lam=3.43, lower=F))

[1] 0,2702

> (qg <- dpois(0, lam=1.71))

[1] 0,1809

> (qh <- dpois(0, lam=1.71))

[1] 0,1809
```

---

35. Ainda no contexto da questão anterior:

(a) Qual distribuição poderia ser usada para descrever o tempo entre acidentes graves?
(b) Qual a probabilidade de se passarem 10 dias sem acidentes graves?
(c) Qual o tempo médio entre acidentes graves?
(d) Se não houve acidentes por um período de 5 dias consecutivos, qual a probabilidade de haver um acidente nos próximos 10 dias?

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} T &: \text{Tempo (em dias) entre acidentes} \\ T &\sim \text{Exp}(\theta = 0,8/7) \\ f(t) &= \frac{0,8}{7} \exp\{-\frac{0,8}{7}t\} \\ F(t) &= 1 - \exp\{-\frac{0,8}{7}t\} \end{aligned}$$

(b) $P[T > 10] = 1 - F(10) = 0,319$
(c) $\text{E}[T] = \frac{1}{\theta} = 7/0,8 = 8,8$ dias
(d) $P[T < 15|T > 5] = P[T < 10] = 0,681$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> (it.a <- pexp(10, rate=.8/7, lower=FALSE))

[1] 0,3189

> (it.c <- pexp(10, rate=.8/7))

[1] 0,6811
```

---

36. Um mecanismo robótico de inserção contém 10 componentes primários. A probabilidade de que qualquer um dos componentes falhe durante o período de garantia é de 0,03. Assume que as falhas dos componentes são independentes e o mecanismo falha se qualquer um dos componentes falharem.

(a) Qual a probabilidade de que o mecanismo falhe durante o período de garantia?
(b) Qual deveria ser a probabilidade individual de falha dos componentes para que a probabilidade de falha do mecanismo não ultrapassasse 0,05?

Solução:

$$\begin{aligned} &\text{Evento } F_i: \text{ falha do i-ésimo componente} \quad P[F_i] = 0,03 \longrightarrow P[\overline{F}_i] = 0,97 \\ &\text{Evento } M: \text{ falha do mecanismo} \end{aligned}$$

(a) $P[M] = 1 - \prod_{i=1}^{10} P[\overline{F}_i] = 1 - 0,97^{10} = 0,2626$
(b) $0,05 = 1 - \{P[\overline{F}_i]\}^{10} \longrightarrow P[\overline{F}_i] = (1 - 0,05)^{1/10} = 0,9949 \longrightarrow P[F_i] = 1 - P[\overline{F}_i] = 0,0051$

---

37. Seja a função de densidade de probabilidade dada por $f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$. Obtenha:

(a) o valor de C,
(b) $P[X > 0,5]$,
(c) $P[X > 0,7|X > 0,5]$,
(d) $E(X)$,
(e) o terceiro quartil.

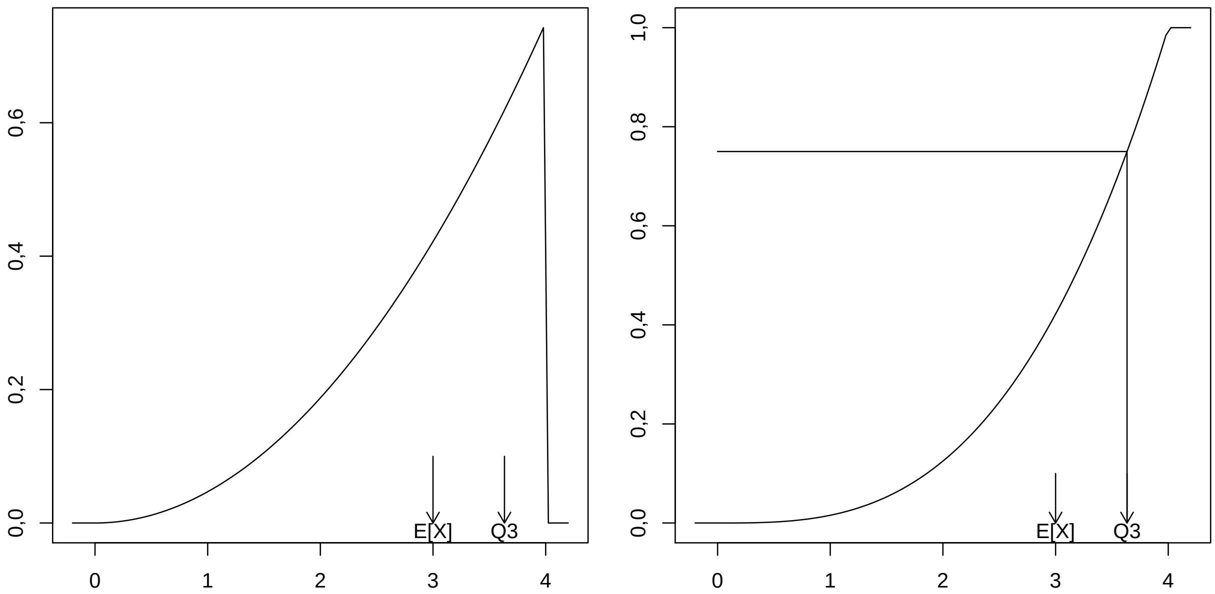


Figura 3: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição.

Solução:

$$f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x) \longrightarrow F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{C}{3}x^3 I_{[0,4]}(x)$$

(a) $\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} = 1 \longrightarrow \mathrm{C} = 0,04687 = 3/64$

(b) $P[X > 0,5] = 1 - F(0,5) = 0,998$

(c) $P[X > 0,7|X > 0,5] = \frac{1-F(0,7)}{1-F(0,5)} = 0,997$

(d) $E(X) = \int_0^4 x \cdot f(x)\mathrm{dx} = \ldots == 3$

(e) $q_3 : \int_0^{q_3} f(x)\mathrm{d}x = 0,75 \longrightarrow q_3 = (64 \cdot 0,75)^{1/3} = 3,63$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> fxC = function(x) ifelse(x>0 & x<=4, x^2, 0)
> C <- 1/integrate(fxC, 0, 4)$value
> require(MASS)
> fractions(1/integrate(fxC, 0, 4)$value)

[1] 3/64

> fx = function(x) ifelse(x>0 & x<=4, C*x^2, 0)
> Fx = function(x) {x[x<0] <- 0;x[x>4] <- 4; (C/3)*x^3}
> integrate(fx, 0, 4)$value

[1] 1

> (I1 <- integrate(fx, 0.5, 4)$value)

[1] 0,998

> 1 - Fx(0.5)

[1] 0,998

> (I2 <- integrate(fx, 0.7, 4)$value/integrate(fx, 0.5, 4)$value)
```

```
[1] 0,9966

> (1 - Fx(0.7))/(1 - Fx(0.5))

[1] 0,9966

> fEx <- function(x) ifelse(x>0 & x<4, (3/64)*x^3, 0)
> (Ex <- integrate(fEx, 0, 4)$value)

[1] 3

> qf <- function(p) (64*p)^(1/3)
> (q3 <- qf(0.75))

[1] 3,634

> integrate(fx, 0, q3)$value

[1] 0,75
```

---

38. Uma editora envia livros de divulgação com caixas com três unidades. O peso individual dos livros tem distribuição normal de média 400 gramas e desvio padrão de 60 gramas e a caixa pesa 200 gramas. Se os livros são escolhidos ao acaso, calcule:

    (a) a probabilidade de que uma caixa a ser enviada pese mais que 1,5 quilos;

    (b) o custo esperado para envio de 1.000 caixas sabendo-se que paga-se R$5,00 para caixas acima de 2,0 quilos, R$3,00 para caixas entre 1,0 e 2,0 quilos, e R$ 2,00 para caixa abaixo de 1,0 quilo.

Solução:

$$X_A : \text{peso do livro} \quad ; \quad X_A \sim N(400, 60^2)$$
$$X_B : \text{peso da embalagem} \quad ; \quad X_B = 200$$
$$X_C : \text{peso da caixa com 3 livros} \quad ; \quad X_B \sim N(\mu_c = E(X_C), \sigma_c^2 = V(X_c))$$
$$E(X_c) = E(3X_A + 200) = 3E(X_A) + 200 = 1400 \quad ; \quad V(X_c) = 3^2V(X_a) = 3^2 60^2$$

(a) $P[X_c > 1500] = P[Z > \frac{1500-1400}{180}] = P[Z > 0,56] = 0,2893$

(b)

C : custo por caixa

c	2,00	3,00	5,00
$P[C = c]$	$p_1 = P[X_c < 1000]$	$p_2 = P[1000 \leq X_c < 2000]$	$p_3 = P[X_c \geq 2000]$

$$p_1 = P[X_c < 1000] = P[Z < \frac{1000 - 1400}{180}] = P[Z < -2,22] = 0,0131$$
$$p_2 = P[1000 \geq X_c < 2000] = P[\frac{1000 - 1400}{180} < Z < \frac{2000 - 1400}{180}] = P[-2,22 < Z < 3,33] = 0,9864$$
$$p_3 = P[X_c \geq 20000] = 1 - p_1 - p_2 = 4e - 04$$
$$1000 \cdot E[C] = 2,00p_1 + 3,00p_2 + 5,00p_3 = 2987,72$$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> (p0 <- pnorm(1500, 1400, 180, low=F))

[1] 0,2893
```

```
> (p1 <- pnorm(1000, 1400, 180))
[1] 0,01313
> (p2 <- diff(pnorm(c(1000, 2000),1400, 180)))
[1] 0,9864
> (p3 <- pnorm(2000, 1400, 180, low=F))
[1] 0,0004291
```

---

39. Em um grupo de estudantes 45% são do curso A, 25% do curso B o restante do curso C. A proporção de mulheres em cada curso um dos cursos é de 20, 50 e 75%, respectivamente. Se um estudante é sorteado qual a probabilidade de:

(a) seja homem;
(b) seja do curso A, sabendo que foi sorteada uma mulher;
(c) seja do curso C sabendo que foi sorteado um homem.

Solução:

$$\begin{aligned} P[A] = 0,45 \quad &; \quad P[B] = 0,25 \quad ; \quad P[C] = 0,30 \\ P[M|A] = 0,20 \quad &; \quad P[M|B] = 0,50 \quad ; \quad P[M|C] = 0,75 \\ P[H|A] = 0,80 \quad &; \quad P[H|B] = 0,50 \quad ; \quad P[H|C] = 0,25 \end{aligned}$$

(a) $P[H] = 1 - P[M] = 1 - (P[M \cap A] + P[M \cap B] + P[M \cap C]) = 1 - (P[M|A] \cdot P[A] + P[M|B] \cdot P[B] + P[M|C] \cdot P[C]) = 1 - (0,20 \cdot 0,45 + 0,50 \cdot 0,25 + 0,75 \cdot 0,30) = 1 - 0,44 = 0,56$
(b) $P[A|M] = \frac{P[A \cap M]}{P[M]} = \frac{P[M|A] \cdot P[A]}{P[M]} = \frac{0{,}09}{0{,}44} = 0,205$
(c) $P[C|H] = \frac{P[C \cap H]}{1 - P[M]} = \frac{P[H|C] \cdot P[C]}{P[H]} = \frac{0{,}075}{0{,}56} = 0,134$

---

40. A probabilidade de ocorrer falha/corrupção na cópia de um arquivo é de 0,03. Em 10.000 cópias feitas em um sistema mostre como calcular as probabilidades a seguir de ao menos duas maneiras diferentes.

(a) De que não ocorram falhas;
(b) de que ocorram o máximo três falhas;
(c) de que ocorram no máximo quatro falhas, sabendo que ao menos uma falha ocorreu.

Solução:

$$\begin{aligned} P[F] = 0,03 \quad &; \quad P[\overline{F}] = 0,97 \\ X :&\ \text{número de falhas} \\ \text{Solução 1: } & X_B \sim B(n = 10.000, p = P[F] = 0,03) \\ \text{Solução 2: } & X_P \approx P(\lambda = n \cdot p = 10.000 \cdot 0,03 = 300) \\ \text{Solução 3: } & X_N \approx N(\mu = n \cdot p = 10.000 \cdot 0,03 = 300 \quad ; \quad \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 291) \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} P[\overline{F}_1 \ldots \overline{F}_{10.000}] &\overset{ind}{=} 0,97^{10.000} = 5,216e-133 \\ P[X = 0] = P[X_B = 0] &= \binom{10000}{0} (0,03)^0 (1 - 0,03)^{10000} = 5,216e-133 \\ P[X = 0] \approx P[X_P = 0] &= \frac{e^{-300} 300^0}{0!} = 5,148e-131 \end{aligned}$$

(b)

$$P[X \leq 3] = P[X_B \leq 3] = \sum_{i=0}^{3} \binom{10000}{i} (0,03)^i (1-0,03)^{10000-i} = 2,596e-126$$
$$P[X \leq 3] = P[X_P \leq 3] = \sum_{i=0}^{3} = \frac{e^{-300}300^i}{i!} = 2,34e-124$$

(c)

$$P[X \leq 4 | X \geq 1] =$$
$$\frac{P[1 \leq X \leq 4]}{P[X \geq 1]} = \frac{P[X=1]+P[X=2]+P[X=3]+P[X=4]}{1-P[X=0]} =$$
$$= \frac{P[X_B=1]+P[X_B=2]+P[X_B=3]+P[X_B=4]}{1-P[X_B=0]} = \frac{\sum_{i=1}^{4}\binom{10000}{i}(0,03)^i(1-0,03)^{10000-i}}{1-P[X_B=0]} = 2,013e-124$$
$$\approx \frac{P[X_P=1]+P[X_P=2]+P[X_P=3]+P[X_P=4]}{1-P[X_P=0]} = \frac{\sum_{i=1}^{4}\frac{e^{-300}300^i}{i!}}{1-P[X_B=0]} = 1,761e-122 =$$

---

41. Considere a função $f_X(x) = k(1+2x)\ \ \mathrm{I}_{(0,2)}(x)$
   (a) mostre que $f(x)$ é função de densidade de probabilidade (f.d.p.) para algum valor de k e determine o valor de k.
   (b) obtenha $F(x)$
   (c) obtenha $\mathrm{E}[X]$
   (d) obtenha $P[X > 1]$
   (e) obtenha a tal que $P[X < a] = 0,6$

Solução:

(a)

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1 \longrightarrow k(2+4) = 1 \longrightarrow k = 1/6$$
$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall \quad 0 < x < 2$$

(b)

$$F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{x(1+x)}{6}$$

(c)

$$E(x) = \int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x = 1,222$$

(d)

$$P[X > 1] = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(1+3) = 0,667$$

(e)

$$P[X < a] = 0,6 \longrightarrow \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0,6 \longrightarrow \frac{a(1+a)}{6} = 0,6 \longrightarrow a = 1,462$$

Solução computacional com o programa R:

```
> fx <- function(x, k) ifelse(x > 0 & x<2, k*(1+2*x), 0)
> integrate(fx, 0, 2, k=1/6)

1 with absolute error < 1,1e-14

> Ex.f <- function(x) x*fx(x, k=1/6)
> (EX <- integrate(Ex.f, 0, 2)$value)

[1] 1,222

> (PX1 <- integrate(fx, 1, 2, k=1/6)$value)

[1] 0,6667

> a <- Re(polyroot(c(-0.6, 1/6, 1/6)))
> a <- a[a>0 & a<2]
```

---

42. O tempo de montagem de um determinado mecanismo é uma v.a. uniforme no intervalo de 30 a 40 segundos. Determine:

    (a) as expressões de $f(x)$ e $F(x)$;
    (b) a probabilidade da montagem ser feita em menos que 33 segundos;
    (c) a probabilidade da montagem ser feita em menos que 38 segundos, sabendo que foi maior que 35 segundos;
    (d) o tempo abaixo do qual 80% das montagens são feitas;
    (e) o tempo esperado para montagem de 5.000 peças;
    (f) o custo esperado para montagem de 5.000 peças sabendo que montagens abaixo de 33 segundos tem custo de R$1,00, entre 33 e 38 segundos o custo é de R$1,50 e acima de 38 segundos o custo é de R$3,00.

Solução:

$$X: \text{ tempo de montagem} \quad X \sim U[30, 40]$$

(a)

$$f(x) = \frac{1}{40-30}\ \mathrm{I}_{[30,40]}(x) = \frac{1}{10}\ \mathrm{I}_{[30,40]}(x)$$
$$F(x) = \frac{x-30}{40-30}\ \mathrm{I}_{[30,40]}(x) = \frac{x-30}{10}\ \mathrm{I}_{[30,40]}(x)$$

(b) $P[X < 33] = F(33) = \frac{33-30}{10} = 0,30$

(c) $P[X < 38 | X > 35] = \frac{P[35<X<38]}{P[X>35]} = \frac{F(38)-F(35)}{1-F(35)} = 0,60$

(d) $P[X < t_1] = 0,80 \longrightarrow t_1 = 38$

(e) $5.000 \cdot \mathrm{E}[X] = 5.000 \cdot \frac{30+40}{2} = 175000$ segundos $= 48,61$ horas

(f) Y : custo por peça

y	1,00	1,50	3,00
P[Y=y]	$P[X \leq 33] = 0,3$	$P[33 < X < 38] = 0,5$	$P[X \geq 38] = 0,2$

Custo $= 5.000 \cdot E[Y] = 5.000 \cdot (1,00 \cdot P[Y = 1,00] + 1,50 \cdot P[Y = 1,50]) + 3,00 \cdot P[Y = 3,00]) = 8250.$

---

43. Uma central de atendimento classifica as solicitações de atendimento em 12 categorias (A, B, C, ... K, L) de complexidade. Assume-se que a probabilidade de classificação é a mesma para todas as categorias. Os custos são de R$ 100,00 para categorias A e B; R$ 200,00 para C e D, R$ 300,00 para E e F e R$ 400,00 para os demais. A cada dia são feitos três atendimentos. Qual a probabilidade de que em um dia o custo total:

(a) seja de R$ 600,00 ,
(b) seja de pelo menos R$ 1.000,00 ,
(c) seja de pelo menos R$ 900,00 , sabendo-se que o custo é de pelo menos R$ 600,00 ,
(d) sejam selecionados dois ou mais atendimentos de mesmo custo ,
(e) sejam selecionados três atendimentos de custos diferentes.
(f) Considerando uma semana de 5 dias úteis, qual o custo semanal (total) esperado?

---

44. Mostre que as funções a seguir são funções de densidade de probabilidade (f.d.p.) para algum valor de k e determine o valor de k.

- $f_1(x) = k_1(1 + 2x)$ para $0 < x < 2$.
- $f_2(x) = k_2 x^2$ para $0 < x < 4$.

Obtenha para cada uma das distribuições:

(a) $F(x)$
(b) $\mathrm{E}[X]$
(c) $P[X > 1]$

Solução:

- $\int_0^2 f_1(x)dx = 1 \longrightarrow \int_0^2 k_1(1 + 2x)dx = 1 \longrightarrow k_1 = 1/6$
- $\int_0^4 f_2(x)dx = 1 \longrightarrow \int_0^4 = k_2 x^2 dx = 1 \longrightarrow k_2 = 3/64$

(a)

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(x)dx = (x + x^2)/6$$
$$F_2(x) = \int_0^x f_2(x)dx = x^3/64$$

(b)

$$E_1(x) = \int_0^2 x f_1(x)dx = 1,222$$
$$E_2(x) = \int_0^4 x f_2(x)dx = 3$$

(c)

$$P_1[X > 1] = 1 - F_1(1) = 0,667$$
$$P_2[X > 1] = 1 - F_2(1) = 0,984$$

---

45. Um lote de 120 containers de laranjas contém 25 que estão contaminados. São selecionados ao acaso e sequencialmente 15 containers para inspeção. Quais as probabilidades de que:

(a) nenhum contaminado seja selecionado?
(b) mais que 2 contaminados sejam encontrados?
(c) de que o segundo inspecionado esteja contaminado sendo que o primeiro era contaminado?
(d) de que os cinco primeiros não sejam contaminados?

Solução:

$$\begin{aligned} &X: \text{número de containers contaminados} \\ &X \sim \text{HG}(N = 120, n = 15, r = 25) \\ P[X = x] = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{N-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{25}{x}\binom{120-25}{15-x}}{\binom{120}{15}} \end{aligned}$$

(a) $P[X = 0] = \frac{\binom{25}{x}\binom{120-25}{15-x}}{\binom{120}{15}} = 0,023$

(b) $P[X > 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0,647$

(c) $P[C_2|C_1] = \frac{24}{124} = 0,194$

(d) $P[\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 \cap \bar{C}_4 \cap \bar{C}_5] = P[\bar{C}_1] \cdot P[\bar{C}_2|\bar{C}_1] \cdot P[\bar{C}_3|\bar{C}_1\bar{C}_2] \cdot P[\bar{C}_4|\bar{C}_1\bar{C}_2\bar{C}_3] \cdot P[\bar{C}_5|\bar{C}_1\bar{C}_2\bar{C}_3\bar{C}_4] = \frac{95}{120} \cdot \frac{94}{119} \cdot \frac{93}{118} \cdot \frac{92}{117} \cdot \frac{91}{116} = 0,304$

ou $X \sim \text{HG}(N = 120, n = 5, r = 25) \longrightarrow P[X = 0] = \frac{\binom{25}{x}\binom{120-25}{15-x}}{\binom{120}{5}} = 0,304$

---

46. Uma empresa é responsável pelo monitoramento de 12 reservatórios (A, B, C, ...K, L) que são inspecionados periodicamente. Os custos de inspeção variam sendo de R\$ 1.000,00 para A e B; R\$ 2.000,00 para C e D, R\$ 3.000,00 para E e F e R\$ 4.000,00 para os demais. Em cada inspeção são selecionados aleatoriamente três reservatórios. Qual a probabilidade de que em uma inspeção:

(a) seja gasto R\$ 6.000,00 ,

(b) seja gasto mais que R\$ 10.000,00 ,

(c) seja gasto mais que R\$ 8.000,00 , sabendo-se que o custo é superior a R\$ 5.000,00 ,

(d) sejam selecionados dois ou mais reservatórios de mesmo custo ,

(e) sejam selecionados reservatórios de custos diferentes.

---

47. (B. & M.) Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte de encanamento de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar e concorrência da parte elétrica é de 1/2. Caso ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte de encanamento é de 3/4; caso contrário, essa probabilidade é de 1/3.

(a) Qual a probabilidade de ele:
- ganhar os dois contratos?
- ganhar apenas um dos contratos?
- não ganhar nenhum contrato?

(b) os eventos "ganhar o contrato elétrico" e "ganhar o contrato hidráulico"
- são independentes? (justifique)
- são mutuamente exclusivos? (justifique)

Solução:

$$\begin{aligned} G_1 &: \text{ ganhar concorrência da parte elétrica} \\ G_2 &: \text{ ganhar concorrência do encanamento} \end{aligned}$$

$$P[G_1] = 1/2 \quad ; \quad P[G_2|G_1] = 3/4 \quad ; \quad P[G_2|\overline{G}_1] = 1/3$$
$$P[\overline{G}_1] = 1/2 \quad ; \quad P[\overline{G}_2|G_1] = 1/4 \quad ; \quad P[\overline{G}_2|\overline{G}_1] = 2/3$$

(a)
- $P[G_1 \cap G_2] = P[G_1] \cdot P[G_2|G_1] = (1/2) \cdot (3/4) = 3/8 = 0,375$
- $P[G_1 \cap \overline{G}_2] + P[\overline{G}_1 \cap G_2] = P[G_1] \cdot P[\overline{G}_2|G_1] + P[\overline{G}_1] \cdot P[G_2|\overline{G}_1] = (1/2) \cdot (1/4) + (1/2) \cdot (1/3) = 7/24 = 0,292$

- $P[\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2] = P[\overline{G}_1] \cdot P[\overline{G}_2 | \overline{G}_1] = (1/2) \cdot (2/3) = 1/3 = 0,333$

(b)
- Não, pois $P[G_1 \cap G_2] = 3/8 \neq P[G_1] \cdot P[G_2] = 13/48$,
  em que $P[G_2] = P[G_2 \cap G_1] + P[G_2 \cap \overline{G}_1] = (3/8) + (1/6) = 13/24$
- Não pois $P[G_1 \cap G_2] \neq 0$

---

48. Considere o lançamento de uma moeda 10 vezes.

(a) Se voce lançar a probabilidade de obter a face "cara" em todos os lançamentos?

(b) Considere agora que 1.000 pessoas fazem o mesmo. Qual a probabilidade de que alguém obtenha 10 "caras"?

(c) Qual(ais) a(s) suposição(ções) feita(s) nos cálculos?

(d) Discuta e interprete os resultados.

Solução:

(a)

$$(1/2)^{10} = 1/1024 = 0,00098$$
$$\text{ou}$$
$$X : \text{número de caras em 10 lançamentos}$$
$$X \sim B(n = 10, p = 1/2)$$
$$P[X = 10] = \binom{10}{10}(1/2)^{10}(1 - 1/2)^{10-10} = 0,00098$$

(b)

$$1 - (1 - (1/2)^1 0)^{1000} = 0,62358$$
$$\text{ou}$$
$$Y : \text{número pessoas que obtém 10 caras}$$
$$Y \sim B(n = 1000, p = (1/2)^1 0)$$
$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 1 - \binom{1000}{0}[(1/2)^{10}]^0[1 - (1/2)^{10}]^{1000-0} = 0,62358$$

(c) Independência entre lançamentos, independência entre resultados de diferentes pessoas, probabilidades constantes de lançamentos de pessoas obterem 10 caras.

(d)

---

49. Registros de um laboratório mostram que 1 a cada 20 amostras de um determinado material são perdidas por contaminação. Responda cada um dos seguintes items declarando a variável aleatória e a sua distribuição.

(a) Se forem feitas 15 análises qual a probabilidade de que no máximo uma seja contaminada.

(b) Em um teste para avaliar a contaminação análises serão feitas sequencialmente até que a primeira contaminada seja encontrada. Quantas análises espera-se fazer? Como voce calcularia a probabilidade de que o esse número de análises não chegue a 5?

(c) O teste anterior foi repetido porém até que a terceira análise mostrasse contaminação. Em um particular ensaio foram feitas 10 análise desta forma. Qual a probabilidade desta ocorrência?

(d) Um lote contendo 40 amostas das quais 15 eram contaminadas foi enviado para teste em outro laboratório na qual 12 amostras foram selecionadas ao acaso para testes. Qual a probabilidade de encontrar 3 ou mais contaminadas entre as selecionadas?

(e) Considere agora que o laboratório faz um grande número de análises por mês e registra uma média de 2,5 casos de contaminação grave. Qual a probabilidade de que em um determinado mês não se registre nenhuma contaminação? E de que seja registradas mais do que 5 contaminações?

Solução:

$$p = 1/20$$

(a)

$$\begin{aligned} X &: \text{número de contaminadas em 15 análises} \\ X &\sim B(n = 15, p = 1/20) \\ P[X \leq 1] &= P[X = 0] + P[X = 1] = 0,829 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &X : \text{número de análises } \textbf{não contaminadas} \text{ até encontrar a primeira contaminada} \\ &X \sim G(p = 1/20) \quad P[X = x] = p \cdot (1-p)^x, x = 0, 1, \ldots \\ E[X] + 1 &= \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p} = 20 \\ P[X < 4] &= \sum_{i=0}^{4} P[X = i] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] = \\ &= \sum_{i=0}^{4} (1/20)(1-1/20)^i = 0,2262 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} &X : \text{número de análises } \textbf{não contaminadas} \text{ até encontrar a terceira contaminada} \\ &X \sim BN(r = 3, p = 1/20) \quad ; \quad P[X = x] = \binom{x+3-1}{3} (1/20)^3 \cdot (1-1/20)^x, x = 0, 1, \ldots \\ &10 \text{ análises } \longrightarrow 7 \text{ não contaminadas} \\ P[X = 7] &= 0,0031 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} &X : \text{número de amostras contaminadas entre as 12} \\ &X \sim HG(N = 40, r = 15, n = 12) \quad ; \quad P[X = x] = \frac{\binom{25}{12-x}\binom{15}{x}}{\binom{40}{12}} \\ P[X \geq 3] &= 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^{2} P[X = i] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0,9257 \end{aligned}$$

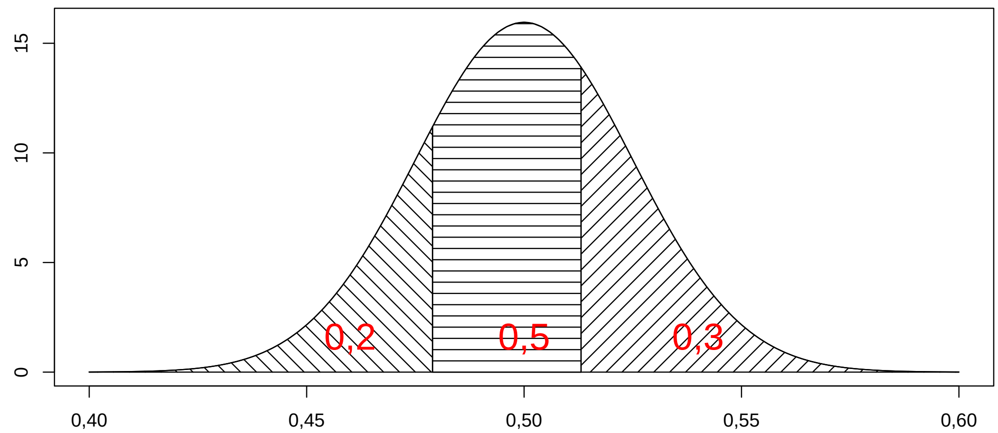
(e)

$$\begin{aligned} &X : \text{número de análises contaminadas em um mês} \\ &X \sim P(\lambda = 2,5) \quad P[X = x] = \frac{e^{-2,5} 2,5^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots \\ P[X = 0] &= 0,0821 \\ P[X > 5] &= 1 - P[X \leq 5] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + \ldots + P[X = 5]) = 1 - \sum_{i=0}^{5} \frac{e^{-2,5} 2,5^i}{i!} = 0,042 \end{aligned}$$

---

50. Conchas de mexilhões de uma certa espécie possuem, em uma certa região, uma relação altura/comprimento com distribuição normal de média 0,5 e desvio padrão de 0,025. Os animais serão classificados de modo que 20% sejam considerados pequenos, 50% como médios e os restantes 30% como grandes. Quais os valores da relação altura/comprimento que definirão as classes de tamanho desejadas?

Solução:



$$X \sim N(\mu = 0,5 \;\; ; \;\; \sigma^2 = (0,025)^2)$$

$$P(X < x_1) = 0,20 \Longrightarrow P(Z < \frac{x_1 - 0,5}{0,025}) = 0,20 \Longrightarrow z_1 = -0,842 \Longrightarrow$$

$$x_1 = \mu + z_1 \cdot \sigma = 0,5 + (-0,842) \cdot 0.025 = 0,479$$

$$P(x_1 < X < x_2) = 0,50$$

$$P(X < x_1) = 0,20$$

$$P(Z < \frac{x_2 - 0,5}{0,025}) = 0,70 \Longrightarrow z_2 = 0,524 \Longrightarrow x_2 = \mu + z_2 \cdot \sigma = 0,5 + 0,524 \cdot 0.025 = 0,513$$

---

51. A durabilidade de um tipo de filtro é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de média 60.000 hrs de funcionamento e desvio padrão de 9.000 hrs.

    (a) Se o fabricante garante a duração dos filtros pelas primeiras 47.500 hrs, qual a proporção de filtros que devem ser trocados pela garantia?

    (b) O que aconteceria com a proporção do item anterior se a garantia fosse para as primeiras 45.000 hrs?

    (c) Qual deveria ser a garantia (em hrs) de forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 4% dos filtros?

    (d) Se uma indústria comprar cinco (5) filtros, qual será a probabilidade de utilizar a garantia (de 45.000 hrs) para trocar ao menos um (1) dos filtros?

Solução:

$$X \sim N(60.000, 9.000^2)$$

(a)

$$P[X < 47500] = P[Z < \frac{47500 - 60000}{9000}] = P[Z < -1,389] = 0,082$$

$$100 \cdot P[X < 47500] = 8,24\% \text{ dos filtros.}$$

(b)

$$P[X < 45000] = P[Z < \frac{45000 - 60000}{9000}] = P[Z < -1,667] = 0,048$$

$$100 \cdot P[X < 45000] = 4,78\% \text{ dos filtros.}$$

(c)

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 0,04 \;\; ; \;\; t = ? \\ P[Z < \frac{t-60000}{9000}] &= 0,04 \\ z &= -1,751 \\ \frac{t-60000}{9000} &= -1,751 \\ t &= 60000 + 9000(-1,751) \\ t &= 44243,825 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} Y &: \text{ número de trocados sob garantia dentre 5 comprados} \\ Y &\sim B(n = 5, p = P[X < 45000] = 0,048) \\ P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] &= 0,217 \end{aligned}$$

---

52. Um algorítmo de classificação deve tentar resolver corretamente dois problemas, A e B. A probabilidade resolver A corretamente é de 0,6. Caso resolva A corretamente, a probabilidade de resolver B corretamente é de 0,85; caso contrário, essa probabilidade é de 0,25.

   (a) Qual a probabilidade de ele:
      i. resolver corretamente os dois problemas?
      ii. resolver corretamente apenas um dos problemas?
      iii. não resolver nenhum corretamente?

   (b) os eventos "resolver corretamente A" e "resolver corretamente B",
      i. são independentes? (justifique)
      ii. são mutuamente exclusivos? (justifique)

Solução:

$$\begin{aligned} A &: \text{ resolver corretamente o problema A} \\ B &: \text{ resolver corretamente o problema B} \\ P[A] = 0,6 \;\; &; \;\; P[B|A] = 0,85 \;\; ; \;\; P[B|\overline{A}] = 0,25 \\ P[\overline{A}] = 0,4 \;\; &; \;\; P[\overline{B}|A] = 0,15 \;\; ; \;\; P[\overline{B}|\overline{A}] = 0,75 \end{aligned}$$

(a) i. $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B|A] = (0,6) \cdot (0,85) = 0,51$
   ii. $P[A \cap \overline{B}] + P[\overline{A} \cap B] = P[A] \cdot P[\overline{B}|A] + P[\overline{A}] \cdot P[B|\overline{A}] = (0,6) \cdot (0,15) + (0,4) \cdot (0,25) = 0,19$
   iii. $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = P[\overline{A}] \cdot P[\overline{B}|\overline{A}] = (0,4) \cdot (0,75) = 0,3$

(b) i. Não, pois $P[A \cap B] = 0,51 \neq P[A] \cdot P[B] = 0,61$,
   em que $P[B] = P[B \cap A] + P[B \cap \overline{A}] = (0,6)(0,85) + (0,4)(0,25) = 0,61$
   ii. Não pois $P[A \cap B] \neq 0$

---

53. Considere o lançamento de uma moeda 10 vezes.

   (a) Qual a probabilidade de obter a face "cara" em todos os lançamentos?
   (b) Considere agora que 1.000 pessoas fazem o mesmo. Qual a probabilidade de que alguém obtenha 10 "caras"?
   (c) Qual(ais) a(s) suposição(ções) feita(s) nos cálculos?
   (d) Discuta e interprete os resultados.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}(1/2)^{10} &= 1/1024 = 0,00098\\ &\text{ou}\\ &X: \text{número de caras em 10 lançamentos}\\ &X \sim B(n=10, p=1/2)\\ P[X=10] &= \binom{10}{10}(1/2)^{10}(1-1/2)^{10-10} = 0,00098\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}1-(1-(1/2)^10)^{1000} &= 0,62358\\ &\text{ou}\\ &Y: \text{número pessoas que obtém 10 caras}\\ &Y \sim B(n=1000, p=(1/2)^10)\\ P[Y \geq 1] = 1-P[Y=0] &= 1-\binom{1000}{0}[(1/2)^{10}]^0[1-(1/2)^{10}]^{1000-0} = 0,62358\end{aligned}$$

(c) Independência entre lançamentos, independência entre resultados de diferentes pessoas, probabilidades constantes de lançamentos de pessoas obterem 10 caras.

(d)

---

54. Responda as questões a seguir declarando a variável aleatória e a sua distribuição.

(a) Registros de um sistema mostram que 1 a cada 20 requisições de acesso de um determinado serviço não são atendidas.

i. Se forem feitas 15 requisições, qual a probabilidade de que no máximo duas não sejam atendidas?

ii. Em um teste para avaliar o sistema requisições serão feitas sequencialmente até que a primeiro acesso não seja completado. Se este teste for feito diversas vezes, anotando-se o número de acessos a cada teste, qual deve ser o valor da média do número de acessos? Como voce calcularia a probabilidade de que o esse número de acessos não chegue a 5?

iii. O teste anterior foi repetido porém até que o terceiro acesso não fosse completado. Em um particular ensaio foram feitas 10 análise desta forma. Qual a probabilidade desta ocorrência? Se este teste for repetido diversas vezes e o número de acessos anotado, qual deve ser a média do número de acessos?

Solução:

$$p: \text{probabilidade de uma requisição não ser atendida } \ (p = 1/20)$$

(a)

$$\begin{aligned}&X: \text{número de requisições não atendidas em 15 solicitações}\\ &X \sim B(n=15, p=1/20)\\ P[X \leq 2] &= P[X=0]+P[X=1]+P[X=2] = 0,9638\end{aligned}$$

(b)

$$X : \text{número de requisições } \textbf{atendidas} \text{ até a primeira não completada}$$
$$X \sim G(p = 1/20) \quad P[X = x] = p \cdot (1-p)^x, x = 0, 1, \ldots$$
$$E[X] + 1 = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p} = 20$$
$$P[X < 4] = \sum_{i=0}^{3} P[X = i] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] =$$
$$= \sum_{i=0}^{4} (1/20)(1 - 1/20)^i = 0,1855$$

(c)

$$X : \text{número de requisições } \textbf{atendidas} \text{ até a terceira não completada}$$
$$X \sim BN(r = 3, p = 1/20) \quad ; \quad P[X = x] = \binom{x+3-1}{3}(1/20)^3 \cdot (1 - 1/20)^x, x = 0, 1, \ldots$$
$$10 \text{ requisições } \longrightarrow 7 \text{ atendidas}$$
$$P[X = 7] = 0,003143$$
$$E[X] + 3 = r\frac{1-p}{p} + 1 = \frac{r}{p} = 60$$

Solução computacional com o programa R:

```
> (Pi <- pbinom(2, size=15, prob=1/20))

[1] 0,9638

> (Pii <- pgeom(3, prob=1/20))

[1] 0,1855

> (Piii <- dnbinom(7, size=3, prob=1/20))

[1] 0,003143
```

---

55. Tem-se um conjunto de 40 sensores das quais 15 estão danificados. Uma transmissão é feita para 12 sensores foram selecionadas ao acaso. Qual a probabilidade da transmissão ter sido enviada para 4 ou mais sensores operantes?

Solução:

$$X : \text{número de sensores operantes dentre os 12}$$
$$X \sim HG(N = 40, r = (40 - 15 = 25), n = 12) \quad ; \quad P[X = x] = \frac{\binom{25}{x}\binom{15}{12-x}}{\binom{40}{12}}$$
$$P[X \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - \sum_{i=0}^{2} P[X = i] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] - P[X = 3] = 0,9978$$

Solução computacional com o programa R:

```
> (pHG <- phyper(3, m=25, n=15, k=12, lower=F))
```

```
[1] 0,9978
```

---

56. Considere agora uma transmissão de dados que tem uma taxa de falha de 5,2 falhas por hora. Qual a probabilidade de que em um intervalos de 15 minutos não haja nenhuma falhas de transmissão? E de que seja registradas mais do que 4 falhas?

Solução:

$$X : \text{número de falhas em 15 minutos}$$
$$X \sim P(\lambda = 5,2/4 = 1,3) \quad P[X = x] = \frac{e^{-1,3} 1,3^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$$
$$P[X = 0] = 0,2725$$
$$P[X > 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4]) =$$
$$= 1 - \sum_{i=0}^{4} \frac{e^{-1,3} 1,3^i}{i!} = 0,01066$$

Solução computacional com o programa R:

```
> (pPa <- dpois(0, lambda=1.3))

[1] 0,2725

> (pPb <- ppois(4, lambda=1.3, lower=F))

[1] 0,01066
```

---

57. O peso de um tênis de corrida sofisticado é normalmente distribuído com média de 12 onças (onça é uma unidade de peso) e desvio padrão de 0,5 onças.

   (a) qual a probabilidade de um tênis pesar mais que 13,2 onças?
   (b) qual a probabilidade de um tênis pesar entre 11,6 e 12,7 onças?
   (c) quanto deveria ser o desvio padrão para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?
   (d) se o desvio padrão se mantiver em 0,5, quanto deveria ser a média para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?

```
> (pa <- pnorm(13.2, mean=12, sd=0.5, lower=F))
> (pb <- diff(pnorm(c(11.6,12.7), mean=12, sd=0.5)))
> (pc <- (13-12)/qnorm(0.999))
> (pd <- 13-0.5*qnorm(0.999))
```

Solução:

$$X \sim N(12, 0.5^2)$$

(a) $P[X > 13,2] = P[Z > \frac{13,2-12}{0,5}] = P[Z > 2,4] = 0,0082$

(b) $P[11,6 < X < 12,7] = P[\frac{11,6-12}{0,5} < Z < \frac{12,7-12}{0,5}] = P[-0,8 < Z < 1,4] = 0,707$

(c)

$$\begin{aligned} X &\sim N(12, \sigma^2) \\ P[X < 13] &= 0,999 \;\; ; \;\; \sigma =? \\ P[Z < \frac{13-12}{\sigma}] &= 0,999 \\ z &= 3,09 \\ \frac{13-12}{\sigma} &= 3,09 \\ \sigma &= 0,324 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} X &\sim N(\mu, 0.5^2) \\ P[X < 13] &= 0,999 \;\; ; \;\; \mu =? \\ P[Z < \frac{13-\mu}{0,5}] &= 0,999 \\ z &= 3,09 \\ \frac{13-\mu}{0,5} &= 3,09 \\ \mu &= 13 - 0,5(3,09) \\ \mu &= 11,455 \end{aligned}$$

Solução computacional com o programa *R*:

```
> (pa <- pnorm(13.2, mean=12, sd=0.5, lower=F))

[1] 0,008198

> (pb <- diff(pnorm(c(11.6,12.7), mean=12, sd=0.5)))

[1] 0,7074

> (pc <- (13-12)/qnorm(0.999))

[1] 0,3236

> (pd <- 13-0.5*qnorm(0.999))

[1] 11,45
```

---

58. Um teste de aptidão feito por pilotos de aeronaves em treinamento inicial requer que uma série de operações seja realizada em uma rápida sucessão. Suponha que o tempo necessário para completar o teste seja distribuído de acordo com o modelo normal, com média de 90 minutos e desvio padrão de 20 minutos.

    (a) Para passar no teste, o candidato deve completá-lo em menos de 80 minutos. Se 65 candidatos tomam o teste, quantos são esperados passar?

    (b) Se os 5% melhores candidatos são alocados para aeronaves maiores, quão rápido deve ter sido o candidato para que obtenha esta posição?

    (c) Se forem sorteados ao acaso 5 candidatos, qual a probabilidade de tomar ao menos 2 aprovados?

```
> (p80 <- pnorm(80, m=90, sd=20))
> (ita <- 65 * p80)
> (itb <- qnorm(0.05, m=90, sd=20))
> (itc <- pbinom(1, size=5, prob=p80, lower=FALSE))
```

Solução:

$$X \sim N(90, 20^2)$$

(a)

$$P[X < 80] = P[Z < \frac{80-90}{20}] = P[Z < -0,5] = 0,309$$
$$65 \cdot P[X < 80] = 20 \text{ candidatos.}$$

(b)

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 0,05 \;\; ; \;\; t = ? \\ P[Z < \frac{t-90}{20}] &= 0,05 \\ z &= -1,645 \\ \frac{t-90}{20} &= -1,645 \\ t &= 90 + 20(-1,645) \\ t &= 57,103 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} Y &: \text{ número de aprovados dentre 5 candidatos} \\ Y &\sim B(n = 5, p = P[X < 80] = 0,309) \\ P[Y \geq 2] &= 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] = 0,489 \end{aligned}$$

```
> (p80 <- pnorm(80, m=90, sd=20))

[1] 0,3085

> (ita <- 65 * p80)

[1] 20,05

> (itb <- qnorm(0.05, m=90, sd=20))

[1] 57,1

> (itc <- pbinom(1, size=5, prob=p80, lower=FALSE))

[1] 0,4893
```

---

59. Um time de futebol tem probabilidade 0,70 de vitórias sempre que joga. Se o time atuar 4 vezes determine a probabilidade de que vença:

   (a) todas as 4 partidas.
   (b) exatamente 2 partidas.
   (c) pelo menos uma partida.
   (d) no máximo 3 partidas.
   (e) mais da metade das partidas.

Solução:

$$X: \text{número de vitórias em 4 partidas}$$
$$X \sim B(n=4, p=0.7)$$
$$P[X=x] = \binom{4}{x} 0,7^x (0.3)^{n-x}$$

(a) $P[X=4] = 0,2401$
(b) $P[X=2] = 0,2646$
(c) $P[X \geq 1] = 1 - P[X=0] = 0,9919$
(d) $P[X \leq 3] = 1 - P[X=0] = 0,7599$
(e) $P[X > 2] = P[X=3] + P[X=4] = 0,4116 + 0,2401 = 0,6517$

Solução computacional com o programa R:

```
> (pa <- dbinom(4, size=4, p=0.7))

[1] 0,2401

> (pb <- dbinom(2, size=4, p=0.7))

[1] 0,2646

> (pc <- 1-dbinom(0, size=4, p=0.7))

[1] 0,9919

> (pd <- pbinom(3, size=4, p=0.7))

[1] 0,7599

> (pe <- pbinom(2, size=4, p=0.7, low=F))

[1] 0,6517
```

---

60. Considere que um time tem probabilidade 0,7 de vitória, 0,25 de empate e 0,05 de perder quando joga em casa e 0,5 de vitória, 0,3 de empate e 0,2 de derrota quando joga fora. O time ganha 3 pontos quando vence, 1 quando empata e não marca pontos quando perde. Se vai jogar uma partida em casa e uma fora, qual a probabilidade de:

(a) não marcar pontos,
(b) marcar 4 pontos,
(c) marcar 6 pontos.
(d) qual o número esperado de pontos marcados em um par de partidas sendo uma em casa e outra fora. Como este resultado deve ser interpretado?

Solução:

$$V_i: \text{vitória} \;\; E_i: \text{empate} \;\; D_i: \text{derrota(na i-ésima partida)}$$
$$P[V_1] = 0,7 \;\; P[E_1] = 0,25 \;\; P[D_1] = 0,05$$
$$P[V_2] = 0,5 \;\; P[E_2] = 0,3 \;\; P[D_1] = 0,2$$
$$Y: \text{número de pontos em duas partidas}$$

y	0	1	2	3	4	6
P[Y=y]	$P[D_1 \cap D_2]$	$P[D_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap D_2]$	$P[E_1 \cap E_2]$	$P[V_1 \cap D_2] + P[D_1 \cap V_2]$	$P[V_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap V_2]$	$P[V_1 \cap V_2]$

Suposição: resultados são independentes

(a) $P[Y=0] = P[D_1 \cap D_2] = P[D_1] \cdot P[D_2] = 0,05 \cdot 0,2 = 0,01$

(b) $P[Y=4] = P[V_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap V_2] = P[V_1] \cdot P[E_2] = P[E_1] \cdot P[V_2] = 0,7 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,335$

(c) $P[Y=6] = P[V_1 \cap V_2] = P[V_1] \cdot P[V_2] = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$

(d) $\mathrm{E}[Y] = \sum y \cdot P[Y=y] = 0 \cdot P[Y=0] + 1 \cdot P[Y=1] + 2 \cdot P[Y=2] + 3 \cdot P[Y=3] + 4 \cdot P[Y=4] + 6 \cdot P[Y=6] = 4,15$

---

61. Certo tipo de fusível tem duração de vida que segue uma distribuição (f.d.p.) exponencial com tempo médio de vida de 100 horas. Cada peça tem um custo de 10,0 unidades monetárias (u.m.) e se durar menos de 20 horas, existe um custo adicional de 8,0 u.m..

(a) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 150 horas?

(b) Qual é a probabilidade de uma durar entre 50 e 120 horas?

(c) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 250 horas sabendo que já durou mais que 100 horas?

(d) Determinar o custo esperado de um lote de 10.000 peças.

Solução:

$$X : \text{duração}$$
$$X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/100)$$
$$f(x) = (1/100)\exp\{-x/100\}\ I_{(0,\infty)}(x)$$

(a) $P[X > 150] = \int_{150}^{\infty} f(x)dx = 1 - F(150) = 0,2231$

(b) $P[50 < X < 120] = \int_{50}^{120} f(x)dx = F(120) - F(50) = 0,3053$

(c) $P[X > 250|X > 100] = \frac{P[X>250 \cap X>100]}{P[X>100]} = \ldots = P[X > 150] = 0,2231$

(d) Y : custo por peça

y	10	18
P[Y=y]	$P[X \geq 20] = 0,8187$	$P[X < 20] = 0,1813$

Custo $= 10.000 \cdot E[Y] = 10.000 \cdot (10 \cdot P[Y=10] + 18 \cdot P[Y=18]) = 114501,54$

---

62. Um vendedor de automóveis sabe que o número de carros vendidos por dia em sua loja comporta-se como uma variável de Poisson cuja média é 2,2 nos dias de bom tempo, e de 0,9 nos dias chuvosos. Se em 65% dos dias faz bom tempo, qual é a probabilidade de que:

(a) não seja vendido nenhum automóvel em um certo dia.

(b) em certo dia do ano sejam vendidos pelo menos três automóveis.

Solução:

$$X : \text{tempo bom}$$
$$X \sim Ber(p = 0.65)$$
$$Y : \text{número de automóveis vendidos}$$
$$Y|(X=0) \sim P(\lambda = 0,9) \quad Y|(X=1) \sim P(\lambda = 2,2)$$

(a) $P[Y=0] = P[Y=0|X=0] \cdot P[X=0] + P[Y=0|X=1] \cdot P[X=1] = \frac{e^{-0,9}0,9^0}{0!} \cdot 0.35 + \frac{e^{-2,2}2,2^0}{0!} \cdot 0.65 = 0,2143$

(b)

$$
\begin{aligned}
P[Y \geq 3] &= 1 - (P[Y=0] + P[Y=1] + P[Y=2]) \\
&= 1 - (P[Y=0|X=0] \cdot P[X=0] + P[Y=0|X=1] \cdot P[X=1] + \\
&+ P[Y=1|X=0] \cdot P[X=0] + P[Y=1|X=1] \cdot P[X=1] + \\
&+ P[Y=2|X=0] \cdot P[X=0] + P[Y=2|X=1] \cdot P[X=1]) \\
&= 1 - \left(\frac{e^{-0,9} 0,9^0}{0!} \cdot 0.35 + \frac{e^{-2,2} 2,2^0}{0!} \cdot 0.65 + \right. \\
&+ \frac{e^{-0,9} 0,9^1}{1!} \cdot 0.35 + \frac{e^{-2,2} 2,2^1}{1!} \cdot 0.65 + \\
&\left. + \frac{e^{-0,9} 0,9^2}{2!} \cdot 0.35 + \frac{e^{-2,2} 2,2^2}{2!} \cdot 0.65 \right) \\
&= 1 - (0,2143 + 0,2865 + 0,2319) = 0,7328
\end{aligned}
$$

---

63. Sabe-se que com determinado tratamento alcança 60% de curas para certa doença quando o mesmo é administrado a pacientes em condições bem definidas. Se tratamento for aplicado a 20 pacientes nessas condições, qual é probabilidade de que:

   (a) Ocorram no máximo 5 curas?

   (b) Ocorram no mínimo 9 e no máximo 11 curas ?

   (c) Qual é o número esperado de curas? E qual a variância?

Solução:

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de curas em 20 pacientes} \\
X &\sim B(n=20, p=0.6) \\
P[X=x] &= \binom{20}{x} (0.6)^x (0.4)^{20-x}
\end{aligned}
$$

(a) $P[X \leq 5] = 0,0016$

(b) $P[9 \leq X \leq 11] = P[X=9] + P[X=10] + P[X=11] = 0,3479$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= n \cdot p = 20 \cdot 0.6 = 12 \\
\mathrm{V}[X] &= n \cdot p \cdot (1-p) = 20 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 4.8
\end{aligned}
$$

---

64. O tempo de duração(em anos) de certo microprocessador, é considerado uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade $f(x) = e^{-\frac{x-k}{10}} \mathrm{I}_{[2,\infty]}(\mathrm{x})$.

   (a) Determine a constante k para que $f(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.

   (b) Determine e interprete $E(X)$ e $Var(X)$;

   (c) Qual é a probabilidade de um microprocessador dure mais de 5 anos em uma escolha aleatória?

   (d) Determine a função de distribuição acumulada da variável tempo de vida.

   (e) Se um microprocessador já está em funcionamento por 7 anos, qual é a probabilidade que dure outros 2 anos?

Solução:

(a) $\int_2^\infty f(x)dx = 1 \longrightarrow k = 2 - 10\log(10)$

(b) $E(X) = 12$ e $Var(X) = 100$

(c) $P[X > 5] = \int_5^\infty f(x)dx = 0,7408$

(d) $F(x) = \int_2^x f(x)dx = 10\left(\exp\{-(2-k)/10\} - \exp\{-(x-k)/10\}\right)$

(e) $P[X > 9|X > 7] = \frac{P[X>9]}{P[X>7]} = P[X > 4] = 0,8187$

Solução computacional com o programa R:

```
> fx <- function(x){k=2-10*log(10); return(exp(-(x-k)/10))}
> integrate(fx, 2, Inf)

1 with absolute error < 0,00011

> Ex <- function(x){k=2-10*log(10); return(x*exp(-(x-k)/10))}
> integrate(Ex, 2, Inf)

12 with absolute error < 6,5e-05

> Vx <- function(x){k=2-10*log(10); return((x-12)^2*exp(-(x-k)/10))}
> integrate(Vx, 2, Inf)

100 with absolute error < 1e-05

> (P5 <-  integrate(fx, 5, Inf))

0,7408 with absolute error < 8,5e-05

> Fx <- function(x){k=2-10*log(10); return(10*(exp(-(2-k)/10) - exp(-(x-k)/10)))}
> 1 - Fx(5)

[1] 0,7408

> (1-Fx(9))/(1-Fx(7))

[1] 0,8187

> 1-Fx(4)

[1] 0,8187
```

---

65. O tempo de afastamentos por motivo de saúde solicitadas em um orgão público em um mês tem distribuição normal de média 250 horas e desvio padrão de 25 horas. Qual a probabilidade de que o tempo de afastamento no próximo mês:

(a) fique entre 200 e 300 horas;

(b) não ultrapasse 280 horas;

(c) se afaste de média por mais de 40 horas.

Qual o tempo de afastamento que

(d) é superado com probabilidade de apenas 0,05;

(e) deve se superado em 90% dos meses.

Solução:

$$X : \text{tempo de afastamento}$$
$$X \sim N(\mu = 250, \sigma^2 = 25^2)$$

(a) $P[200 < X < 300] = P[\frac{200-250}{25} < Z < \frac{300-250}{25}] = P[-2 < Z < 2] = 2 \cdot P[0 < Z < 2] = 2 \cdot 0,4772 = 0,9545$

(b) $P[X \leq 280] = P[Z < \frac{280-250}{25}] = P[Z < 1,2] = 0,5 + P[0 < Z < 1,2] = 0,5 + 0,3849 = 0,8849$

(c) $P[|X - 250| > 40] = P[X < 210] + P[X > 290] = P[Z < \frac{210-250}{25}] + P[Z > \frac{290-250}{25}] = P[Z < -1,6] + P[Z > 1,6] = 2 \cdot (0,5 - 0,4452) = 0,1096$

(d) $P[X > K_1] = 0,05 \longrightarrow z = 1,645 \longrightarrow \frac{K_1-250}{25} = 1,645 \longrightarrow K_1 = 291,1.$

(e) $P[X > K_2] = 0,90 \longrightarrow z = -1,282 \longrightarrow \frac{K_2-250}{25} = -1,282 \longrightarrow K_2 = 218.$

```
> ## a)
> diff(pnorm(c(200,300), m=250, sd=25))

[1] 0,9545

> ## b)
> pnorm(280, m=250, sd=25)

[1] 0,8849

> ## c)
> pnorm(210, m=250, sd=25) + pnorm(290, m=250, sd=25, low=FALSE)

[1] 0,1096

> ## d)
> qnorm(0.95, m=250, sd=25)

[1] 291,1

> ## e)
> qnorm(0.10, m=250, sd=25)

[1] 218
```

---

66. O tempo de atendimento a usuários em uma central de atendimento tem distribuição normal de média 12 minutos de desvio padrão de 2 minutos. Qual a probabilidade de que uma chamada dure:

(a) dure menos que 10 minutos;

(b) mais que 15 minutos.

Solução:

$$X : \text{tempo de atendimento (min)}$$
$$X \sim N(\mu = 12, \sigma^2 = 2^2)$$

(a) $P[X < 10] = P[Z < \frac{10-12}{2}] = P[Z < -1] = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$

(b) $P[X > 15] = P[Z > \frac{15-12}{2}] = P[Z > 1,5] = 0,5 - 0,4332 = 0,0668$

```
> # a)
> pnorm(10, m=12, sd=2)

[1] 0,1587

> # b)
> pnorm(15, m=12, sd=2, lower=FALSE)

[1] 0,06681
```

---

67. Em um mercado, três corretoras, A, B e C são responsáveis por 20, 50 e 30% do volume total de contratos negociados, respectivamente. Do volume de cada corretora, 20, 5 e 2% respectivamente, são contratos futuros em dólares. Um contrato é escolhido ao acaso e verifica-se que é futuro em dólares. Qual a probabilidade de ter sido negociado pela corretora A ? E pela corretora C ?

Solução:
Solução computacional com o programa R:

```
> COR <- c(0.2, 0.5, 0.3)
> FDdCOR <- c(0.20, 0.05, 0.02)
> FD <- sum(COR*FDdCOR)
> (AdFD  <- COR[1] * FDdCOR[1]/FD)

[1] 0,5634

> (CdFD  <- COR[3] * FDdCOR[3]/FD)

[1] 0,08451
```

---

68. A probabilidade de um programador cometer um erro de sintaxe em uma primeira versão de seu trabalho é de 2/5. Caso cometa o erro de sintaxe, a probabilidade de comentar um erro de lógica é de 7/10, caso contrário essa probabilidade é de 1/4. Calcule a probabilidade de ele:

(a) cometer os dois erros
(b) cometer apenas um dos erros
(c) não cometer erros.

Solução:
Notação e dados:

$$\begin{aligned} S &: \text{comete erro de sintaxe} \\ L &: \text{comete erro de lógica} \\ P[S] &= 2/5 \\ P[L|S] &= 7/10 & P[L|\overline{S}] &= 1/4 \\ &\text{Portanto} \\ P[\overline{L}|S] &= 3/10 & P[\overline{L}|\overline{S}] &= 3/4 \end{aligned}$$

(a) $P[S \cap L] = P[S] \cdot [L|S] = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = 7/25 = 0,28$
(b) $P[S \cap \overline{L}] + P[\overline{S} \cap S] = P[S] \cdot [\overline{L}|S] + P[\overline{S}] \cdot P[L|\overline{S}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = 27/100 = 0,27$

(c) $P[\overline{S} \cap \overline{L}] = P[\overline{S}] \cdot [\overline{L}|\overline{S}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = 9/20 = 0,45$

---

69. Dizemos que uma variavel aleatória tem distribuição triangular no intervalo $[0;1]$ se sua densidade é dada por: $f(x) = cx$ para $0 \leq x \leq 1/2$, $f(x) = c(1-x)$ para $1/2 < x \leq 1$, e $f(x) = 0$ para os demais valores de x.

    (a) Determine o valor da constante c.

    (b) Calcule $P(X > 8/10)$.

    (c) Calcule $P(1/4 < X < 3/4)$.

    (d) Obtenha os quartis da distribuição de X.

    (e) Calcule $P(X < 3/4 | X \geq 1/3)$

    Solução:

---

70. Um colégio tem em seu corpo docente sete professores de Biológicas, oito professores de Exatas e nove professores de Humanas. Uma comissão de sete professores será selecionada aleatoriamente. Determine a probabilidade de que nesta comissão haja pelo menos um professor de cada área?

    Solução:

---

71. No problema anterior suponha agora que a comissão será de 3 professores e estamos interessados no número de professores de exatas nesta comissão. Obtenha a distribuição de probabilidades dessa v.a.

    Solução:

---

72. Uma fábrica de sorvete recebe o leite que utiliza de três linhas de fornecimento: 20% da linha A, 30% da linha B e 50% da linha C. Um órgão de fiscalização inspecionou as linhas e constatou que 20% dos galoões de leite de linha A estavam adulterados por adição de água, enquanto que para as fazendas B e C essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. A fábrica de sorvete recebe o leite em galões, que são armazenados em um refrigerador, sem identificação da linha de proveniência. Um galão é escolhido ao acaso e seu conteúdo é testado para verificar adulteração.

    (a) Qual a probabilidade de que o galão contenha leite adulterado?

    (b) Sabendo que o teste constatou que o leite do galão está adulterado, obtenha a probabilidade de que o galão seja proveniente da linha A?

    Solução:

---

73. Uma secretária recebe chamadas telefônicas independente e aleatoriamente. Chamadas internas chegam a uma taxa média de duas chamadas por período de cinco minutos, enquanto que as externas chegam com média de uma a cada cinco minutos. Calcule a probabilidade de que hajam mais que duas chamadas em qualquer período de dois minutos.

Solução:

$$
\begin{aligned}
&X_1 : \text{número de chamadas internas a cada 5 min}\\
&X_2 : \text{número de chamadas externas a cada 5 min}\\
&\quad\text{é razoável supor que:}\\
&X_1 \sim \mathrm{P}(\lambda_1 = 2) \text{ e } X_2 \sim \mathrm{P}(\lambda_2 = 1)\\
&\quad\text{desta forma:}\\
&X : \text{número de chamada a cada 2 min}\\
&X \sim \mathrm{P}(\lambda = \frac{2}{5}\lambda_1 + \frac{2}{5}\lambda_2 = \frac{6}{5} = 1,2)
\end{aligned}
$$

$$P[X > 2] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]\} = 1 - \{\frac{e^{-1,2}(1,2)^0}{0!} + \frac{e^{-1,2}(1,2)^1}{1!} + \frac{e^{-1,2}(1,2)^2}{2!}\} = 0,92$$

---

74. Considere que um time de futebol tem probabilidade 0,7 de vitória, 0,25 de empate e 0,05 de perder quando joga em casa e 0,5 de vitória, 0,3 de empate e 0,2 de derrota quando joga fora. O time ganha 3 pontos quando vence, 1 quando empata e não marca pontos quando perde. Se vai jogar uma partida em casa e uma fora, qual a probabilidade de:

(a) não marcar pontos,

(b) marcar 4 pontos,

(c) marcar 6 pontos.

(d) qual o número esperado de pontos marcados em um par de partidas sendo uma em casa e outra fora. Como este resultado deve ser interpretado?

Solução:

$$
\begin{aligned}
&V_i : \text{vitória} \;\; E_i : \text{empate} \;\; D_i : \text{derrota(na i-ésima partida)}\\
&\quad P[V_1] = 0,7 \;\; P[E_1] = 0,25 \;\; P[D_1] = 0,05\\
&\quad P[V_2] = 0,5 \;\; P[E_2] = 0,3 \;\; P[D_1] = 0,2\\
&Y : \text{número de pontos em duas partidas}
\end{aligned}
$$

y	0	1	2	3	4	6
P[Y=y]	$P[D_1 \cap D_2]$	$P[D_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap D_2]$	$P[E_1 \cap E_2]$	$P[V_1 \cap D_2] + P[D_1 \cap V_2]$	$P[V_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap V_2]$	$P[V_1 \cap V_2]$

Suposição: resultados são independentes

(a) $P[Y = 0] = P[D_1 \cap D_2] = P[D_1] \cdot P[D_2] = 0,05 \cdot 0,2 = 0,01$

(b) $P[Y = 4] = P[V_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap V_2] = P[V_1] \cdot P[E_2] = P[E_1] \cdot P[V_2] = 0,7 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,335$

(c) $P[Y = 6] = P[V_1 \cap V_2] = P[V_1] \cdot P[V_2] = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$

(d) $\mathrm{E}[Y] = \sum y \cdot P[Y = y] = 0 \cdot P[Y = 0] + 1 \cdot P[Y = 1] + 2 \cdot P[Y = 2] + 3 \cdot P[Y = 3] + 4 \cdot P[Y = 4] + 6 \cdot P[Y = 6] = 4,15$

---

75. Acredita-se que numa certa população, 20% de seus habitantes sofrem de algum tipo de alergia e são classificados como alérgicos para fins de saúde pública. Sendo alérgico, a probabilidade de ter reação a um certo antibiótico é 0,5. Para os não alérgicos essa probabilidade é de apenas 0,05. Uma pessoa dessa população teve reação ao ingerir o antibótico, qual a probabilidade de:

(a) ser do grupo não alérgico?

(b) ser do grupo alérgico?

Solução:

$$\begin{aligned}
&A: \text{alergia} \quad \bar{A}: \text{não alergia} \quad R: \text{reação} \quad \bar{R}: \text{não reação}\\
&P[A] = 0,20 \quad P[R|A] = 0,5 \quad P[R|\bar{A}] = 0,05\\
&a) P[\bar{A}|R] = \frac{P[\bar{A} \cap R]}{P[R]} = \frac{P[R|\bar{A}] \cdot P[\bar{A}]}{P[R|\bar{A}] \cdot P[\bar{A}] + P[R|A] \cdot P[A]} = \frac{0,05 \cdot 0.80}{0,05 \cdot 0.80 + 0,5 \cdot 0.20} = 0,2857\\
&b) P[A|R] = 1 - P[\bar{A}|R] = 0,7143
\end{aligned}$$

---

76. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x) = \kappa\, x^2\, I_{[-1,1]}(x)$.

(a) Determine o valor da constante κ.

(b) Calcule $P(|X| > 1/2)$.

(c) Ache o valor de A tal que $F(A) = P(X \leq A) = 1/4$.

(d) Calcular $E(X)$.

Solução:

(a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1 \longrightarrow \kappa = 3/2$

(b) $P(|X| > 1/2) = P(X < -1/2) + P(X > 1/2) = \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx + \int_{1/2}^{-1} f(x)dx = 0,875$

(c) $\int_{-1}^{A} f(x)dx = 1/4 \longrightarrow A = -1/\sqrt[3]{2} = -0,7937$

(d) $E(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot f(x)dx = \int_{-1}^{1}(3/2)x^3dx = 0$

---

77. Lâminas de metal apresentam defeitos no cromado, segundo uma distribuição de Poisson, com uma média de 0,8 defeito por m^2. Essas laminas são usadas para construção de janelas para uma instalação industrial cuja dimensões são de 150×200 cm.

(a) Qual o número esperado de falhas por janela?

(b) Qual a probabilidade de uma janela não apresentar defeito?

(c) Sabendo que uma janela tem defeito(s) qual a probabilidade de ter mais que um defeito?

(d) Em um grupo 10 dessas janelas qual é a probabilidade de que no máximo 2 delas não tenha nenhum defeito?

(e) Em 500 lotes de 3 janelas, quantos espera-se que não apresentem nenhuma janela com defeito?

Solução:

$$\begin{aligned}
&X: \text{defeitos por } m^2\\
&X \sim P(\lambda_X = 0,8)\\
&Y: \text{defeitos por janela}\\
&Y \sim P(\lambda_Y = 0,8 \cdot 1,5 \cdot 2 = 2,4)
\end{aligned}$$

(a) $E(Y) = \lambda_Y = 2,4$

(b) $P[Y = 0] = \frac{e^{-2,4} 2,4^0}{0!} = 0,0907$

(c) $P[X > 1 | X \neq 0] = \frac{P[X>1]}{P[X \geq 1]} = \frac{1-P[X=0]-P[X=1]}{1-P[X=0]} = 0,7606$

(d)

$$\begin{aligned}
&Z : \text{número de janelas sem defeito em um grupo de 10}\\
&Z \sim B(n = 10, p = 0,0907)\\
P[Z \leq 2] &= P[Z = 0] + P[Z = 1] + P[Z = 2] = 0,9449
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
&W : \text{número de janelas sem defeito em um grupo de 3}\\
&W \sim B(n = 3, p = 0,0907)\\
500 \cdot P[W \geq 1] &= 500 \cdot (1 - P[W = 0]) = 124
\end{aligned}$$

---

78. Em uma fábrica, a máquina A produz por dia o triplo de peças que a máquina B e, a máquina C o quádruplo da máquina A. Sabe-se que 6% das peças fabricadas pela máquina A tendem a ser defeituosas, 4% das peças produzidas pela máquina B tendem a ser defeituosas, enquanto 8% de peças defeituosas da máquina C. A produção diária de todas as máquinas é misturada. Extraída uma amostra aleatória (com reposição) de 20 peças, qual é a probabilidade de que essa amostra contenha:

(a) No máximo duas peças defeituosas?

(b) Entre três e cinco peças defeituosas?

(c) Se uma peça é defeituosa, qual a probabilidade de ter vindo da máquina A?

Solução:

$$\begin{aligned}
P[A] = 3/16 \quad &; \quad P[B] = 1/16 \quad ; \quad P[C] = 12/16\\
P[D|A] = 0,06 \quad &; \quad P[D|B] = 0,04 \quad ; \quad P[D|C] = 0,08\\
pD = P[D] &= P[D \cap A] + P[D \cap B] + P[D \cap C] = P[D|A]P[A] + P[D|B]P[B] + P[D|C]P[C] = 0,07375\\
&X : \text{número de defeituosas em 20 peças}\\
&X \sim B(n = 20, p = 0,07375)
\end{aligned}$$

(a) $P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 1$

(b) $P[3 \leq X \leq 5] = P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = 0$

(c) $P[A|D] = \frac{P[D|A]P[A]}{P[D]} = \frac{(0{,}06)(3/16)}{0{,}07375} = 0,1525$

---

79. Um exame de múltipla escolha consiste em 10 questões, cada uma com cinco possibilidades de escolha. A aprovação exige no mínimo 50%. Qual a chance de aprovação, se:

(a) O candidato comparece ao exame sem saber absolutamente nada, apelando apenas para o palpite.

(b) O candidato tem um conhecimento parcial do conteúdo, suficiente para poder eliminar três escolhas, devendo então apenas entre as duas escolhas restantes.

Solução:

$$X : \text{número de questões certas}$$

(a)

$$\begin{aligned}
&X \sim B(n = 10, p = 0,2)\\
P[X \geq 5] &= P[X = 5] + P[X = 6] + \ldots + P[X = 10] = 0,0328
\end{aligned}$$

(b)

$$X \sim B(n = 10, p = 0,5)$$
$$P[X \geq 5] = P[X = 5] + P[X = 6] + \ldots + P[X = 10] = 0,623$$

---

80. O Departamento de Matemática é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída, sorteando-se, ao acaso, três membros do departamento.

    (a) Qual a probabilidade a comissão ser formada somente por homens?
    (b) Qual a probabilidade a comissão ser formada por pelo menos duas mulheres?
    (c) O valor esperado e variância do número de mulheres na comissão.
    (d) A função de distribuição acumulada.

Solução:

$$X : \text{número de homens na comissão}$$
$$X \sim HG(N = 35, n = 3, r = 21)$$
$$P[X = x] = \frac{\binom{21}{x}\binom{14}{3-x}}{\binom{35}{3}}$$

(a) $P[X = 3] = \frac{\binom{21}{3}\binom{14}{3-3}}{\binom{35}{3}} = 0,2032$

(b) $P[X \leq 1] = P[X = 0] + P[X = 1] = 0,3476$

(c) $3 - E[X] = 1,2$

(d) $F[X] = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{21}{k}\binom{14}{3-k}}{\binom{35}{3}}$

---

81. Uma pessoa está discando um número de telefone e conhece todos os dígitos, mas esqueceu-se somente da ordem dos últimos três (que são algarismos diferentes). Essa pessoa disca, variando aleatóriamente esses três últimos dígitos, até encontrar o número correto. Admitindo que não repita números discados, qual é a probabilidade de ser necessário discar 5 números errados antes de acertar?

Solução:

$n(\Omega) = 6 \quad A : \text{acerto}$

$$P[\text{acerto em qualquer das } 3 \times 2 \times 1 = 1 \text{ tentativas possíveis}] = \frac{n(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

não repete o número: as chances de acerto são iguais e há 6 possíveis tentativas ou ...

X : número de tentativas frustradas até acerto

A : acerto $\quad E$: erro

$$P[X = 4] = P[E] \cdot P[E] \cdot P[E] \cdot P[E] \cdot P[A] = (\frac{5}{6}) \cdot (\frac{4}{5}) \cdot (\frac{3}{4}) \cdot (\frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} = 0,167$$

---

82. Ainda no contexto da questão anterior, assuma agora que a pessoa não sabe quais são os 3 últimos dígitos e resolve tentar aleatoriamente podendo ainda repetir o número discado.

    - qual a probabilidade de conseguir em, no máximo 4, tentativas?
    - qual seria o número esperado de tentativas para se conseguir discar o número correto?

Solução:

$$\begin{aligned}&X : \text{número de tentativas frustradas até acerto}\\&X \sim G(p) \quad P[X = x] = p\,(1-p)^x\\&p = P[\text{acerto}] = \frac{1}{1000}\end{aligned}$$

- $P[X \leq 3] = \sum_{x=0}^{3} p\,(1-p)^3 = 0,00399$
- $1 + E[X] = 1 + \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} = 1000$

---

83. Para cada uma das funções abaixo diga se é uma f.d.p. (função de densidade de probabilidade) válida justificando a resposta.

a) $f(x) = 1 - x \;\; ; \;\; 0 < x < 2$

b) $f(x) = (1/2)\exp\{-x/2\} \;\; ; \;\; 0 < x < +\infty$

c) $f(x) = 3\,x^2 \;\; ; \;\; -1 < x < 0$

d) $f(x) = |x - 1|/2 \;\; ; \;\; 0 < x < 2$

e) $f(x) = 1/10 \;\; ; \;\; -0,1 < x < 0,1$

Solução:
Condições a serem verificadas e obedecidas:

- $f(x) \geq 0 \; \forall x$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

As condições devem ser verificadas para cada função.
A seguir é feita uma verificação numérica somente para ilustração.

a) $f(x) = 1 - x \;\; ; \;\; 0 < x < 2$ não é f.d.p.

```
> fa <- function(x) ifelse((x > 0 & x < 2), 1-x, 0)
> all(fa(seq(0,2,l=1000)) >= 0)

[1] FALSE

> integrate(fa, 0, 1)$val

[1] 0,5

> integrate(fa, 1, 2)$val

[1] -0,5

> round(integrate(fa, 0, 2)$val, dig=5)

[1] 0
```

b) $f(x) = (1/2)\exp\{-x/2\} \;\; ; \;\; 0 < x < +\infty$ é f.d.p.

```
> fb <- function(x) ifelse(x > 0, 0.5*exp(-x/2), 0)
> all(fb(seq(0,10000,l=1000)) >= 0)

[1] TRUE

> round(integrate(fb, 0, Inf)$val, dig=5)

[1] 1
```

c) $f(x) = 3\,x^2 \;\; ; \;\; -1 < x < 0$ é f.d.p.

```
> fc <- function(x) ifelse((x > -1 & x < 0), 3*x^2, 0)
> all(fc(seq(-1,0, l=1000)) >= 0)
```

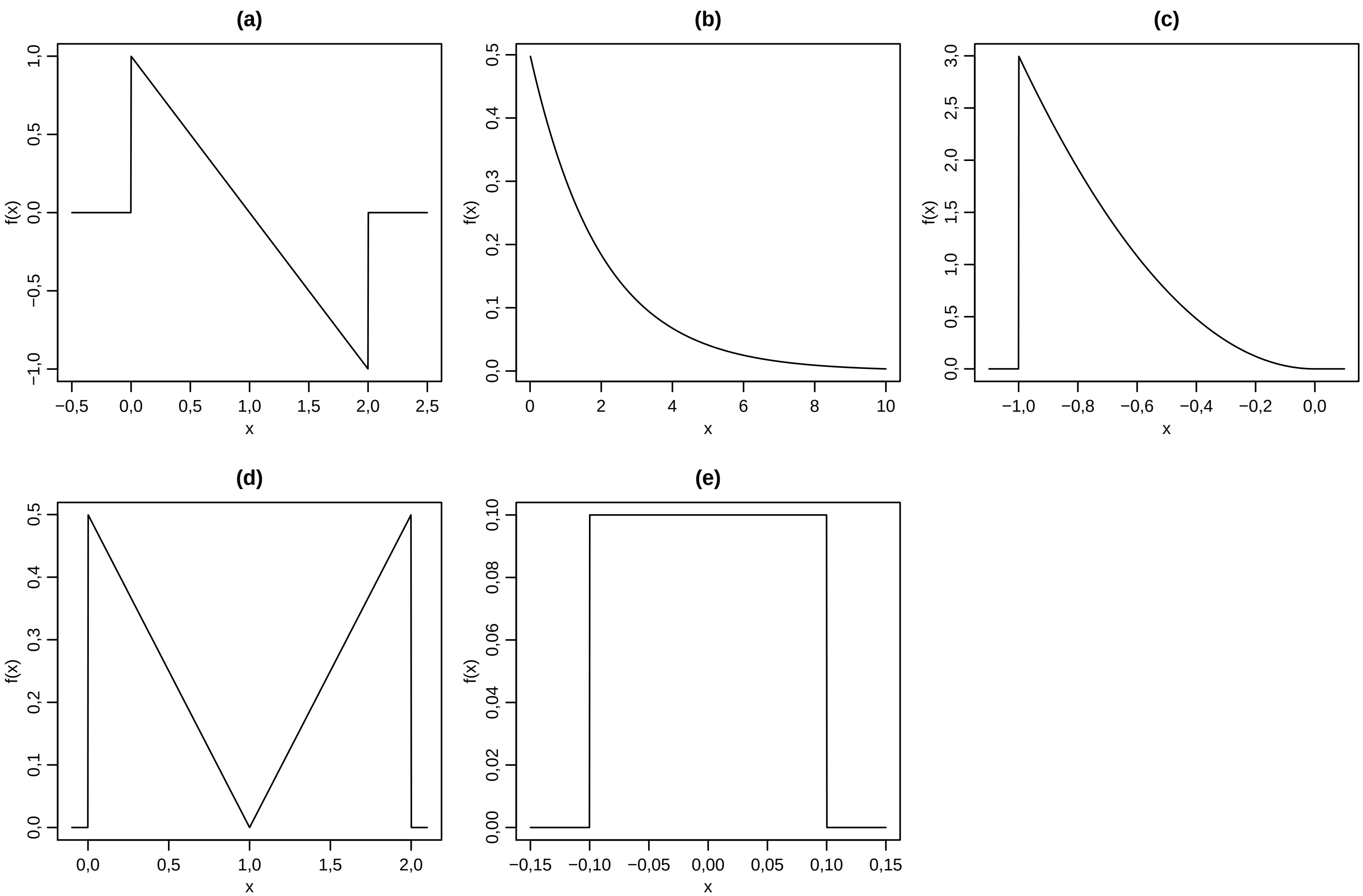
```
[1] TRUE
> round(integrate(fc, -1, 0)$val, dig=5)
[1] 1
```

d) $f(x) = |x-1|/2$; $0 < x < 2$ não é f.d.p.

```
> fd <- function(x) ifelse(x > 0 & x < 2, abs(x-1)/2, 0)
> all(fd(seq(0,2,l=1000)) >= 0)
[1] TRUE
> round(integrate(fd, 0, 2)$val, dig=5)
[1] 0,5
```

e) $f(x) = 1/10$; $-0,1 < x < 0,1$ não é f.d.p.

```
> fe <- function(x) ifelse((x > -0.1 & x < 0.1), 1/10, 0)
> all(fe(seq(-0.1, 0.1,l=1000)) >= 0)
[1] TRUE
> round(integrate(fe, -0.1, 0.1)$val, dig=5)
[1] 0,02
```



---

84. Na comunicação entre servidores, uma mensagem é dividida em n pacotes, os quais são enviados na forma de códigos. Pelo histórico da rede sabe-se que cada pacote tem uma probabilidade de 0,01 de não chegar corretamente a seu destino, e além disto, assume-se que o fato de um pacote chegar ou não corretamente ao destino não altera a probabilidade de chegada correta de outros pacotes. Um programa corretivo, garante o envio correto da mensagem quando o número de pacotes enviados erroneamente não passar de 10% do total de pacotes da mensagem.

(a) Qual a probabilidade de uma mensagem composta de 20 pacotes ser enviada corretamente?

(b) e para uma mensagem de 200 pacotes?

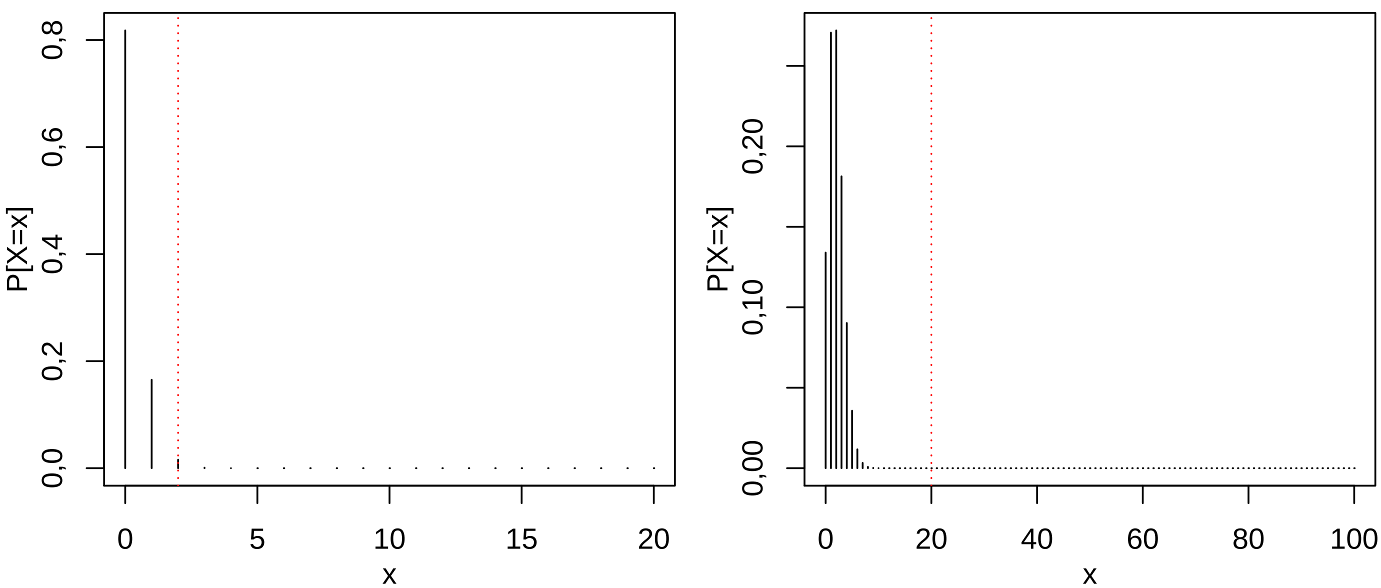
Solução:

(a)

$$X: \text{ número de pacotes incorretos em 20 pacotes}$$
$$X \sim B(n = 20, p = 0,01)$$
$$\text{limite : 10\% de 20 pacotes} = 2 \text{ pacotes}$$
$$P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = \sum_0^2 \binom{20}{x} (0,01)^x (1 - 0,01)^{20-x} = 0,999$$

(b)

$$X \sim B(n = 200, p = 0,01) \approx P(\lambda = n \cdot p = 200 \cdot 0,01 = 2)$$
$$\approx N(\mu = n \cdot p = 2, \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 1,98)$$
$$\text{a aproximação normal não é muito acurada pois } np < 5, \text{ porém conveniente}$$
$$\text{limite : 10\% de 200 pacotes} = 20 \text{ pacotes}$$
$$P[X \leq 20] = P[X = 0] + P[X = 1] + \ldots + P[X = 20] =$$
$$= \sum_0^{20} \binom{200}{x} (0,01)^x (1 - 0,01)^{200-x} \approx \sum_0^{20} \frac{e^{-2} 2^x}{x!} \approx P[X_N < 20,5] = P[Z < \frac{20,5 - 2}{\sqrt{1,98}}] \approx 1$$



---

85. O tempo para que um sistema execute determinada tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal, com média de 320 segundos e desvio padrão de 8 segundos.

 (a) qual a probabilidade da tarefa ser executada em menos que 300 segundos?
 (b) qual a probabilidade da tarefa ser executada em mais que 330 segundos?
 (c) qual o tempo abaixo do qual espera-se executar 90% das tarefas?
 (d) cobra-se 5 centavos por tarefas executadas em menos que 310 segundos, 3 centavos entre 310 e 325 segundos e não se cobra para tarefas executadas acima de 325 segundos. Qual o valor esperado do pagamento por 100.000 tarefas executadas?

Solução:

$$X: \text{ tempo para execução}$$
$$X \sim N(320, 8^2)$$

(a) $P[X < 300] = P[Z < \frac{300-320}{8}] = P[Z < -2,5] = 0,006$

(b) $P[X > 330] = P[Z > \frac{330-320}{8}] = P[Z > 1,25] = 0,106$

(c) $z_{0,90} = 1,28155 \longrightarrow z_{0,90} = \frac{q_{0,90}-\mu}{\sigma} \longrightarrow q_{0.90} = 330,3$

(d)

$$Y: \text{ valor cobrado (centavos)}$$

y	0	3	5
$P[Y = y]$	p_1	p_2	p_3

$$p_1 = P[X > 325] = 0,266$$
$$p_2 = P[310 < X < 325] = 0,6284$$
$$p_3 = P[X < 310] = 1 - p_1 - p_2 = 0,1056$$

Valor esperado em 100.000 execuções:
$100.000 \cdot E[Y] = \sum_{i=1}^{3} y_i\, P[Y = y_i] = 0 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 5 \cdot p_3 = 241,33$ centavos $= R\$24133,43$

Solução computacional com o programa *R*

```
> ta <- pnorm(300, 320, 8)
> tb <- pnorm(330, 320, 8, low=FALSE)
> tc <- qnorm(0.9, 320, 8)
> p1 <- pnorm(325, 320, 8, low=FALSE)
> p2 <- diff(pnorm(c(310, 325), 320, 8))
> p3 <- pnorm(310, 320, 8)
> VE <- sum(100.000 * c(p1,p2,p3) * c(0,3,5))
```

---

86. O tempo para completar uma determinada tarefa de filtragem e classificação de imagens possui distribuição normal de média 20 segundos e desvio padrão de 2 segundos.

(a) Se um grande número de imagens é processada, qual a proporção esperada de imagens que devem ser processadas em mais de 23 segundos?

(b) Se 15.000 são processadas, espera-se que quantas levem menos que 16 segundos para serem processadas?

(c) Se o processamento é interrompido após 25 segundos, quantas são esperadas, dentre as 15.000, não terão processamento completo?

(d) Qual o tempo de processamento necessário para classificar 80% das imagens?

(e) Qual deveria ser o tempo médio de processamento para que 90% das imagens fosse classificada em menos que 20 segundos?

Solução:

$$X: \text{tempo de procesamentos (segundos)}$$
$$X \sim N(\mu = 20, \sigma^2 = 2^2)$$

(a) $P[X > 23] = P[Z > \frac{23-20}{2}] = P[Z > 1,5] = 0,5 - P[0 < Z < 1,5] = 0,5 - 0,4332 = 0,06681$

(b)

$$P[X < 16] = P[Z < \frac{16-20}{2}] = P[Z < -2] = 0,5 - P[0 < Z < -2] = 0,5 - 0,4772 = 0,02275$$

Número esperado : $n = 15.000 \cdot 0,02275 = 341$

(c)

$$P[X > 25] = P[Z > \frac{25-20}{2}] = P[Z > 2,5] = 0,5 - P[0 < Z < 2,5] = 0,5 - 0,4938 = 0,00621$$

Número esperado : $n = 15.000 \cdot 0,00621 = 93$

(d)

$$\begin{aligned} P[X < x] &= 0,80 \\ P[Z < 0,8416] = 0,80 & \\ z &= \frac{x-\mu}{s} \\ 0,8416 &= \frac{x-20}{2} \\ x &= 21,7 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} P[X < 20] &= 0,90 \\ P[Z < 1,282] = 0,90 & \\ z &= \frac{x-\mu}{s} \\ 1,282 &= \frac{20-\mu}{2} \\ \mu &= 17,44 \end{aligned}$$

Solução computacional com o programa *R*:

```
> p.a <- pnorm(23, m=20, sd=2, low=F)
> p.b <- pnorm(16, m=20, sd=2); nb <- 15000*p.b
> p.c <- pnorm(25, m=20, sd=2, low=F) ; n.c <- 15000*p.c
> q.d <- qnorm(0.80, m=20, sd=2)
> mu.e  <- 20 - qnorm(0.90) * 2
```

---

87. Seja uma variável aleatória X com distribuição exponencial com densidade $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)(x)}$ Mostre como obter a média (E[X]), mediana, quartis e moda desta distribuição.

---

88. Um determinado elemento é medido regularmente em amostras de água e os valores possuem distribuição normal de média 500 e desvio padrão de 20 unidades.

   (a) Se um grande número de amostras é processada, qual a proporção esperada de amostras com teores acima da 525 unidades?
   (b) Se 6.000 são processadas, quantas devem apresentar teores entre 470 e 510 unidades?
   (c) Se uma amostra é considerada suspeita e enviada para reanálise se apresenta teor acima de 535 unidades, quantas dentre as 6.000 serão enviadas para reanálise?
   (d) Considera-se como teores *usuais* 80% dos valores ao redor da média. Quais os valores que determinam a faixa de teores *usuais*.
   (e) Qual deveria ser o teor médio para que 90% das amostras estivessem abaixo de 500 unidades?

Solução:

$$X : \text{tempo de procesamentos (segundos)}$$
$$X \sim N(\mu = 500, \sigma^2 = 20^2)$$

(a) $P[X > 525] = P[Z > \frac{525-500}{20}] = P[Z > 1,25] = 0,5 - P[0 < Z < 1,25] = 0,5 - 0,3944 = 0,1056$

(b)

$$P[470 < X < 510] = P[\frac{470-500}{20} < Z < \frac{510-500}{20}] = P[-1,5 < Z < 0,5] =$$
$$= P[0 < Z < 1,5] + P[0 < Z < 0,5] = 0,4332 + 0,1915 = 0,6247$$
$$\text{Número esperado} : n = 6.000 \cdot 0,6247 = 3748$$

(c)

$$P[X > 535] = P[Z > \frac{535-500}{20}] = P[Z > 1,75] = 0,5 - P[0 < Z < 1,75] = 0,5 - 0,4599 = 0,04006$$
$$\text{Número esperado} : n = 6.000 \cdot 0,04006 = 240$$

(d)

$$P[x_1 < X < x_2] = P[z_1 < Z < z_2] = 0,80$$
$$P[-1,282 < Z < 1,282] = 0,80$$
$$z = \frac{x-\mu}{s}$$
$$-1,282 = \frac{x_1 - 500}{20}$$
$$x_1 = 474,4$$
$$1,282 = \frac{x_2 - 500}{20}$$
$$x_2 = 525,6$$

(e)

$$P[X < 500] = 0,90$$
$$P[Z < 1,282] = 0,90$$
$$z = \frac{x-\mu}{s}$$
$$1,282 = \frac{500-\mu}{20}$$
$$\mu = 474,4$$

Solução computacional com o programa R:

```
> p.a <- pnorm(525, m=500, sd=20, low=F)
> p.b <- diff(pnorm(c(470,510), m=500, sd=20)); na <- 6000*p.b
> p.c <- pnorm(535, m=500, sd=20, low=F) ; n.c <- 6000*p.c
> q.d <- qnorm(c(0.10, 0.90), m=500, sd=20)
> mu.e  <- 500 - qnorm(0.90) * 20
```

---

89. Em um bairro existem três empresas de TV a cabo e 20 mil residências. A empresa TA tem 2100 assinantes, a TB tem 1850 e a TC tem 2600 assinantes. Em algumas residências de alguns condomínios subscreve-se a mais de uma empresa. Assim, temos 420 residências que são assinantes de TA e TB, 120 de TA e TC, 180 de TB e TC e 30 das três empresas. Se uma residência deste bairro é sorteada ao acaso, qual a probabilidade de:

(a) Ser assinante somente de TA?

(b) Assinar ao menos uma?

(c) Não ter TV a cabo?

(d) Assinar mais que uma empresa?

Solução:
Solução computacional com o programa R:

(a)
```
> (2100 - 420 - 120 + 30)/20000
[1] 0,0795
> #
> assina <- 2100 + 1850 + 2600 - 420 - 120 - 180 + 30
> assina/20000
[1] 0,293
> #
> 1 - (assina/20000)
[1] 0,707
> #
> (420 + 120 + 180 - (2* 30))/20000
[1] 0,033
```

---

90. Seja uma v.a. com função de densidade de probabilidade (f.d.p.) $f(x) = (1/2)\ \mathrm{e}^{-(x-3)/2}\mathrm{I}_{(3,+\infty)}(x)$.

(a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p. válida.

(b) Obtenha a mediana.

(c) Obtenha $P[X > 5]$

(d) Obtenha $P[5 < X < 10]$

(e) Obtenha $P[X > 10|X > 5]$

Solução:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-(x-3)/2}\mathrm{I}_{(3,+\infty)}(x)$$

$$F(x) = \int_3^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-2)\mathrm{e}^{-(x-3)/2}\Big|_3^x = -(\mathrm{e}^{-(x-3)/2} - \mathrm{e}^0) = 1 - \mathrm{e}^{-(x-3)/2}$$

E os quantis desta distribuição são obtidos de forma analítica por:

$$p = 1 - \mathrm{e}^{-(x(p)-3)/2}$$

$$\log(p-1) = \frac{x(p)-3}{2}$$

$$x(p) = 3 - 2\log(p-1)$$

(a) Para ser uma f.d.p. válida $f(x)$ deve satisfazer duas condições, que se verificam neste caso:

$$(i) f(x) \geq 0\ \forall x \quad \text{uma vez que } e^y > 0 \forall y$$

$$(ii) \int_3^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-2)\mathrm{e}^{-(x-3)/2}\Big|_3^{+\infty} = -(\mathrm{e}^{-\infty} - \mathrm{e}^0) = -(0-1) = 1$$

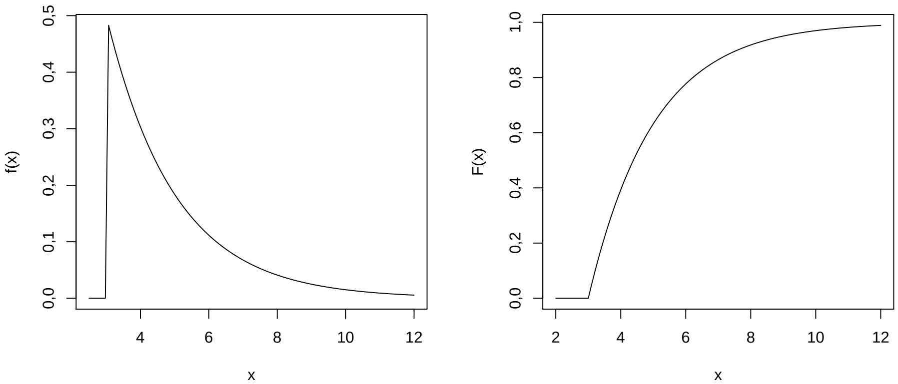


Figura 4: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição (direita).

(b) Mediana é genericamente dada por $\mathrm{Md}(x) = \int_3^{\mathrm{Md}(x)} f(x)\mathrm{d}x$, mas utilizando a expressão de quantis vista acima para esta $f(x)$:

$$x(p) = 3 - 2\log(p-1)$$
$$x(0,5) = 3 - 2\log(0,5-1) = 4,39$$

(c) $P[X > 5] = \int_5^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-(5-3)/2}) = 0,368$

(d) $P[5 < X < 10] = F(10) - F(5) = (1 - e^{-(10-3)/2}) - (1 - e^{-(5-3)/2}) = 0,338$

(e) $P[X > 10|X > 5] = \frac{P[(X>10)\cap(X>5)]}{P[X>5]} = \frac{P[X>10]}{P[X>5]}\frac{1-F(10)}{1-F(5)} = \frac{1-(1-e^{-(10-3)/2})}{1-(1-e^{-(5-3)/2})} == \frac{e^{-(10-3)/2}}{e^{-(5-3)/2}} = e^{-5/2} = 0,0821$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> ## Definindo funções f(x) e F(x)
> dfx <- function(x) ifelse(x >= 3, (1/2)*exp(-(x-3)/2), 0)
> pfx <- function(x) ifelse(x < 3, 0, 1-exp(-(x-3)/2))
> # Definindo uma função para calcular quantis
> qfx <- function(p) ifelse(p >=0 & p<=1, 3-2*log(1-p), NA)
> ## (a)
> (la <- integrate(dfx, 3, Inf)$value)

[1] 1

> pfx(Inf)

[1] 1

> ## (b) duas formas de obter mediana: (i) integração (ii) expressão analítica
> (lb <- optimize(function(md) (integrate(dfx, 3, md)$value - 0.5)^2, c(3, 30))$min)

[1] 4,386

> qfx(0.5)

[1] 4,386

> ## (c) Probabilidades a seguir de 2 formas: (i) usando integração de f(x) (ii) F(x)
> (lc <- integrate(dfx, 5, Inf)$value)

[1] 0,3679
```

```
> 1 - pfx(5)

[1] 0,3679

> ## (d)
> (ld <- integrate(dfx, 5, 10)$value)

[1] 0,3377

> dfx(10) - dfx(5)

[1] -0,1688

> ## (e)
> (le <- integrate(dfx, 10, Inf)$value/integrate(dfx, 5, Inf)$value)

[1] 0,08208

> (1 - pfx(10))/(1-pfx(5))

[1] 0,08208
```

---

91. O volume de dados transmitido por dia em uma rede são independentes e possuem distribuição normal com média de 240 e variância de 900 unidades.

    (a) Em quantos dias por ano (365 dias) espera-se que o volume de dados transmitido ultrapasse 300 unidades?
    (b) Qual o volume deve ser transmitido em pelo menos 75% dos dias?
    (c) Adota-se como dias *usuais* os que possuem valores ao redor da média em 80% dias. Quais volumes determinam esses limites?
    (d) Qual a probabilidade do volume total transmitido em uma semana estar acima de 1800 unidades?
    (e) Qual a probabilidade do volume de transmissão estar acima de 265 unidades em cinco dias consecutivos?
    (f) Qual a probabilidade do volume diário não ultrapassar 250 unidades nenhuma vez em uma semana?
    (g) Partindo de um dia qualquer, qual a probabilidade de ser necessário esperar mais que 3 dias para que o volume diário ultrapasse 280 unidades?
    (h) Atribui-se um custo por uso da banda de 10 u.m. (unidades monetárias) para dias com volume abaixo de 200 unidades, 15 u.m. para dias com volume entre 200 e 250, 20 u.m. para dias com volume entre 250 e 280 u.m. e 30 u.m. para dias com volume acima de 280 u.m..
        i. Monte a distribuição de probabilidades do custo diário.
        ii. Qual o custo esperado em um mês (30 dias)?

Dica: em um item acima pode-se usar o seguinte resultado:
Se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes, então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$.

Solução:

$$X \sim \mathrm{N}(\mu = 240, \sigma^2 = 900)$$

(a) $365 \cdot P[X > 300] = 365 \cdot P[Z > \frac{300-240}{30}] = 365 \cdot P[Z > 2] = 365 \cdot 0,02275 = 8,304$

(b) $P[X > x_b] = 0,75 \longrightarrow z = -0,6745 = \frac{x_b - 240}{30} \longrightarrow x_b = 219,8$

(c) $P[x_{c1} < X < x_{c2}] = P[\mu - k < X < \mu + k] = P[-k/30 < Z < k/30] = P[-z_c < Z < z_c] = 0,80 \longrightarrow z_c = 1,28 = \frac{k}{30} \longrightarrow k = 38,4 \longrightarrow z_{c1} = 201,6$ e $z_{c2} = 278,4$

(d) $P[\sum_{i=1}^{7} X_i > 1800] = P[Z > \frac{1800-7\cdot 240}{30\sqrt{7}}] = P[Z > 1,512] = 0,0653$

(e) (Sob independência) $(P[X > 265])^5 = (P[Z > \frac{265-240}{30}])^5 = (P[Z > 0,833)^5 = (0,2023)^5 = 0,0003391$

(f) (Sob independência) $(P[X < 250])^7 = (P[Z < \frac{250-240}{30}])^7 = (P[Z < 0,333)^7 = (0,7977)^7 = 0,03963$

(g)

$$Y \sim \text{número de dias antes do dia que ultrapassa 280}$$
$$Y \sim \mathrm{G}(p = P[X > 280] = P[Z > \frac{280-240}{30}] = P[Z > 1,333] = 0,09121)$$
$$P[Y > 3] = 1 - P[Y \leq 3] = 1 - (P[Y = 0] + P[Y = 1] + P[Y = 2] + P[Y = 3]) = 0,3801$$

(h) i.

Y : custo diário

y	10	15	20	30
P[Y=y]	P[X < 200]	P[200 < X < 250]	P[250 < X < 280]	P[X > 280]
	P[Z < -1,33]	P[-1,33 < Z < 0,333]	P[0,333 < Z < 1,33]	P[Z > 1,33]
	0,0912	0,539	0,278	0,0912

ii. $30 \cdot E[Y] = 30 \cdot \sum y_i P[Y = y_i] = 30 \cdot (10 \cdot 0,0912 + 15 \cdot 0,539 + 20 \cdot 0,278 + 30 \cdot 0,0912) = 30 \cdot 17,3 = 519,1$

Solução computacional com o programa *R*:

```
> # a)
> (qa <- 365*pnorm(300, m=240, sd=30, lower=FALSE))

[1] 8,304

> # b)
> (qb <- qnorm(0.25, m=240, sd=30))

[1] 219,8

> # c)
> (qc <- qnorm(c(0.1, 0.9), m=240, sd=30))

[1] 201,6 278,4

> # d)
> (qd <- pnorm(1800, m=240*7, sd=sqrt(7)*30, lower=FALSE))

[1] 0,06529

> ## ou
> (qd1 <- pnorm(1800/7, m=240, sd=30/sqrt(7), lower=FALSE))

[1] 0,06529

> # e)
> (pe <- pnorm(265, m=240, sd=30, lower=FALSE)); (qe <- pe^5)

[1] 0,2023

[1] 0,0003391

> # f)
> (pf <- pnorm(250, m=240, sd=30)); (qf <- pf^7)

[1] 0,6306
```

```
[1] 0,03963

> # g)
> (pg <- pgeom(4, prob=pnorm(280, m=240, sd=30, low=F)))

[1] 0,3801

> ##
> Pr <- diff(pnorm(c(-Inf, 200, 250, 280, Inf), m=240, sd=30))
> names(Pr) <- c(10,15,20,30)
> # h1)
> (qg1 <- Pr)

     10      15      20      30 
0,09121 0,53935 0,27823 0,09121 

> # h2)
> (qg2 <- 30*sum(Pr * c(10,15,20,30)))

[1] 519,1
```

---

92. Em um levantamento sobre a vegetação em uma determinada área foram feitas medidas em um conjunto de parcelas de 2×2m, e assume-se que as medidas são independentes entre os pontos de coleta. Em cada parcela anota-se as medidas de diversas variáveis e dentre elas as medidas consideradas aqui das variáveis *biomassa* e um *índice de fertilidade do solo*. Com base neste contexto, responda as questões a seguir.

    (a) Supondo que os valores de biomassa possuem distribuição normal de média 20 e desvio padrão de 3 unidades encontre:
        i. a probabilidade de encontrar um valor acima de 25 em uma parcela
        ii. a probabilidade de encontrar um valor entre 19 e 21 unidades em uma parcela
        iii. o valor abaixo do qual se espera encontrar apenas 10% das parcelas

    (b) O *valor referência* das parcelas é definido como sendo de 100 unidades para parcelas com biomassa abaixo de 18, 120 unidades para biomassa entre 18 e 23, e 150 unidades para parcelas com biomassa acima de 23. Qual o valor de referência esperado para uma amostra de 20 parcelas?

---

93. Discos de plástico policarbonado de um fornecedor foram analisados quanto a resistência a riscos e a choques. Os resultados de 100 discos analisados são resumidos na tabela a seguir.

resistência	resistência a choques	
a riscos	alta	baixa
alta	80	9
baixa	6	5

Denote por A o evento *o disco tem alta resistência a riscos* e por B o evento *o disco tem alta resistência a choques.*

(a) Obtenha: $P[A]$, $P[A \cap B]$, $P[A^c]$, $P[A^c \cap B^c]$, $P[A^c \cup B]$.

(b) Obtenha: $P[A|B]$, $P[B|A]$, $P[A|B^c]$, $P[B^c|A]$, $P[B|A^c]$.

(c) Se um disco é selecionado ao acaso qual a probabilidade de ter:
- alta resistência a choque e baixa a riscos?
- alta resistência a riscos e baixa a choques?

(d) os eventos ter alta resistência a ambos atributos são mutuamente exclusivos? (justifique)

(e) os eventos ter alta resistência a ambos atributos são independentes? (justifique)

Solução:

```
> m <- matrix(c(80,6,9,5),ncol=2,dimnames=list(c("A","A^c"),c("B","B^c")))
> m

     B B^c
A   80   9
A^c  6   5

> mp <- prop.table(m)
> mp

       B  B^c
A   0,80 0,09
A^c 0,06 0,05
```

(a)
- $P[A]$ =0,89
- $P[A \cap B]$ =0,8
- $P[A^c]$ =0,11
- $P[A^c \cap B^c]$ =0,05
- $P[A^c \cup B] = P[A^c] + P[B] - P[A^c \cap B]$ =0,91

(b)
- $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$ =0,93
- $P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$ =0,9
- $P[A|B^c] = \frac{P[A \cap B^c]}{P[B^c]}$ =0,64
- $P[B^c|A] = \frac{P[B^c \cap A]}{P[A]}$ =0,1
- $P[B|A^c] = \frac{P[A^c \cap B]}{P[A^c]}$ =0,55

(c)
- $P[B \cap A^c]$ =0,06
- $P[A \cap B^c]$ =0,09

(d) Não, pois $P[A \cap B] \neq 0$, isto é, os eventos ter alta resistência em ambos os atributos possuem intersecção, por isso não são mutuamente exclusivos. No contexto do exemplo, isto significa, por exemplo, que é possível ter resistência a ambos fatores ao mesmo tempo.

(e) $P[A \cap B] \neq P[A].P[B]$, isto é, o produto das marginais difere dos valores observados, por isso sabemos que os eventos não são independentes. No contexto do exemplo, as chances de ter resistência a um fator para so casos de se ter ou não resistência ao outro fator.

```
> addmargins(mp)

       B  B^c  Sum
A   0,80 0,09 0,89
A^c 0,06 0,05 0,11
Sum 0,86 0,14 1,00

> outer(rowSums(mp), colSums(mp), "*")

         B    B^c
A   0,7654 0,1246
A^c 0,0946 0,0154

> ## note tb a ordem entre os termos!
> #outer(apply(m/sum(m),2,sum),apply(m/sum(m),1,sum),"*")
```

94. Estimativas de mercado indicam que um novo instrumento para análise de amostras de solo será *pleno sucesso*, *sucesso moderado* ou *insucesso* com probabilidades 0,3; 0,6 e 0,1; respectivamente. O retorno anual associado com cada um destes resultados é de 10 milhões, 5 milhões e 1 milhão, respectivamente. Seja X_1 uma variável aleatória que denote o retorno anual do produto.

(a) determine a função de probabilidade e a função de probabilidade acumulada de X_1

(b) qual o retorno anual esperado?

(c) considere agora a variável X_2 o retorno em dois anos, considerados independentes onde cada ano pode ter um dos três resultados mencionados.

- determine a função de probabilidade de X_2
- encontre o lucro esperado em dois anos

Solução:

(a) Funções de probabilidade e acumulada:

```
> x1 <- c(1, 5, 10)
> px1 <- c(0.1, 0.6, 0.3)
> names(px1) <- c(1, 5, 10)
> Px1 <- t(as.matrix(px1))
> rownames(Px1) <- "P[X1=x]"
```

	1	5	10
P[X1=x]	0,10	0,60	0,30

Tabela 1: Distribuição de Probabilidade de X1

```
> pax1 <- cumsum(px1)
> pax1
```

```
  1   5  10
0,1 0,7 1,0
```

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 1 \\ 0,1, \text{ se } 1 \leq x < 5 \\ 0,7, \text{ se } 5 \leq x < 10 \\ 1, \text{ se } x \geq 10 \end{cases}$$

(b) retorno anual esperado é da do pela esperança da v.a. X, $E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i] = 6,1$:

```
> as.vector(crossprod(x1,px1))
```

```
[1] 6,1
```

(c)
- X_2 : retorno em 2 anos

```
> x2 <- outer(x1, x1, "+")
> px2 <- outer(px1, px1, "*")
> px2[lower.tri(px2)] <- px2[lower.tri(px2)] + px2[t(upper.tri(px2))]
> x2 <- unique(as.vector(x2))
> px2 <- px2[lower.tri(px2, diag=T)]
> names(px2) <- x2
> Px2 <- t(as.matrix(px2))
> rownames(Px2) <- "P[X2=x]"
```

- O valor esperado pode ser encontrado com o produto entre as probabilidades e os eventos possiveis.

```
> as.vector(crossprod(x2, px2))
```

```
[1] 12,2
```

	2	6	11	10	15	20
P[X2=x]	0,01	0,12	0,06	0,36	0,36	0,09

Tabela 2: Distribuição de Probabilidade de X2

uma solução alternativa:
como os eventos são independentes entre os dois anos, $E[X_2] = E[X_1 + X_1] = 2 \cdot E[X_1] = 2 \cdot (6,1) = 12,2$

---

95. Os telefones da central de reservas de uma companhia aérea estão ocupados 35% do tempo. Assuma que os eventos da linha estar ocupada em chamadas sucessivas são independentes e que 10 chamadas são efetuadas.

(a) Defina a variável aleatória em questão e a sua distribuição de probabilidades

(b) qual a probabilidade de que exatamente três chamadas estejam ocupadas?

(c) qual a probabilidade de que pelo menos duas chamadas não estejam ocupadas?

(d) qual o número esperado de chamadas nas quais todas as linhas estão ocupadas?

Solução:

(a) variável aleatória:
X : # de chamadas ocupadas
$X \sim Binomial(n = 10, p = 0.35)$

(b) $P[X = 3]$ pode ser calculada por:

```
> dbinom(3,size=10,prob=0.35)
[1] 0,2522
```

(c) $P[\tilde{X} \geq 2] = P[X \leq 8]$ pode ser calculada por uma das formas:

```
> pbinom(1, size=10, prob=0.65, lower=F)
[1] 0,9995
> pbinom(1, size=8, prob=0.35)
[1] 0,1691
```

(d) Em uma binomial o valor esperado é obtido por $n \cdot p = 3,5$

---

96. Suponha que uma variável aleatória X tem função de distribuição de probabilidade dada por $f_X(x) = e^{-(x-4)}\ I_{(-\infty,4)}(x)$.

(a) mostre que $f_X(x)$ é uma função de densidade de probabilidade.
Calcule:

(b) $P[X > 1]$

(c) $P[2 \leq X < 5]$

(d) $P[X < 15|X > 8]$

(e) x tal que $P[X < x] = 0.80$

Solução:

(a) Para provar que a função é distribuição de probabilidade devemos integrar no intervalo e obter 1 e a função deve fornecer valores não negativos para todo x.
A função conforme apresentada no enunciado não é uma *f.d.p.* pois $\int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \infty$.
Há duas possibilidades simples de modificar a função e obter uma *f.d.p.* válida.

i. $f_X(x) = e^{(x-4)}\ I_{(-\infty,4)}(x)$

```
> #f <- function(x) exp(1)^(x-4)
> f <- function(x) ifelse(x<4, exp(x-4), 0)
> integrate(f,-Inf,4)
1 with absolute error < 5,7e-05
```

ii. $f_X(x) = e^{-(x-4)}\ I_{(4,\infty)}(x)$

```
> f <- function(x) ifelse(x>4, exp(-(x-4)), 0)
> integrate(f, 4, Inf)
1 with absolute error < 5,7e-05
```

Em todos casos $f(x) \geq 0$ pois a função exponencial só retorna valores positivos. No que se seque vamos considerar $f_X(x) = e^{-(x-4)}\ I_{(4,\infty)}(x)$.

(b) $P[X > 1] = P[X > 4] =$

```
> integrate(f,1,Inf)
1 with absolute error < 3,7e-06
> integrate(f,4,Inf)
1 with absolute error < 5,7e-05
```

(c) $P[2 \leq X < 5]$

```
> #integrate(f,2,4)
> integrate(f,2,5)
0,6321 with absolute error < 4,4e-05
```

(d) $P[X < 15|X > 8] = P[(X < 15) \cap (X > 8)]/P[X > 8] = P[8 < X < 15]/P[X > 8]$

```
> integrate(f,8,15)$val/integrate(f,8,Inf)$val
[1] 0,9991
```

(e) x tal que $P[X < x] = 0.80$:

$$\begin{aligned}
\int_4^x e^{-(x-4)}dx &= -e^{-(x-4)} - (-e^0) = 0.8 \\
\log e^{-(x-4)} &= \log 0.2 \\
x &= 5,6094
\end{aligned}$$

Nota: na notação acima "log"denota logarítmo neperiano.

---

97. A resistência de um papel é modelada por uma distribuição normal de média 35 libras por polegada quadrada (lb/in^2) e um desvio padrão de 2 lb/in^2.

(a) qual a probabilidade de que a resistência de uma amostra seja menor que 40 lb/in^2?

(b) qual a proporção de amostra que deve ter resistência entre 33 e 38 lb/in^2?

(c) qual o valor de resistência para o qual se espera que 75% das amostras apresentem resistência inferior a ele?

(d) se a especificação do material requer que a resistência seja superior a 33 lb/in^2, qual a proporção de amostras que espera-se descartar após inspeção?

(e) qual deveria ser a resistência média para que esta proporção fosse inferior a 5%?

Solução:

(a) $P[X < 40] = P[Z < \frac{40-35}{2}] = P[Z < 2,5] = 0,9938$

(b) $P[33 < X < 38] = P[\frac{33-35}{2} < Z < \frac{38-35}{2}] = P[-1 < -Z < 1,5] = 0,7745$

(c)

$$P[X < x] = P[Z < \frac{x-35}{2}] = 0,75$$
$$z = \frac{x-35}{2} = 0,6745$$
$$x = 36,3$$

(d) $P[X < 33] = P[Z < \frac{33-35}{2}] = P[Z < -1] = 0,1587$

(e) Devemos descobrir um valor para média μ que satisfaça:

$$P[X < 33] = 0.05$$
$$P[Z < \frac{33-\mu}{2}] = P[Z < z_{0.05}] = 0.05$$
$$\mu = 33 - 2 \cdot z_{0.05} = 33 - 2 \cdot (-1,64) = 36,3$$

Solução computacional com o programa R:

```
> (pa <- pnorm(40, m=35, sd=2))

[1] 0,9938

> (pb <- diff(pnorm(c(33,38), m=35, sd=2)))

[1] 0,7745

> (pc <- qnorm(0.75, m=35, sd=2))

[1] 36,35

> (pd <- pnorm(33, m=35, sd=2))

[1] 0,1587

> (pe <- 33 - 2 * qnorm(0.05))

[1] 36,29
```

---

98. Devido ao fato de que nem todos passageiros comparecem para o embarque, uma companhia aérea vende 125 bilhetes para um vôo com capacidade para apenas 120 passageiros num procedimento conhecido como *overbooking*. Neste vôo, a probabilidade de que um passageiro não compareça é de 0,08 e o comparecimento ou não é independente entre os passageiros.

    (a) qual a probabilidade de que cada passageiro que apareça possa embarcar?

    (b) qual a probabilidade de que o vôo parta com ao menos um assento vazio?

Solução:

$$X : \text{número de passageiros com bilhete que não comparecem}$$

$$X \sim B(125\ ;\ 0,08) \text{ ou } X \approx N(n.p = 10; n.p.(1-p) = 9,2)$$

(a) $P[X \geq 5] = 0,968$

(b) $P[X \geq 6] = 0,925$

---

99. A probabilidade de que um servidor atenda a uma requisição em menos de 5 segundos é de 0,75. Assuma que as requisições são independentes.

(a) Se 10 requisições são feitas, qual a probabilidade de que exatamente 9 sejam respondidas dentro dos 5 segundos?

(b) Se 20 requisições são feitas, qual a probabilidade de que pelo menos 16 sejam respondidas dentro dos 5 segundos?

(c) Se 20 requisições são feitas, qual o número médio de chamadas que serão respondidas em menos do que 5 segundos?

Solução:

$$X : \text{número de requisições atendidas em menos de 5 segundos}$$

(a) $X \sim B(10\ ;\ 0,75)$
$P[X = 9] = 0,188$

(b) $X \sim B(20\ ;\ 0,75)$
$P[X \geq 16] = P[X = 16] + P[X = 17] + \ldots + P[X = 20] = 0,415$

(c) $X \sim B(20\ ;\ 0,75)$
$E[X] = n.p = 20(0.75) = 15$

---

100. Considere a função $f(x) = k(1 + 2x)\ 0 < x < 4$

(a) para que valor de k a função é de densidade de probabilidade?

(b) Calcule $P[X > 1,5]$

(c) Calcule $P[2,2 < X \leq 3,6]$

Solução:

(a) $\int_0^4 f(x)dx = 1 \implies k = 0,05$

(b) $P[X > 1,5] = \int_{1,5}^4 f(x)dx = 0,813$

(c) $P[2,2 < X \leq 3,6] = \int_{2,2}^{3,6} f(x)dx = 0,476$

---

101. O diâmetro de um ponto produzido por uma impressora tem distribuição normal com diâmetro médio de 0,002 polegadas e desvio padrão de 0,0004 polegadas.

(a) qual a probabilidade de que o diâmetro de um ponto exceda 0,0026 polegadas?

(b) qual a probabilidade de que o diâmetro esteja entre 0,0014 e 0,0026 polegadas?

(c) qual o valor necessário do desvio padrão do diâmetro para que a probabilidade no item anterior seja de 0,995?

Solução:

$$X \sim N(0,002; 0.0004)$$

(a) $P[X > 0,0026] = 0,067$

(b) $P[0,0014 < X < 0,0026] = 0,866$

(c) $s = \frac{(0.0026-0.002)}{z_{0.9975}} = 0,00021$

---

102. Um jogador está pensando em estratégias para ter sucesso no jogo de roletas de um cassino. A roleta possui 18 números marcados em vermelho, 18 em preto e um com branco. Se a cor branca for sorteada o valor apostado fica com a casa independente das apostas.
Comente as duas situações/estratégias a seguir embasando suas opiniões com conceitos de probabilidade.

    (a) O jogador observando o jogo nota que é muito pouco provável ter uma seqüencia de números marcados com a mesma cor. Desta forma decide adotar a seguinte estratégia: ele espera até ocorrerem cinco resultados seguidos da uma cor e então faz uma aposta alta na cor oposta.

    (b) Numa outra estratégia o jogador faz o seguinte: ele aposta em uma das cores, e, contando que em certo momento a cor vai mudar, cada vez que perder dobra a aposta na mesma cor. Avalie ainda a estratégia em dois cenários: i) o jogador vai frequentemente ao cassino e sempre adota esta estratégia. ii) o jogador tem 512 reais e tem que pagar uma dívida de 1.000 reais até o final da noite e esta é a única chance que lhe resta.

Solução:

---

103. Um marinheiro aparentemente bêbado estava andando em um pier que tinha 10 metros de largura para ter acesso a um bote que deixou ao final deste a fim de voltar a seu navio após sua folga. Ele começou a andar exatamente no meio do pier de acesso a seu bote. Devido a seu estado ele não conseguia andar em linha reta e, a cada passo, pendia um metro para esquerda ou para direita com igual probabilidade. Após dar 20 passos ele acabou caindo na água e se afogando. Entretanto, a companhia seguradora, considerando que ele tinha feito uma apólice de seguro de alto valor, beneficiando sua irmã, apenas uma semana antes, levantou a suspeita de que o acidente tenha sido na verdade uma farsa tramada por um homem desesperado e coberto de dívidas. Considerando estas informações, qual a probabilidade de que o acidente tenha de fato sido uma fatalidade.

Solução:

---

104. (Montgomery, 1994) Um dispositivo está ocioso/disponível (*idle*) 15% do tempo. Você vai enviar requisições de acesso imediato ao dispositivo cinco vezes durante certo período. Assumindo que as requisições sejam independentes calcule as probabilidades de que o dispositivo:

    (a) esteja ocioso em todas as requisições;

    (b) esteja ocioso em exatamente três requisições;

    (c) esteja disponível em pelo menos três requisições;

    (d) nunca esteja disponível.

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{ número de vezes que o dispositivo está ocioso} \\ X &\sim B(n = 5, p = 0,15) \end{aligned}$$

(a) $P[X = 5] = 7{,}59\text{e-}05$

(b) $P[X = 3] = 0{,}0244$

(c) $P[X \geq 3] = 0{,}0266$

(d) $P[X = 0] = 0{,}4437$

---

105. (Magalhães, 2006) Um carcereiro informa a três prisioneiros que um deles foi sorteado para ser executado no dia seguinte, enquanto que os outros dois serão libertados. O prisioneiro João Espeto se aproxima do carcereiro e cochicha no seu ouvido, solicitando que ele lhe conte qual dos outros dois prisioneiros será solto. O prisioneiro argumenta que isto não altera em nada a situação, visto que pelo menos um destes será solto. Entretanto, o carcereiro não atende seu pedido, acreditando que isto poderia dar ao João Espeto alteração nas suas espectativas de ser libertado. Voce acha que o carcereiro tem razão? Justifique sua resposta.

Solução:

---

106. Suponha que o tempo entre requisições recebidas por um servidor tenha distribuição exponencial com tempo médio de 10 segundos. Determine:

(a) a probabilidade do servidor receber uma nova requisição em menos de cinco segundos após a chegada da primeira;

(b) a probabilidade do servidor ficar ao menos 15 segundos sem receber uma requisição;

(c) tendo o servidor ficado já 10 segundos sem receber requisição, a probabilidade do servidor ficar ao menos mais 15 segundo ser receber requisições;

(d) o tempo entre requisições até o qual espera-se receber 90% das requisições.

Solução:

$$
\begin{aligned}
X &: \text{tempo entre requisições} \\
X &\sim \text{Exp}(\lambda = 1/10) \\
f(x) &= (1/\lambda)\exp\{-x/\lambda\}
\end{aligned}
$$

(a) $P[X < 5] = \int_0^5 f(x)dx = 0,3935$

(b) $P[X > 15] = \int_{15}^{\infty} f(x)dx = 0,2231$

(c) $P[X > 25|X > 10] = P[X > 25 \cap X > 10]/P[X > 10] = P[X > 15] = 0,2231$
(esta solução usa a propriedade da *falta de memória* da distribuição exponencial)

(d) $P[X < k] = 0.90 \Rightarrow \int_0^k f(x)dx = 0.90 \Rightarrow k = 23,0259$

---

107. (M. & L., 2005) Estudos meteorológicos indicam que a precipitação meteorológica mensal, em períodos de seca numa certa região, pode ser considerada como seguindo uma distribuição Normal de média 30 mm e variância 16 mm^2.

(a) Qual a probabilidade de que em um mês a precipitação esteja entre 20 e 40 mm?

(b) Qual seria o valor da precipitação pluviométrica de modo que exista apenas 10% de chance de haver uma precipitação inferior e este valor?

(c) Construa um intervalo central em torno da média que contenha 80% dos possíveis valores de precipitação pluviométrica.

(d) Admitindo este modelo correto para os próximos 50 meses, em quantos deles esperaríamos uma precipitação pluviométrica superior a 34 mm?

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{precipitação mensal} \\ X &\sim \text{N}(\mu = 30, \sigma^2 = 16) \end{aligned}$$

(a) $P[20 < X < 40] = 0,9876$

(b) $P[X < k] = 0.10 \Rightarrow k = 24,87$

(c) $P[\mu - k < X < \mu + k] = 0.80 \Rightarrow k = 5,13 \Rightarrow P[24,87 < X < 35,13] = 0.80$

(d) $50 \cdot P[X > 34] \approx 8$

---

108. Em uma sala com 70 estudantes do sexo masculino e 30 do sexo feminino o professor vai sortear 10 estudantes durante a aula para resolverem 10 testes rápidos. Qual a probabilidade de que sejam sorteados cinco estudantes de cada sexo caso:

(a) um estudante possa voltar a ser sorteado;

(b) um estudante sorteado para um teste não possa ser sorteado novamente.

Solução:
X: número de estudantes sorteados do sexo masculino

(a) $X \sim \text{Bin}(n = 10, prob = 0.7)$
$P[X = 5] = 0,1029$

(b) $X \sim \text{HG}(N = 100, n = 10, r = 10)$
$P[X = 5] = 0,0996$

---

109. Seja a função $f(x) = k(1 + 2x)$ para $0 < x < 2$.

(a) qual deve ser o valor de k para que $f(x)$ seja função de densidade de probabilidade?

(b) encontre o percentil 30 desta distribuição.

Solução:

(a) $\int_0^2 k(1 + 2x)dx = 1 \Rightarrow k = 1/6$

(b) $\int_0^{P_{30}} 1/6(1 + 2x)dx = 0,30 \Rightarrow P_{30} = 0,93$

---

110. Sessenta porcento dos alunos de uma auto-escola passam no teste de habilitação na primeira tentativa, e o demais são reprovados. A auto-escola decide fazer um pré-teste antes do teste oficial. Dos alunos que passam no teste oficial, 80% passam no pre-teste. Dos alunos que falham no teste oficial, 10% passam no pré-teste.

(a) forneça o valor das seguintes *probabilidades*:

i. passar no teste oficial na primeira tentativa
ii. não passar no teste oficial na primeira tentativa
iii. ter passado no pré-teste sabendo-se que passou no teste oficial
iv. não ter passado no pré-teste sabendo-se que passou no teste oficial
v. ter passado no pré-teste sabendo-se que não passou no teste oficial
vi. não ter passado no pré-teste sabendo-se que não passou no teste oficial

(b) forneça o valor das seguintes *probabilidades*:

i. passar no pré-teste
ii. não passar no pré-teste

(c) forneça o valor das seguintes *probabilidades*:
   i. passar no teste oficial sabendo-se que passou no pré teste
   ii. não passar no teste oficial sabendo-se que passou no pré-teste
   iii. passar no teste oficial sabendo-se que não passou no pré-teste
   iv. não passar no teste oficial sabendo-se que não passou no pré-teste

(d) interprete as probabilidades obtidas discutindo se o pré-teste forneceu informações suficientes para avaliar melhor as chances de se passar no teste oficial.

Solução:
Notação:

$$\begin{aligned} P[A] &: \text{ probabilidade de passar no teste oficial} \\ P[B] &: \text{ probabilidade de passar no pré-teste} \end{aligned}$$

(a) i. $P[A] = 0,60$
   ii. $P[A^c] = 1 - P[A] = 0,40$
   iii. $P[B|A] = 0,80$
   iv. $P[B^c|A] = 1 - P[B^c|A] = 0,20$
   v. $P[B|A^c] = 0,10$
   vi. $P[B^c|A^c] = 1 - P[B^c|A^c] = 0,90$

(b) i. $P[B] = P[B|A] * P[A] + P[B|A^c] * P[A^c] = (0,80)(0,60) + (0,10)(0,40) = 0,52$
   ii. $P[B^c] = 1 - P[B] = 0,48 (= P[B^c|A] * P[A] + P[B^c|A^c] * P[A^c])$

(c) i. $P[A|B] = \frac{P[B|A]*P[A]}{P[B|A]*P[A]+P[B|A^c]*P[A^c]} = \frac{(0,80)(0,60)}{(0,80)(0,60)+(0,10)(0,40)} = 0,923$
   ii. $P[A^c|B] = 1 - P[A|B] = 0,077$
   iii. $P[A|B^c] = \frac{P[B^c|A]*P[A]}{P[B^c|A]*P[A]+P[B^c|A^c]*P[A^c]} = \frac{(0,20)(0,60)}{(0,20)(0,60)+(0,90)(0.40)} = 0,25$
   iv. $P[A^c|B^c] = 1 - P[A|B^c] = 0.75$

(d)

---

111. O número de chamadas na central da polícia em certa cidade, às sextas feiras a noite é uma variável aleatória X com média $E[X] = 3.5$ a cada meia hora. Assuma um distribuição de probabilidades adequada, que estamos no período noturno e responda as seguintes perguntas:

(a) qual a probabilidade de não haver chamadas na próxima meia hora?

(b) qual a probabilidade haver exatamente três chamadas neste período?

(c) qual a probabilidade haver mais de quatro chamadas na próxima hora?

(d) se forem anotados o número de chamadas em várias sexta-feiras, que a número médio de chamadas por hora esperado? e qual a variância esperada do número de chamadas por hora?

Solução:

$$X : \text{número de chamadas a cada meia hora } \; X \sim P(3,5) \tag{1}$$
$$Y : \text{número de chamadas por hora } \; X \sim P(7) \tag{2}$$

(a) $P[X = 0] = \frac{e^{3,5} 3,5^0}{0!} = 0,0302$

(b) $P[X = 3] = \frac{e^{3,5} 3,5^3}{3!} = 0,2158$

(c) $P[Y \geq 4] = 1 - P[Y \leq 3] = 0,9182$

(d) $E(Y) = 7$ e $Var[Y] = 7$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> pa <- dpois(0, lam=3.5)
> pb <- dpois(3, lam=3.5)
> pc <- ppois(3, lam=7, lower=FALSE)
```

---

112. No contexto do problema anterior, considere agora o intervalo de tempo entre as chamadas com distribuição exponencial de média 8,5 minutos. Qual a probabilidade de:

(a) não haver chamadas por um período de 20 minutos?

(b) haver uma chamada entre 5 e 15 minutos

(c) tendo havido uma chamada num intervalo de 10 minutos, qual a probabilidade de haver outra chamada nos próximos 10 minutos?

```
> (ita <- pexp(20, rate=1/8.5))

[1] 0,9049

> (itb <- diff(pexp(c(5,15), rate=1/8.5)))

[1] 0,3841

> (itc <- diff(pexp(c(10,20), rate=1/8.5))/pexp(10, rate=1/8.5, lower=T))

[1] 0,3084
```

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{tempo entre chamadas} \\ X &\sim \text{Exp}(1/8,5) \\ f(x) &= (1/8,5)\exp\{-x/8,5\} \\ F(x) &= 1 - \exp\{-x/8,5\} \end{aligned}$$

(a) $P[X \geq 20] = \int_{20}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(20) = 0,905$

(b) $P[5 < X < 15] = \int_{5}^{15} f(x)\mathrm{d}x = F(15) - F(5) = 0,384$

(c) $P[10 < X < 20|X > 10] = \frac{P[(10<X<20)\cap(X>10)]}{P[X>10]} = \frac{P[10<X<20]}{P[X>10]} = \frac{F(20)-F(10)}{1-F(10)} = 0,308$

Soluções computacionais com o programa R:


```
> (ita <- pexp(20, rate=1/8.5))

[1] 0,9049

> (itb <- diff(pexp(c(5,15), rate=1/8.5)))

[1] 0,3841

> (itc <- diff(pexp(c(10,20), rate=1/8.5))/pexp(10, rate=1/8.5, lower=T))

[1] 0,3084
```

---

113. A distribuição dos pesos de toras de madeira pode ser representada por uma distribuição normal, com média 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um cliente irá comprar 10.000 toras e pretende classificá-las de acordo com o peso, do seguinte modo: 25% dos mais leves como *Classe A*, as 55% seguintes como *Classe B*, as 15% seguinte como *Classe C* e as demais como *Classe D*.

    (a) Quais os limites de peso de cada classe?

    (b) Se o preço a ser pago é de 0,80 unidades de preço (U.P.) por material abaixo de 3.5 kg; 1 U.P. por material entre 3,5 e 6,0 e 1.15 U.P. por material acima de 6,0 kg, quanto espera-se pagar pelo lote a ser comprado?

Solução:

```
> qnorm(cumsum(c(0.25, 0.55, 0.15)), mean=5, sd=0.8)

[1] 4,460 5,673 6,316

> sum(c(0.8, 1, 1.15) * diff(pnorm(c(-Inf, 3.5, 6, Inf), mean=5, sd=0.8)) * 10000)

[1] 10098
```

---

114. O tempo adequado de troca de um amortecedor de certa marca em automóveis, sujeitos a uso contínuo e severo, pode ser considerado com uma variável aleatória contínua, medida em anos. Suponha que a função de densidade é dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{8}, & 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (a) verifique qua a função acima é, de fato, uma densidade

    (b) qual é a probabilidade de um automóvel, sujeito às condições descritas acima, necessitar de troca de amortecedores antes de 1 ano de uso? E entre 1 e 3 anos?

    (c) supondo que um automóvel está há 3 anos com o mesmo amortecedor, qual a probabilidade de que seja necessário fazer a troca antes de completar 4 anos de uso?

    (d) qual é o tempo médio adequado para a troca de amortecedor desses automóveis?

Solução:

$$X : \text{tempo de troca}$$

```
> fx <- function(x) ifelse((x >= 0 & x <=2), x/4, ifelse((x > 2 & x <= 6),1/8,0))
> plot(fx, from=-1, to=7)
```

(a) `> integrate(fx,0,6)`

```
1 with absolute error < 4,2e-05
```

(b) `> integrate(fx, 0, 1)`

```
0,125 with absolute error < 1,4e-15

> integrate(fx, 1, 3)

0,5 with absolute error < 5,6e-15
```

(c) $P[X < 4|x > 3] = P[3 < X < 4]/P[X > 3]$

```
> integrate(fx, 3, 4)$val / integrate(fx, 3, 6)$val

[1] 0,3333
```

(d)
```
> EX <- function(x) x*fx(x)
> integrate(EX, 0, 6)
```
```
2,667 with absolute error < 0,00016
```

---

115. Um fabricante afirma que apenas 5% de todas as válvulas que produz têm uma duração inferior a 20 horas. Uma indústria compra semanalmente um grande lote de válvulas desse fabricante, mas sob a seguinte condição: ela aceita o lote se, em 10 válvulas escolhidas ao acaso, no máximo uma tiver duração inferior a 20 horas; caso contrário o lote todo é rejeitado.

 (a) Se o fabricante de fato tem razão, qual a probabilidade do lote ser rejeitado?
 (b) Suponha agora que o fabricante esteja mentindo, isto é, na verdade a proporção de válvulas com duração inferior a 20 horas é de 10%. Qual a probabilidade de um lote ser aceito, segundo o critério acima?

Solução:

$$X : \text{número de vávulas com duração inferior a 20 horas} \; ; \; X \sim Bin(n = 10, p = 0.05)$$

(a) $P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1]$
```
> 1 - pbinom(1, size=10, p=0.05)
```
```
[1] 0,08614
```
(b) $X \sim Bin(n = 10, p = 0.10)$; $P[X \leq 1]$
```
> pbinom(1, size=10, p=0.10)
```
```
[1] 0,7361
```

---

116. A durabilidade de um tipo de pneu da marca *Rodabem* é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de média 60.000 km e desvio padrão de 8.300 km.

 (a) se a *Rodabem* garante os pneus pelos primeiros 48.000 km, qual a proporção de pneus que deverá ser trocada pela garantia?
 (b) o que aconteceria com a proporção do item anterior se a garantia fosse dada para os primeiros 45.00 km?
 (c) qual deveria ser a garantia (em km) de tal forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 2% dos pneus?
 (d) se voce comprar 4 pneus *Rodabem* qual será a probabilidade de que voce utilizará a garantia (de 45.000 km) para trocar um ou mais destes pneus?

Solução:

$$X : \text{durabilidade} \quad X \sim N(60.000, 8.300^2)$$

(a) $100 * P[X < 48.000]$
```
> round(100*pnorm(48000, mean=60000, sd=8300), dig=4)
```
```
[1] 7,412
```
(b) $100 * P[X < 45.000]$
```
> round(100*pnorm(45000, mean=60000, sd=8300), dig=4)
```
```
[1] 3,536
```
(c) $P[X < k] = 0.02$
```
> qnorm(0.02, mean=60000, sd=8300)
```

```
[1] 42954
```

(d) Y : número de pneus ; $Y \sim Bin(n=4,p)$ $P[Y \geq 1] = 1 - P[Y=0]$

```
> p <- pnorm(45000, mean=60000, sd=8300)
> 1 - pbinom(0, size=4, prob=p)
[1] 0,1341
```

---

117. Para se ajustar uma máquina, a correia deve ter entre 60 e 62 cm de comprimento. Tendo em vista o processo de fabricação, o comprimento destas correia pode ser considerado como uma variável aleatória com distribuição normal, de média 60,7 e desvio padrão 0,8 cm. Pergunta-se:

(a) qual a probabilidade de uma correia, escolhida ao acaso, poder ser usada na máquina?

(b) um grande revendedor dessas correias estabelece um controle de qualidade nos lotes que compra da fábrica: ele sorteia 4 correias do lote e só aceita o lote se o comprimento médio estiver dentro do tamanho aceito pela máquina. Calcule a probabilidade de aceitação do lote.

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{ comprimento da correia} \\ X &\sim N(60,7; 0.8^2) \end{aligned}$$

(a) $P[\text{correia poder ser usada}] = P[60 < X < 62] = P[\frac{60-60,7}{0.8} < Z < \frac{62-60.7}{0.8}] = 0,757$

(b) $P[\text{lote ser aceito}] = P[60 < \bar{X} < 62] = P[\frac{60-60,7}{0.8/\sqrt{4}} < Z < \frac{62-60.7}{0.8/\sqrt{4}}] = 0,959$

---

118. A proporção de item com defeito numa fábrica de baterias é de 0,02. Um inspetor de controle de qualidade testa baterias retiradas ao acaso da linha de montagem. Qual a probabilidade que ele tenha que examinar mais de 20 baterias para obter uma com defeito? Qual a probabilidade que ele tenha que examinar mais de 20 baterias para obter a terceira com defeito?

Solução:

$$X : \text{ número de baterias examinadas}$$

$$P[X > 20]$$

(a) neste caso $X \sim \text{Geométrica}(p = 0,02)$

```
> pgeom(20, prob=0.02, lower=F)
[1] 0,6543
```

(b) neste caso $X \sim \text{Binomial Negativa}(r = 3, p = 0,02)$

```
> pnbinom(20, size=3, prob=0.02, lower=F)
[1] 0,9895
```

---

119. Seja a função $f(x) = 3x^2 \; 0 < x < 1$.

(a) mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade

(b) encontre $P[|X - 0,5| > 0,2]$

(c) encontre a amplitude interquartílica

Solução:

```
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 | x < 1, 3*x^2, 0)
```

(a) $f(x) \geq 0 \;\; \forall \;\; 0 < x < 1$ e $\int_0^1 f(x)dx = 1$

```
> integrate(fx, 0, 1)$value
[1] 1
```

(b) $P[|X - 0,5| > 0,2] = P[X < 0,3$ ou $X > 0,7] = 1 - \int_{0,3}^{0,7} f(x)dx = 0$

```
> 1-integrate(fx, 0.3, 0.7)$value
[1] 0,684
```

(c) AI = Q3 - Q1

$$
\begin{aligned}
\int_0^{q_1} 3x^2dx &= 0,25 \Longrightarrow q_1 = 0,63 \\
\int_0^{q_3} 3x^2dx &= 0,25 \Longrightarrow q_3 = 0,909 \\
AI &= q_3 - q_1 = 0,279
\end{aligned}
$$

---

120. Os níveis de nicotina em fumantes são modelados por uma variável aleatória T com distribuição normal de média 315 e variância 17161.

(a) qual a probabilidade de, sorteando-se ao acaso um fumante, ele ter nível de nicotina inferior a 450?
(b) e qual a probabilidade do nível estar entre 150 e 400?
(c) qual o percentil 95% da distribuição de níveis de nicotina?
(d) encontre a probabilidade $P[|T - 315| \leq 100]$
(e) qual o nível de nicotina para o qual 20% dos fumantes possuem teor superior e ele?

Solução:

$$
\begin{aligned}
T &: \text{nível de nicotina} \\
T &\sim N(315; 17161)
\end{aligned}
$$

(a) $P[T < 450] = P[Z < \frac{450-315}{\sqrt{17161}}] = P[Z < 1,03] = 0,849$
(b) $P[150 < T < 400] = P[\frac{150-315}{\sqrt{17161}} < Z < \frac{400-315}{\sqrt{17161}}] = P[-1,26 < Z < 0,65] = 0,638$
(c) $P[T < t] = 0,95 \Longrightarrow P[Z < \frac{t-315}{\sqrt{17161}}] = 0,95 \Longrightarrow t = 530,5$
(d) $P[|T - 315| \leq 100] = P[215 \leq T \leq 415] = P[\frac{215-315}{\sqrt{17161}} < Z < \frac{415-315}{\sqrt{17161}}] = P[-0,76 < Z < 0,76] = 0,555$
(e) $P[T > t] > 0,20 \Longrightarrow P[Z > \frac{t-315}{\sqrt{17161}}] > 0,20 \Longrightarrow \frac{t-315}{\sqrt{17161}} = 0,84 \Longrightarrow t = 425,3$

---

121. Um programa computacional para detectar fraudes em cartões telefônicos rastreia, todo dia, o número de áreas metropolitanas de onde as chamadas se originam. Sabe-se que 1% dos usuários legítimos fazem suas chamadas de 2 ou mais áreas metropolitanas em um único dia. Entretanto, 30% dos usuários fraudulentos fazem suas chamadas de 2 ou mais áreas metropolitanas em um único dia. A proporção de usuários fraudulentos é de 0,01%. Se o mesmo usuário fizer as suas chamadas de 2 ou mais áreas metropolitanas em um único dia, qual será a probabilidade de que o usuário seja fraudulento?

Solução:
F: fraudulento , M: chamadas de 2 ou mais áreas

$$\begin{aligned} P[F] &= 0,0001 \ ; \ P[M|\bar{F}] = 0,01 \ ; \ P[M|F] = 0,03 \\ P[F|M] &= \ ? \\ P[F|M] &= \frac{P[M|F]P[F]}{P[M|F]P[F] + P[M|\bar{F}]P[\bar{F}]} = \end{aligned}$$

```
> (0.03*0.0001)/(0.03*0.0001+ 0.01*0.9999)

[1] 0,0002999
```

---

122. Para selecionar seus funcionários, uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento durante uma semana. No final do curso, eles são submetidos a uma prova e 25% são classificados como bons, 50% como médios e os restantes como fracos. Para facilitar a seleção a empresa pretende substituir o treinamento por um teste. Para isso, gostaria de conhecer qual a probabilidade de um indivíduo aprovado no teste ser considerado fraco caso fizesse o treinamento. Neste ano, antes do início do curso foi aplicado o teste. Sabe-se que a probabilidade do candidato ser aprovado no teste dado que ele é considerado bom no treinamento é 0,8, de ser aprovado no teste dado que ele é considerado médio no treinamento é 0,5 e de ser aprovado no teste dado que ele é considerado fraco no treinamento é 0,2.

Solução:

---

123. Assume-se que o tempo de processamento de uma certa requisição tem distribuição normal de média 50 segundos e desvio padrão de 2 segundos.

(a) Qual a porcentagem esperada de processos com o tempo de processamento inferior a 45 segundos?

(b) Qual a porcentagem esperada de processos em que o tempo de processamento não se desvia da média em mais que 1,5 desvios padrão?

(c) O que acontecerá com a porcentagem do item anterior se o servidor for trocado por outro que tem tempo médio de processamento de 45 segundos e o desvio padrão de 3 segundos?

(d) Mantendo o desvio padrão de 2 segundos, em quanto deveria ser regulada a média para garantir que 90% ou mais dos processos tenham tempo de processamento inferior a 50 segundos?

(e) Mantendo a média de 50 segundos quanto deveria ser o desvio padrão para garantir que 95% dos processos tenham tempo de processamento entre 46 e 54 segundos?

Solução:

(a)
```
> pnorm(45, m=50, sd=2)
[1] 0,00621
```

(b)
```
> pnorm(53, m=50, sd=2) - pnorm(47, m=50, sd=2)
[1] 0,8664
```

ou simplesmente

```
> pnorm(1.5) - pnorm(-1.5)
[1] 0,8664
```

(c) *a mesma da anterior*

```
> pnorm(1.5) - pnorm(-1.5)
[1] 0,8664
```

(d) `> 50 - qnorm(0.90) * 2`

```
[1] 47,44
```

(e) `> (54-50)/qnorm(0.975)`

```
[1] 2,041
```

---

124. Em média 5% dos produtos vendidos por uma loja são devolvidos. Qual a probabilidade de que, das quatro próximas unidades vendidas deste produto, duas sejam devolvidas?

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{número de produtos devolvidos em quatro unidades vendidas} \\ X &\sim B(n=4, p=0.05) \\ P[X=2] &= \binom{4}{2} 0.05^2 0.95^{4-2} = 0,01354 \end{aligned}$$

Solução computacional com o programa R:

```
> dbinom(2, size=4, prob=0.05)

[1] 0,01354
```

---

125. A demanda diária de arroz em um supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória com f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} 2x/3, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 - x/3, & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Qual a probabilidade de se vender mais de 150 kg num dia, escolhido ao acaso?

(b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?

(c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada a disposição dos clientes para que não falte o produto em 90% dos dias?

Solução:

```
> fx <- function(x){
+   y <- numeric(length(x))
+   y[x < 0 | x > 3] <- 0
+   y[x >= 0 & x <= 1] <- 2*x[x >= 0 & x <= 1]/3
+   y[x >= 1 & x <= 3] <- 1-(x[x >= 1 & x <= 3]/3)
+   return(y)
+ }
> integrate(fx,0,3)

1 with absolute error < 1,1e-15
```

E neste caso as soluções seriam:

(a) $P[X > 150] = \int_{1,5}^{3} f(x)dx = 0.375$

```
> integrate(fx,1.5,3)

0,375 with absolute error < 4,2e-15
```

(b) $30\mathrm{E}[X] = 30\int_0^3 xf(x)dx$

```
> EX <- integrate(function(x){x*fx(x)},0,3)$value
> EX
[1] 1,333
> 30* EX * 100
[1] 4000
```

(c)

$$\begin{aligned} P[X < k] &= 0,90 \\ P[X \geq k] &= 0,10 \\ (3-k)(1-k/3) &= 0,10 \end{aligned}$$

```
> k <- optimize(function(k)(integrate(fx, k, 3)$value - 0.10)^2, c(0, 3))$min
> k
[1] 2,225
> round((3-k)*(1-(k/3))/2, dig=4)
[1] 0,1
```

---

126. Uma empresa paga seus estagiários de acordo com o ano de curso do estudante. O salário mensal é dado por metade do salário mínimo vezes o ano de curso do estagiário e considera-se estudantes até o quinto ano. A empresa vai admitir escolhendo ao acaso dois novos estagiários e vamos admitir que todos os anos têm igual número de estudantes interessados no estágio. Vamos considerar ainda que a população é grande o suficiente para que não haja diferença entre escolher com ou sem reposição. Qual a probabilidade de:

(a) os dois serem do primeiro ano?

(b) a empresa gastar no máximo 2 salários mínimos com os estagiários?

(c) gastar entre 1 e 3 salários mínimos?

(d) sabendo que gastou mais que 1,5 salários, gastar menos que 4 salários mínimos?

Solução:

X : ano de um estudante selecionado

x	1	2	3	4	5
P[X=x]	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Y : despesa da empresa com dois estagiários (em salários mínimos)

y	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
P[Y=y]	1/25	2/25	3/25	4/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25

(a) $P[X_1 = 1, X_2 = 2] = P[Y = 1] = \frac{1}{25}$

(b) $P[Y \leq 2] = \frac{6}{25}$

(c) $P[1 \leq Y \leq 3] = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

(d) $P[Y < 4 | Y > 1,5] = \frac{P[Y>1,5 | Y<4]}{P[Y>1,5]} = \frac{16/25}{22/25} = \frac{8}{11}$

127. Um lote de 100 chips semicondutores contém 20 defeituosos. Seleciona-se dois ao acaso do lote, sem reposição.

(a) qual a probabilidade de que o segundo seja defeituoso, sabendo que o primeiro não era defeituoso?
(b) qual a probabilidade de ambos sejam defeituosos?
(c) qual a probabilidade do item anterior caso o primeiro chip com defeito seja retornado ao lote antes da retirada do segundo?
(d) retirando-se 8 chips, qual a probabilidade de que no máximo 1 seja defeituoso?
(e) suponha agora que os chips são retirados um a um até que se encontre o primeiro defeituoso. Qual a probabilidade de que sejam necessárias mais que 3 retiradas para que se encontre o primeiro defeituoso?
(f) suponha que 12 chips são retirados de uma só vez. Qual a probabilidade de que se encontre no máximo 2 defeituosos?

Solução:

(a)
$$P[X_1 = \bar{D}, X_2 = D] = \frac{80}{100} \cdot \frac{20}{99} = 0,162$$
(b)
$$P[X_1 = D, X_2 = D] = \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} = 0,038$$
(c)
$$P[X_1 = D, X_2 = D] = \frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100} = 0,04$$
(d)
$$\begin{aligned} X &\sim HG(N = 100, n = 8, k = 20) \\ P[X \leq 1] &= P[X = 0] + P[X = 1] \end{aligned}$$

```
> phyper(1, 20, 80, 8)
[1] 0,4972
```

(e)
$$\begin{aligned} X &\sim G(p = 20/100) \\ P[X > 3] &= 1 - P[X = 1] - P[X = 2] - P[X = 3] \end{aligned}$$

```
> 1- pgeom(2, p=20/100)
[1] 0,512
```

(f)
$$\begin{aligned} X &\sim HG(N = 100, n = 12, k = 20) \\ P[X \leq 2] &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] \end{aligned}$$

```
> phyper(2, 20, 80, 12)
[1] 0,5547
```

---

128. O peso de um tênis de corrida sofisticado é normalmente distribuído com média de 12 onças (onça é uma unidade de peso) e desvio padrão de 0,5 onças.
$$X \sim N(12, 0.5^2)$$

(a) qual a probabilidade de um tênis pesar mais que 13,2 onças?
(b) qual a probabilidade de um tênis pesar entre 11,6 e 12,7 onças?
(c) quanto deveria ser o desvio padrão para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?
(d) se o desvio padrão se mantiver em 0,5, quanto deveria ser a média para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?

Solução:

(a) $P[X > 13.2]$

```
> 1 - pnorm(13.2, mean=12, sd=0.5)
[1] 0,008198
```

(b) $P[11.6 < X < 12.7]$

```
> pnorm(12.7, mean=12, sd=0.5) - pnorm(11.6, mean=12, sd=0.5)
[1] 0,7074
```

(c) $P[X < 13] = 0.999$; $\sigma =?$

```
> (13 - 12)/qnorm(0.999)
[1] 0,3236
```

(d) $P[X < 13] = 0.999$; $\mu =?$

```
> 13 - 0.5 * qnorm(0.999)
[1] 11,45
```

---

129. Suponha que a resistência de amostras de cimento pode ser modelada usando uma distribuição normal de média 6000 kilogramas por centímetro quadrado e desvio padrão de 100 kilogramas por centímetro quadrado.

(a) qual a probabilidade de que uma amostra tenha resistência superior a 5750 kg/cm^2?

(b) qual a probabilidade de que uma amostra tenha resistência entre 5800 e 6100 kg/cm^2 ?

(c) qual o valor K tal que 90% das amostras tem resistência acima dele?

(d) amostras serão retiradas e testadas uma a uma até que se encontre uma para a qual a resistência seja superior a 6200 kg/cm^2. Qual a probabilidade de que seja necessário mais que 3 retiradas até que se encontre esta amostra?

(e) retirando-se 6 amostras, qual a probabilidade de que 3 delas tenham resistência inferior a 5900 kg/cm^2 ?

(f) Suponha um lote de 30 amostras das quais 20 tem resistência inferior a 6100 kg/cm^2 e as demais superior a este valor. Se escolhermos 5 entre estas 5 amostras qual a probabilidade de que no máximo 1 tenha resistência inferior a 6100 kg/cm^2 ?

(g) a composição do cimento deverá alterada para atender um critério de qualidade que exige que ao menos 75% das amostras tenham resistência superior a 6000 kg/cm^2. Mantendo-se o desvio padrão de 100 kg/cm^2, de quanto deveria ser a média para atender a este padrão de qualidade?

(h) Suponha agora que a média de 6000 kg/cm^2 não pode ser alterada mas deseja-se que não mais que 5% das amostras tenham resistência inferior a 5900 kg/cm^2. Quanto deveria ser o desvio padrão para atender a este critério?

Solução:

---

130. Assume-se que a durabilidade de um certo tipo de estrutura tem distribuição normal de média 50 anos e desvio padrão de 10 anos.

$$\begin{aligned} X &: \text{durabilidade da estrutura (em anos)} \\ X &\sim N(50, 10^2) \end{aligned}$$

(a) Qual a porcentagem esperada de estruturas com durabilidade inferior a 45 anos?

(b) Qual a porcentagem esperada de estruturas com durabilidade entre 37 e 65 anos?

(c) O que acontecerá com a porcentagem do item anterior se os materiais forem trocados de modo que a durabilidade média passe a ser de 55 anos e o desvio padrão de 15 anos?

(d) Mantendo o desvio padrão de 10 anos, de quanto deveria ser a durabilidade média para garantir que 90% ou mais das estruturas tenham durabilidade superior a 50 anos?

(e) Mantendo a média de 50 anos quanto deveria ser o desvio padrão para garantir que 95% das estruturas tenham durabilidade entre 46 e 54 anos?

Solução:

(a) $P[X < 45] = P[Z < \frac{45-50}{10}] = 0,3085$
Portanto 30,9% das estruturas devem durar menos que 45 anos.

(b) $P[37 < X < 45] = P[\frac{37-50}{10} < Z < \frac{65-50}{10}] = 0,8364$
Portanto 93,2% das estruturas devem durar entre 37 e 65 anos.

(c) $P[37 < X < 45] = P[\frac{37-55}{15} < Z < \frac{65-55}{15}] = 0,6324$
Portanto, com esta média e este desvio padrão, 74,6% das estruturas devem durar entre 37 e 65 anos.

(d)

$$
\begin{aligned}
P[X > 50] &= 0.90 \\
P[Z > \frac{50-\mu}{10}] &= 0.90 \\
z &= -1,282 \\
\frac{50-\mu}{10} &= -1,282 \\
\mu &= 62,82
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
P[46 < X < 54] &= 0.95 \\
P[50 < X < 54] &= 0.475 \\
P[Z > \frac{54-50}{\sigma}] &= 0.475 \\
z &= 1,96 \\
\frac{54-50}{\sigma} &= 1,96 \\
\sigma &= 2,04
\end{aligned}
$$

---

131. O tempo de vida em anos de um componente eletrônico tem função de distribuição de probabilidade:

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{x}{3} & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

(a) Justifique porque $f(x)$ é uma f.d.p. válida.

(b) Qual a probabilidade de um componente durar entre 6 e 18 meses?

(c) Qual o tempo mediano de vida?

(d) Qual o tempo médio de vida?

Solução:
Seja a v.a. X: tempo de vida do componente
Vamos primeiro definir a função de distribuição

```
> fx <- function(x) {
+   y <- rep(0, length(x))
+   y[(x > 0 & x < 1)] <- (2/3) * x[(x > 0 & x < 1)]
+   y[(x >=1 & x < 3)] <- 1 -  (x[(x >=1 & x < 3)]/3)
+   return(y)
+ }
```

(a) *Para ser f.d.p. válida vamos checar 2 condições:*
(i) $f(x) \geq 0$

```
> x <- seq(0,3,l=101)
> all(fx(x) >= 0)

[1] TRUE
```

(ii) $\int f(x)dx = 1$

```
> integrate(fx, 0, 3)$value

[1] 1
```

(b) $P[0,5 < X < 1,5] = \int_{0,5}^{1,5} f(x)dx$

```
> integrate(fx, 0.5, 1.5)$value

[1] 0,5417
```

(c) *Tempo mediano:* $P[X < md] = 0,5$ *ou seja,* $\int_0^{md} f(x)dx = 0.5$

```
> qfx <- function(x, quantil=0.5) (quantil - integrate(fx, 0, x)$value)^2
> optimise(qfx, c(0, 3))$min

[1] 1,268
```

(d) *Tempo médio:* $\mu = E[X] = \int xf(x)dx$

```
> efx <- function(x) x*fx(x)
> integrate(efx, 0, 3)$value

[1] 1,333
```

---

132. O quadro abaixo mostra os resultados da duração de válvulas usadas em uma indústria fornecidas por 3 diferentes companhias. Baseado nesta tabela responda as perguntas a seguir.

	Duração da válvula		
Fornecedor	menos que 4 meses	4 a 8 meses	mais que 8 meses
X	64	120	16
Y	104	175	21
Z	27	48	5

(a) Sorteando-se uma válvula qual a probabilidade de ter vindo do fornecedor X?

(b) Qual a probabilidade de uma válvula do fornecedor

(c) Qual a probabilidade do uma válvula que durou mais de 8 meses ser do fornecedor Y?

(d) Você diria que o tempo de duração independe do fornecedor? Justifique sua resposta.

(e) Baseando-se nestes dados, comprando um lote de 10 peças do fornecedor Y qual a probabilidade de que todas durem menos que 8 meses?

(f) Inspeciona-se as peças que duraram 4 meses uma a uma até encontrar uma que veio do fornecedor X. Qual a probabilidade de que sejam inspecionadas mais que 3 peças até que se encontre a primeira vinda deste fornecedor?

Solução:

```
> mat <- as.table(matrix(c(64,104,27,120,175,48,16,21,5), nc=3))
> dimnames(mat) <- list(c("X","Y","Z"), c("<4","4-8",">8"))
> mat

   <4 4-8  >8
X  64 120  16
Y 104 175  21
Z  27  48   5

> (total <- sum(mat))
```

```
[1] 580

> (for.tot <- rowSums(mat))

  X   Y   Z
200 300  80

> (tem.tot <- colSums(mat))

 <4 4-8  >8
195 343  42
```

Seja a notação:

- X, Y ou Z : peça vir do fornecedor X, Y ou Z
- T1: peça durar menos que 4 meses
- T2: peça durar de 4 meses a 8 meses
- T3: peça durar mais que 8 meses

(a) $P[X] = 200/580 = 0,345$

(b) $P[T1|X] = 27/80 = 0,338$

(c) $P[Y|T3] = 21/42 = 0,5$

(d)
```
> prop.table(mat, mar=1)

      <4    4-8     >8
X 0,3200 0,6000 0,0800
Y 0,3467 0,5833 0,0700
Z 0,3375 0,6000 0,0625
```

Sim porque as proporções de tempos de duração são bastante parecidas entre os 3 fornecedores, conforma mostra a tabela acima.

(e)

$$\begin{aligned} D &: \text{ número de peças de Y que duram menos de 8 meses} \\ D &\sim Bin(n = 10, p = P[T3|Y]) \\ p &= P[T3|Y] = 48/300 = 0,16 \\ P[D = 10] &= \binom{10}{10} p^{10}(1-p)^{10-10} \\ &= 1,1e-08 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} E &: \text{ número de peças inspecionadas (que duraram 4 meses) até encontrar a primeira vinda de } X \\ E &\sim Geo(p = P[X|T1]) \quad e = 1, 2, \ldots \\ p &= P[X|T1] = 64/195 = 0,328 \\ P[E > 3] &= 1 - P[E \leq 3] = 1 - P[E = 1] - P[E = 2] - P[E = 3] \\ &= 1 - (p(1-p)^{1-1}) - (p(1-p)^{2-1}) - (p(1-p)^{3-1}) = 0,303 \end{aligned}$$

---

133. A opinião de consumidores é usada para avaliar versões preliminares de produtos. Dados históricos mostram que 95% dos produtos de muito sucesso comercial tiveram boas avaliações preliminares, 60% dos produtos com sucesso comercial moderado receberam boas avaliações preliminares, e 10% de produtos com mal desempenho comercial receberam boas avaliações. Além disto, 40% dos produtos obtiveram muito sucesso comercial, 35% tiveram desempenho comercial moderado e 25% mostraram mal desempenho comercial.

(a) Qual a probabilidade que um produto tenha uma boa avaliação?

(b) Se um determinado produto tem uma boa avaliação preliminar, qual a probabilidade que irá ter muito sucesso comercial?

(c) Se um determinado produto não tem uma boa avaliação preliminar, qual a probabilidade que ainda assim irá ter muito sucesso comercial?

Solução:

A_1: sucesso , A_2: sucesso moderado , A_3: mal desempenho
B: boa avaliação preliminar , $\bar{B}$: má avaliação preliminar

$$P[B|A_1] = 0,95 \quad P[B|A_2] = 0,60 \quad P[B|A_3] = 0,10$$
$$P[A_1] = 0,40 \quad P[A_2] = 0,25 \quad P[A_3] = 0,25$$

(a) $P[B] = P[B|A_1] * P[A_1] + P[B|A_2] * P[A_2] + P[B|A_3] * P[A_3] =$
$= (0,95)(0,40) + (0,60)(0,25) + (0,10)(0,25) = 0,615$

(b) $P[A_1|B] = P[A_1 \cap B]/P[B] = (P[A_1] * P[B|A_1])/P[B] = (0,40 * 0,95)/0,615 = 0,618$

(c) $P[\bar{B}] = 1 - P[B] = 1 - 0,615 = 0,385$
$P[A_1 \cap \bar{B}] = P[A_1 \cap \bar{B}]/P[\bar{B}] = (P[\bar{B}|A_1] * P[A_1])/P[\bar{B}] = (0.05 * 0.40)/0,385 = 0,052$

Alternativamente, poderia-se obter a solução a partir da montagem da tabela a seguir.

	Sucesso	Moderado	Mal	Total
Boa	0,38	0,21	0,025	0,615
Má	0,02	0,14	0,225	0,385
Total	0,40	0,35	0,25	1,00

---

134. Um usuário de transporte coletivo chega pontualmente às 8:00 para pegar seu ônibus. Devido ao trânsito intenso, a demora pode ser de qualquer tempo entre 0 e 20 minutos (admita que o tempo é marcado apenas em minutos inteiros). Pergunta-se:

(a) Qual a probabilidade de demorar mais de 10 minutos?

(b) Qual a probabilidade de demorar pelo menos 5 mas não mais de 10 minutos?

(c) Qual a probabilidade demora não chegar a 5 minutos?

(d) Se um amigo chegou 10 minutos atrasado e vai pegar o mesmo ônibus (que ainda não passou), qual a probabilidade do amigo atrasado esperar até 3 minutos?

Solução:

(a)
```
> 10/21
[1] 0,4762
```

(b)
```
> 6/21
[1] 0,2857
```

(c)
```
> 5/21
[1] 0,2381
```

(d)
```
> 4/11
[1] 0,3636
```

---

135. Assume-se que o tempo de processamento de uma certa requisição tem distribuição normal de média 500 segundos e desvio padrão de 20 segundos.

(a) Qual a porcentagem esperada de processos com o tempo de processamento inferior a 450 segundos?

(b) Qual a porcentagem esperada de processos em que o tempo de processamento não se desvia da média em mais que 1,5 desvios padrão?

(c) O que acontecerá com a porcentagem do ítem anterior se o servidor for trocado por outro que tem tempo médio de processamento de 450 segundos e o desvio padrão de 30 segundos?

(d) Mantendo o desvio padrão de 20 segundos, em quanto deveria ser regulada a média para garantir que 90% ou mais dos processos tenham tempo de processamento inferior a 500 segundos?

(e) Mantendo a média de 500 segundos quanto deveria ser o desvio padrão para garantir que 95% dos processos tenham tempo de processamento entre 460 e 540 segundos?

Solução

(a) `> pnorm(450, m=500, sd=20)`

`[1] 0,00621`

(b) `> pnorm(530, m=500, sd=20) - pnorm(470, m=500, sd=20)`

`[1] 0,8664`

ou simplesmente

`> pnorm(1.5) - pnorm(-1.5)`

`[1] 0,8664`

(c) *a mesma da anterior*

`> pnorm(1.5) - pnorm(-1.5)`

`[1] 0,8664`

(d) `> 500 - qnorm(0.90) * 20`

`[1] 474,4`

(e) `> (540-500)/qnorm(0.975)`

`[1] 20,41`

---

136. O tempo de vida de um componente eletrônico tem distribuição exponencial com tempo médio de vida de 2 anos.

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Exp}(\lambda = 2) \\ f(x) &= \lambda \exp\{-\lambda x\} \end{aligned}$$

(a) qual a probabilidade de que o dure menos que 18 meses?

(b) em um lote de 3,000 componentes quantos devem durar mais que 3 anos?

(c) qual o tempo até o qual se espera que 90% dos componentes falhem?

(d) Você compra um equipamento que tem 30 meses, com o componente em funcionamento, e planeja mantê-lo por mais 1 ano. Qual a probabilidade de que o componente falhe durante o período que você pretende manter o equipamento?

Solução:

(a) $P[X < 1.5] = \int_0^{18} f(x)dx$

```
> pexp(1.5, rate=1/2)
[1] 0,5276
```

(b) $3.000 P[X > 3] = 3.000 \int_0^{18} f(x)dx$

```
> 3000 * pexp(3, rate=1/2, low=F)
[1] 669,4
```

(c)

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 0.90 \\ \int_0^t f(x)dx &= 0.90 \end{aligned}$$

```
> qexp(0.9, rate=1/2)
[1] 4,605
```

(d) $P[2,5 < X < 3,5 | X > 2.5]$

```
> (pexp(3.5, rate=1/2) - pexp(2.5, rate=1/2))/(1 - pexp(2.5, rate=1/2))
[1] 0,3935
```

ou, usando a propriedade da "falta de memória" da exponencial, simplesmente:

```
> pexp(1, rate=1/2)
[1] 0,3935
```

---

137. Crie um exemplo, indique qual a variável aleatória e calcule a probabilidade de ao menos um evento de sua escolha das seguintes distribuições de probabilidades.
(a) Binomial (b) Poisson (c) Geométrica (d) Hipergeométrica (e) Uniforme Discreta

Solução:
Solução: as serão examinadas, não existe solução única para a questão.

---

138. Um lote de 50 containers de suco de laranja contém 5 que estão contaminados.

(a) Selecionando do lote 2 containers ao acaso, sem reposição:
   i. qual a probabilidade do segundo ser contaminado sabendo que o primeiro é contaminado
   ii. qual a probabilidade de ambos serem livres de contaminação

(b) Tomando uma amostra de 4 containers qual a probabilidade de encontrar no máximo 3 contaminados

(c) Inspecionando-se 5 containers escolhidos um a um, com reposição, qual a probabilidade de encontrar 2 ou mais contaminados

(d) Amostrando-se containers até encontrar o primeiro contaminado qual a probabilidade de que sejam amostrados exatamente 10 containers

(e) Considerando agora um lote de apenas 8 containers dos quais 3 são contaminados qual a probabilidade de que sejam amostrados no máximo 6 até se encontrar o terceiro contaminado?

Solução:

(a) i. *Denote C_i: o i-ésimo container é contaminado e $\bar{C}_i$ o i-ésimo container é não contaminado. Sendo o primeiro contaminado, restam para o segundo 49 containers dos quais 4 são contaminados e portanto a probabilidade é*
$P[C_2|C_1] = 4/49$

ii. $P[C1, C2] = P[C1].P[C_2|C1] = (45/50)(44/49) = 0{,}8082$
Outra forma seria usar o fato de que a variável X: número de containers contaminados em uma amostra de 2 containers, tem distribuição hipergeométrica $X \sim HG(N = 50, n = 2, r = 5)$. O R *usa uma parametrização diferente para hipergeométrica e a probabilidade pedida $P[X = 2]$ seria dada por:*

```
> phyper(0, 5, 45, 2)
[1] 0,8082
```

(b) *Novamente podemos considerar uma hipergeométrica $X \sim HG(N = 50, n = 4, r = 5)$ para X: número de contaminados em uma amostra de 4 e a probabilidade pedida $P[X \leq 3]$ dada por:*

```
> phyper(3, 5, 45, 4)
[1] 1
```

(c) *Neste caso X: número de containers contaminados, $X \sim B(n = 5, p = 0.1)$ e a probabilidade $P[X \geq 2] = P[X \leq 1]$ é dada por:*

```
> 1 - pbinom(1, 5, .1)
[1] 0,08146
```

(d) *Considerando o problema com reposição, X: número de containers até amostrados encontrar o primeiro contaminado, tem distribuição geométrica $X \sim G(p = 0.1)$ e queremos calcular $P[X = 10]$. Note que o* R *usa uma parametrização diferente para distribuição geométrica onde X é o número de falhas até o primeiro sucesso e portanto a probabilidade é calculada com:*

```
> dgeom(9, .1)
[1] 0,03874
```

(e) *Novamente considerando o problema com reposição temos que X: número de containers examinados até encontrar o terceiro contaminado tem distribuição binomial negativa, $X \sim BN(r = 3, p = 3/8)$. Na parametrização usada pelo* R *conta-se o número de falhas até atingir o número desejado de sucessos e a solução é dada por:*

```
> pnbinom(3, 3, 3/8)
[1] 0,404
```

---

139. O número de mensagens de "e-mail" enviadas a um sistema é uma variável aleatória com distribuição Poisson com média de 5 mensagens por minuto.

(a) Qual a probabilidade que exatamente 5 mensagens sejam recebidas em 1 minuto?

(b) Qual a probabilidade que menos que 2 mensagens sejam recebidas em meio minuto?

Solução:

(a) *X: o número de mensagens recebidas por minuto, $X \sim P(\lambda = 5)$ e $P[X = 5]$ é dado por:*
$P[X = 5] = \frac{\mathrm{e}^5 5^5}{5!} = 0,1755$

(b) *X: o número de mensagens recebidas em meio minuto, $X \sim P(\lambda = 2.5)$ e $P[X \geq 2]$ é dada por:*
$P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - \frac{\mathrm{e}^5 5^0}{0!} \frac{\mathrm{e}^5 5^1}{1!} = 0,7127$

Solução computacional com o programa *R*:

```
> e1 <- dpois(5, 5)
> e2 <- ppois(1, 2.5, lower=FALSE)
```

---

140. Seja a função $f(x) = k(5 - 2x)$ para $0 < x < 2$.

(a) qual deve ser o valor de k para que $f(x)$ seja função de densidade de probabilidade?

(b) encontre os quartis desta distribuição.

(c) encontre o valor esperado desta distribuição.

(d) calcule $P[X > 1.3]$

Solução:

(a) *A solução analítica deste problema consiste em:*

- *encontrar k tal que: $\int_0^2 k(5 - 2x)dx = 1$*
- *Verificar se com este valor de k $f(x) > 0$ para $0 < x < 2$.*

Embora a solução analítica deste problema seja fácil, vamos ver também uma solução computacional. Lembrando que soluções computacionais são particularmente úteis em problemas mais complexos onde a solução analítica não pode ser obtida. Vamos primeiro definir no R *esta função. Depois vamos definir uma função de k* `achaK` *como a diferença entre a área sob a função e 1. O valor de k será aquele para o qual esta diferença é nula. Portanto na sequência usamos uma função de otimização para encontrar o valor de k que minimiza esta diferença. Ao final redefinimos a função com o valor de k e checamos se integra 1.*

```
> fxK <- function(x,K) ifelse((x < 0 | x > 2), 0, K*(5-2*x))
> achaK <- function(k) return((integrate(fxK, 0, 2, K=k)$value - 1)^2)
> k <- optimize(achaK, c(-10,10))$min
> k

[1] 0,1667

> fx <- function(x) ifelse((x < 0 | x > 2), 0, k*(5-2*x))
> integrate(fx, 0, 2)

1 with absolute error < 1,1e-14
```

(b) *Os quartis q_1, md, eq_3 são encontrados resolvendo as integrais:*

$$\int_0^{q1} f(x)dx = 0.25 \;\; , \;\; \int_0^{md} f(x)dx = 0.50 \;\; , \;\; \int_0^{q3} f(x)dx = 0.75.$$

As soluções analíticas podem ser facilmente obtidas, mas mostramos abaixo soluções numéricas.

```
> f25 <- function(x) return((integrate(fx, 0, x)$value - 0.25)^2)
> q25 <- optimize(f25, c(0,2))$min
> q25

[1] 0,3206

> f50 <- function(x) return((integrate(fx, 0, x)$value - 0.5)^2)
> q50 <- optimize(f50, c(0,2))$min
> q50

[1] 0,6972

> f75 <- function(x) return((integrate(fx, 0, x)$value - 0.75)^2)
> q75 <- optimize(f75, c(0,2))$min
> q75

[1] 1,177
```

(c) *A esperança é dada por* $E[X] = \int_0^2 x f(x) dx$*, que novamente pode ser obtida analiticamente e com solução computacional dada por:*

```
> ex <- function(x) x * fx(x)
> integrate(ex, 0, 2)$val
[1] 0,7778
```

(d) *A probabilidade é dada pela integral* $\int_{1.3}^2$*, que pode ser resolvida analiticamente ou por:*

```
> integrate(fx, 1.3, 2)$val
[1] 0,1983
```

Note ainda que poderia ser encontrada uma solução geométrica para este problema, uma vez que a função de densidade é uma reta. Vamos fazer o gráfico da função e indicar a área da probabilidade pedida no item (d).

```
> par(mar=c(3,3,0,0), mgp=c(2,1,0))
> plot(fx, -0.5, 2.5, n=1001)
> polygon(x=c(1.3, 1.3,2,2), y=c(0,fx(1.3), fx(2),0), col="gray")
```

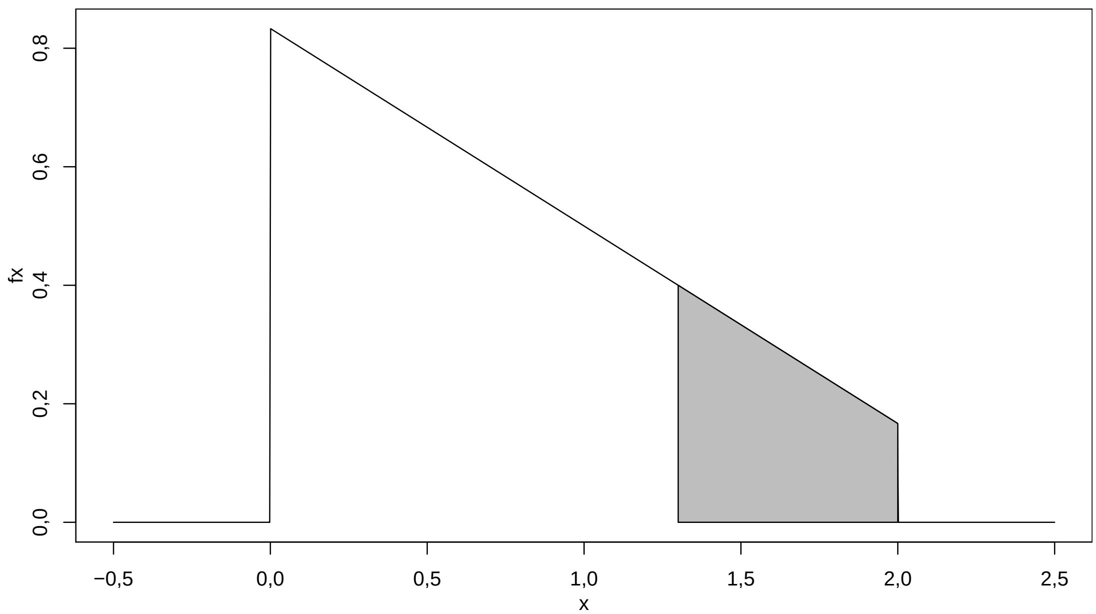


Figura 5: Função de densidade $f(x) = k(5 - 2x)\mathrm{I}_{[0,2]}(x)$ com área marcada correspondente à probabilidade pedida.

---

141. O tempo entre chamadas de requisição de serviços de uma unidade de manutenção tem distribuição exponencial com tempo médio entre chamadas de 15 minutos.

(a) qual a probabilidade de que não haja chamadas em um intervalo de 30 minutos?

(b) qual a probabilidade de que haja pelo menos 1 chamada num intervalo de 10 minutos

(c) qual a probabilidade de que a primeira chamada chegue entre 5 e 10 minutos depois que o serviço é aberto

(d) Determine o comprimento do intervalo de tempo tal que a probabilidade de ao menos uma chamada no intervalo seja de 0.90

Solução:

$$\begin{aligned}
X &: \text{intervalo de tempo entre requisições}\\
X &\sim \text{Exp}(\lambda = 1/15)\\
E[X] &= 1/\lambda = 15\\
f(x) &= \lambda e^{-\lambda x}\\
F(x) &= 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

(a) $P[X > 30] = 1 - F(30) = 0,135$

(b) $P[X \leq 10] = F(10) = 0,487$

(c) $P[5 \leq X \leq 10] = F(10) - F(5) = 0,203$

(d) $P[X \leq T] = 0,90 \longrightarrow T = F^{-1}(0,90) = 34,539$

Soluções computacionais com o programa **R**

```
> (aa <- pexp(30, 1/15, lower=FALSE))

[1] 0,1353

> (bb <- pexp(10, 1/15))

[1] 0,4866

> (cc <- diff(pexp(c(5, 10), 1/15)))

[1] 0,2031

> (dd <- qexp(0.90, 1/15))

[1] 34,54
```

142. Um processo de manufatura de componentes produz 2% de defeituosos. Em um lote de 1000 componentes qual a probabilidade de que:

(a) mais de 25 seja defeituosos.

(b) sejam encontrados entre 20 e 30 defeituosos.

Solução:

$$X : \text{número de defeituosos}$$

Solução exata, utilizando a distribuição binomial

$$X_B \sim \mathrm{B}(n = 1000, p = 0,02)$$

(a) $P[X_B > 25] = 1 - P[X_B \leq 25] = \sum_{i=0}^{25} \binom{1000}{i} 0,02^i (1 - 0,02)^{1000-i} = 0,11$

(b) $P[20 \leq X_B \leq 30] = \sum_{i=20}^{30} \binom{1000}{i} 0,02^i (1 - 0,02)^{1000-i} = 0,518$

Solução aproximada, utilizando a aproximação da binomial pela normal

$$X_N \approx \mathrm{N}(\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0,02 = 20 \; ; \; \sigma^2 = n \cdot p(1-p) = 1000 \cdot 0,02(1 - 0,02) = 20)$$

(a) $P[X_B > 25] = P[X_N > 25,5] = P[Z > \frac{25,5-20}{4,43}] = P[Z > 1,24] = 0,129$

(b) $P[20 \leq X_B \leq 30] = P[19,5 \leq X_N \leq 30,5] = P[\frac{19,5-20}{4,43} < Z < \frac{30,5-20}{4,43}] = P[1,24 < Z < 2,37] = 0,536$

Soluções computacionais com o programa **R**

```
> (a <- pbinom(25, size=1000, prob=0.02, lower=FALSE))

[1] 0,1099

> (b <- diff(pbinom(c(19,30), size=1000, prob=0.02)))

[1] 0,518
```

```
> (media <- 1000 * 0.02)

[1] 20

> (desvio <- sqrt(1000*0.02*0.98))

[1] 4,427

> (aa <- pnorm(25, m=media, sd=desvio, lower=FALSE))

[1] 0,1294

> (ba <- diff(pnorm(c(19.5, 30.5), m=media, sd=desvio)))

[1] 0,5361
```

---

143. O processo de produção de uma determinada peça é controlado de maneira que a percentagem de itens defeituosos é de 10%. Se os ítens são vendidos em caixas de 100 unidades qual a probabilidade de que em uma caixa:

(a) haja mais que 12% de defeituosos?

(b) não seja encontrado nenhum defeituoso?

(c) se um cliente encontrar mais de 15 defeituosos ele recebe uma caixa grátis. Qual a proporção esperada de clientes bonificados?

Solução:

$$X : \text{número de defeituosos (em caixas de 100 unidades)}$$

Solução exata, utilizando a distribuição binomial

$$X_B \sim \mathrm{B}(n = 100, p = 0,10)$$

(a) $P[X_B > 12] = 1 - P[X_B \leq 12] = \sum_{i=0}^{12} \binom{100}{i} 0,10^i (1 - 0,10)^{100-i} = 0,198$

(b) $P[X_B > 0] = \binom{100}{0} 0,10^0 (1 - 0,10)^{100-0} = 2,66e - 05$

(c) $P[X_B > 15] = 1 - P[X_B \leq 15] = \sum_{i=0}^{15} \binom{100}{i} 0,10^i (1 - 0,10)^{100-i} = 0,0399$

Solução aproximada, utilizando a aproximação da binomial pela normal

$$X_N \approx \mathrm{N}(\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,10 = 10 \ ; \ \sigma^2 = n \cdot p(1-p) = 100 \cdot 0,10(1 - 0,10) = 9$$

(a) $P[X_B > 12] = P[X_N > 12,5] = P[Z > \frac{12,5-10}{3}] = P[Z > 0,833] = 0,202$

(b) $P[X_B = 0] = P[X_N \leq 0,5] = P[Z < \frac{0,5-10}{3}] = P[Z < -3,17] = 0,000771$

(c) $P[X_B > 15] = P[X_N > 15,5] = P[Z > \frac{15,5-10}{3}] = P[Z > 1,83] = 0,0334$

Soluções computacionais com o programa **R**

```
> (cxa <- pbinom(12, size=100, prob=0.10, lower=FALSE))

[1] 0,1982

> (cxb <- dbinom(0, size=100, prob=0.10))

[1] 2,656e-05

> (cxc <- pbinom(15, size=100, prob=0.10, lower=FALSE))
```

```
[1] 0,03989

> (cxaa <- pnorm(12.5, m=10, sd=3, lower=FALSE))

[1] 0,2023

> (cxba <- pnorm(0.5, m=10, sd=3))

[1] 0,000771

> (cxca <- pnorm(15.5, m=10, sd=3, lower=FALSE))

[1] 0,03338
```

---

144. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido seja de $1.000cm^3$ e o desvio padrão de $10cm^3$. Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal.

   (a) Qual a porcentagem esperada de garrafas em que o volume é menor de $990cm^3$?
   (b) Qual a porcentagem esperada de garrafas em que o volume de líquido não se desvia da média em mais que 2 desvios padrão?
   (c) O que acontecerá com a porcentagem do ítem anterior se a máquina for regulada de forma que a média seja de $1.200cm^3$ e o desvio padrão de $20cm^3$
   (d) Mantendo o desvio padrão de $10cm^3$, em quanto deveria ser regulada a média para garantir que 90% ou mais da garrafas tenham volume10000 superior a $1.000cm^3$?
   (e) Mantendo a média de $1.000cm^3$ quanto deveria ser o desvio padrão para garantir que 99% das garrafas tenham volume entre 990 e 1010 cm^3?

Solução:

$$X : \text{volume de líquido por garrafa } (cm^3)$$
$$X \sim \mathrm{N}(\mu = 1.000\ ,\ \sigma^2 = 10^2)$$

(a) $100 \cdot P[X < 990] = 100 \cdot P[Z < \frac{990-1000}{10}] = 100 \cdot P[Z < -1] = 15,9\%$
(b) $100 \cdot P[-2 < Z < 2] = 95,4\%$
(c) Será a mesma, pois o valor de Z não se altera.
(d) $P[X > 1000] = 0,90 \rightarrow P[Z > -1,28] = 0,90 \rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow -1,28 = \frac{1000-\mu}{10} \rightarrow \mu = 1013$
(e) $P[990 < X < 1010] = 0,99 \rightarrow P[-2,58 < Z < 2,58] = 0,99 \rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow 2,58 = \frac{1010-1000}{\sigma} \rightarrow \sigma = 3,88$

Soluções computacionais com o programa **R**

```
> (ra <- pnorm(990, m=1000, sd=10))

[1] 0,1587

> (rb <- diff(pnorm(c(-2, 2))))

[1] 0,9545

> (rd <- 1000 - qnorm(0.10) * 10)

[1] 1013

> (re <- (1010-1000)/qnorm(0.995))
```

```
[1] 3,882
```

---

145. O tempo de vida de um regulador de voltagem de automóvel tem distribuição exponencial com tempo médio de vida de 6 anos.

(a) qual a probabilidade de que o regulador dure menos que 5 anos?
(b) qual a probabilidade de que o regulador dure mais que 10 anos?
(c) qual o tempo dentro do qual a probabilidade do regulador falhar é de 0,80?
(d) Voce compra um automóvel que tem 5 anos, com um regulador de voltagem em funcionamento, e planeja mantê-lo por mais 5 anos. Qual a probabilidade de que o regulador falhe durante o período que voce pretende manter o automóvel?

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{tempo de vida} \\ X &\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1/6) \\ \mathrm{E}[X] &= 6 \\ f(x) &= (1/6)\mathrm{e}^{-x/6} \\ F(x) &= \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-x/6} \end{aligned}$$

(a) $P[X < 5] = \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(x) = 0,565$
(b) $P[X > 10] = \int_{10}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(10) = 0,189$
(c) $P[X < x] = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/6} = 0,8 \rightarrow x = -6\log(1-0,8) = 9,66$
(d) $P[X < 10|X > 5] =$ [3] $P[X < 5] = \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(x) = 0,565$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> (au1 <- pexp(5, rate=1/6))

[1] 0,5654

> (au2 <- pexp(10, rate=1/6, low=F))

[1] 0,1889

> (au3 <- qexp(0.8, rate=1/6))

[1] 9,657

> (au4 <- pexp(5, rate=1/6))

[1] 0,5654
```

---

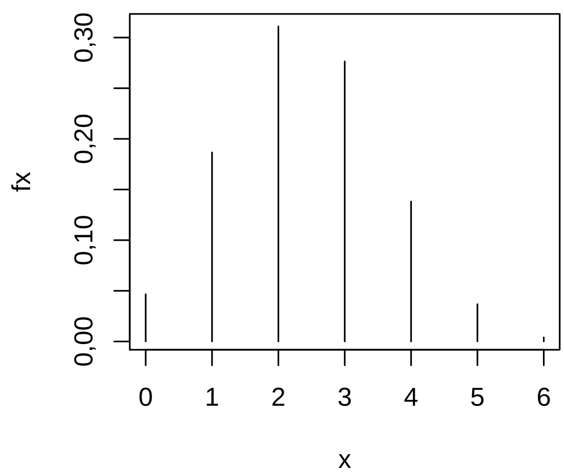
146. As linhas telefônicas para reservas em uma companhia aérea estão ocupadas 40% do tempo. Assuma que eventos de que as linhas estão ocupadas em chamadas sucessivas são independentes. Considere que 6 chamadas são feitas.

(a) Faça um gráfico da função de probabilidade
(b) Faça um gráfico da função acumulada de probabilidade (função de distribuição)
(c) Qual a probabilidade de que as linhas estejam ocupadas em exatamente 3 chamadas?
(d) Qual a probabilidade de que as linhas estejam ocupadas em no máximo 3 chamadas?
(e) Qual o número esperado de chamadas que terão a linha ocupada?

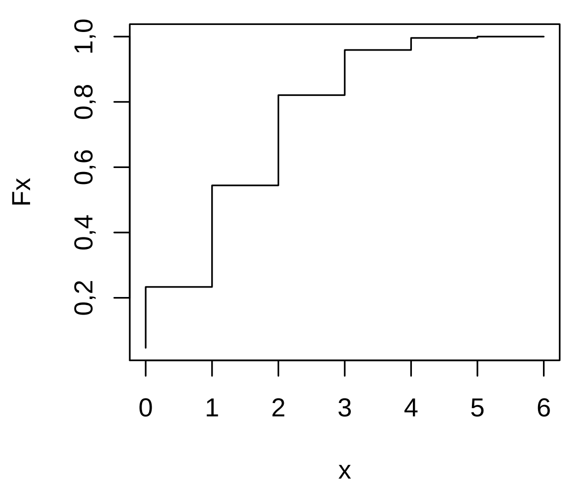
[3] propriedade da falta de memória da distribuição exponencial

Solução:

(a)
```
> x <- 0:6
> fx <- dbinom(x, size=6, prob=0.4)
> plot(x, fx, type='h')
```



(b)
```
> Fx <- pbinom(x, size=6, prob=0.4)
> plot(x, Fx, type="S")
```



(c)
```
> dbinom(3, 6, 0.4)
[1] 0,2765
```

(d)
```
> pbinom(3,6, 0.4)
[1] 0,8208
```

(e)
```
> sum(x*fx)
[1] 2,4
```

---

147. A probabilidade de indivíduos nascerem com certa característica é de 0,3. Para o nascimento de 5 indivíduos e considerando os nascimentos como eventos independentes, estude o comportamento da variável *número de indivíduos com a característica* e faça um gráfico de sua função de distribuição.

Solução:

---

148. Sendo X uma variável seguindo o modelo Normal com média $\mu = 130$ e variância $\sigma^2 = 64$, pergunta-se: (a) $P(X \geq 120)$ (b) $P(135 < X \leq 145)$ (c) $P(X < 120$ ou $X \geq 150)$

Solução:

---

149. A tabela a seguir mostra a distribuição de frequências de 125 trabalhadores da contrução civil desempregados em função da idade e duração do período de desemprego.

duração (dias)	Idade (anos) Abaixo de 35	Acima de 35
1-7	36	21
8-30	30	5
Mais de 30	14	19

(a) Baseando-se nestes dados voce diria que o tempo de desemprego está associado com a idade? Justifique a sua resposta.

(b) Sorteando-se ao acaso uma pessoa deste grupo qual a probabilidade de:
- estar desempregado de 1-7 dias e ter menos de 35 anos
- ter mais de 35 anos sabendo que está desempregado a mais de 30 dias
- estar desempregado de 8-30 dias ou ter menos que 35 anos
- estar desempregado a mais de 30 dias

Solução:

---

150. Mostre que as funções abaixo são funções de densidade de probabilidade para algum valor de k e determine o valor de k

(a) $f(x) = kx^2$ para $0 < x < 4$

(b) $f(x) = k(1 + 2x)$ para $0 < x < 2$

Calcule os quantis 5% e 95% da distribuição do ítem (a).

Solução:

---

151. O volume envasado de uma máquina de envasamento automático usada para envasar latas de uma bebida é distribuído normalmente com média 12,4 unidades de volume (u.v.) e desvio padrão de 0,1.

(a) Qual a probabilidade de que uma lata tenha menos de 12 u.v. ?

(b) Se todas a latas com volume menor que 12.1 ou maior que 12.6 são descartadas, que a proporção de latas a ser descartada?

(c) Quais são os valores de volume simétricos ao redor da média entre os quais espere-se encontrar 99% das latas?

Solução:

---

152. Um lote de 50 containers de suco de laranja contém 5 que estão contaminados. São selecionados do lote 2 containers ao acaso, sem reposição

 (a) qual a probabilidade do segundo ser contaminado sabendo que o primeiro é contaminado
 (b) qual a probabilidade de ambos serem livres de contaminação

Solução:

---

153. O número de mensagens enviadas a um sistema é uma variável aleatória com distribuição Poisson com média de 5 mensagens por hora.

 (a) Qual a probabilidade que exatamente 5 mensagens sejam recebidas em 1 hora?
 (b) Qual a probabilidade que menos que 2 mensagens sejam recebidas em meia hora?

Solução:

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de mensagens por hora} \\
X &\sim \mathrm{P}(\lambda = 5) \\
P[X = x] &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda}\lambda^{x}}{x!}
\end{aligned}
$$

 (a) $P[X = 5] = \frac{\mathrm{e}^5 5^5}{5!} = 0,1755$
 (b) $P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - \frac{\mathrm{e}^5 5^0}{0!} - \frac{\mathrm{e}^1 5^1}{1!} = 0,9596$

Solução computacional com o programa **R**:

```
> qa <- dpois(5, lambda = 5)
> qb <- ppois(1, lambda=5, lower=FALSE)
```

---

154. A resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com média 6000 kg/cm^2 e um desvio padrão de 100 kg/cm^2.

 (a) qual a probabilidade da resistência ser inferior a 6250 em uma amostra escolhida ao acaso?
 (b) qual o valor de resistência excedido por 80% das amostras
 (c) qual a probabilidade de encontrar uma valor de resistência entre 5800 e 5900 em uma amostra escolhida ao acaso

Solução:

---

155. Uma amostra de água é considerada como contaminada se forem encontrados bacilos do tipo A ou então, se forem encontrados bacilos dos tipos B e C conjuntamente. De coletas anteriores sabe-se que bacilos dos tipos A, B e C estão presentes em 30, 20 e 80% das amostras, respectivamente. Sabe-se ainda que na presença de bacilos do tipo A, não existem bacilos do tipo B. Quando existem bacilos do tipo B, a chance de encontrar bacilos do tipo C cai pela metade. Encontre:

 (a) a probabilidade de uma amostra conter ao menos um dos bacilos dos tipos B ou C;
 (b) a probabilidade de uma amostra ser classificada como contaminada;
 (c) sendo uma amostra contaminada, a probabilidade da contaminação ser (i) pelo bacilo A, (ii) pelos bacilos B e C

Solução:

$$P(A) = 0,30 \quad ; \quad P(B) = 0,20 \quad ; \quad P(C) = 0,80$$

$P(\text{contaminada}) = P(AU(B \cap C))$

$$P(B|A) = 0 \quad P(C|B) = P(C)/2 = 0,40$$

(a) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(C|B) \cdot P(B) =$
$= 0,20 + 0,80 - 0,4 \cdot 0,20 = 0,92$

(b) $P(\text{contaminada}) = P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C)) - P(A \cap (B \cap C)) =$
$= 0,30 + 0,08 - 0,00 = 0,38$

(c) i. $P(A|contanimada) = P(A \cap \text{contaminada})/P(\text{contaminada}) =$
$= P(A \cap (A \cup (B \cap C)))/P(\text{contaminada}) = P(A)/P(\text{contaminada}) = 0,30/0,38 = 0,79$

ii. $P((B \cap C)|\text{contaminada}) = P((B \cap C) \cap \text{contaminada})/P(\text{contaminada}) =$
$= P((B \cap C) \cap (A \cup (B \cap C)))/P(\text{contaminada}) = P(B \cap C)/P(\text{contaminada}) = 0,08/0,38 = 0,21$

---

156. Suponha que um programa de acompanhamento de populações registre uma média de 15 mortes de golfinhos por ano na região da baia de Guaraqueçaba. Fazendo as suposições necessárias encontre:

(a) a probabilidade de que se registre ao menos duas mortes em um determinado mês;

(b) a probabilidade de que se registre menos de cinco mortes no primeiro semestre do próximo ano.

Solução:

$X \sim Poisson(\lambda = 15 \ \text{mortes/ano})$

(a)

$$X_a \sim P(\lambda = 15/12 = 1,25 \ \text{mortes/mes})$$
$$P(X_a \geq 2) = 1 - P(X_a = 0) - P(X_a = 1) = 0,355$$

(b)

$$X_b \sim P(\lambda = 15/2 = 7,5 \ \text{mortes/semestre})$$
$$P(X_b < 5) = P(X_b \leq 4) = 0,868$$

Solução computacional com o programa **R**:

```
> g1 <- ppois(1, lambda=15/12, lower=FALSE)
> g2 <- ppois(4, lambda=15/2, lower=FALSE)
```

---

157. Registros mostram que em uma determinada região ocorrem em média 2,5 geadas por ano. Encontre a probabilidades de que ocorram:

(a) no máximo 3 geadas no próximo ano;

(b) ao menos 3 geadas nos próximos 2 anos.

Solução:

$X_1 \sim Poisson(\lambda = 2.5 \text{ geadas/ano}) \quad X_2 \sim Poisson(\lambda = 5 \text{ geadas/(2anos)})$

(a) $P(X_1 \leq 3) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) = 0,758$

(b) $P(X_2 \geq 3) = 1 - (P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2)) = 0,875$

Solução computacional com o programa **R**:

```
> ga1 <- ppois(3, lambda=2.5)
> ga2 <- ppois(2, lambda=5, lower=FALSE)
```

---

158. Dados históricos mostram que, em média, 5 dos 30 dias do mês de novembro são chuvosos em uma certa cidade. Faça e descreva suposições adequadas para calcular as probabilidades de que:

(a) não chova em nenhum dia do próximo mês de novembro;

(b) ocorra chuva em mais dias do que a média histórica.

Solução:

$X \sim Bin(n = 30, p = 5/30)$

(a) $P[X = 0] = \binom{30}{0}(5/30)^0(25/30)^30 = 0,00421$

(b) $P[X > E(X)] = P[X > n \cdot p] = P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5] = 0,384$

---

159. Sob condições normais, um contador eletrônico de bactérias registra, em média, 4,5 bactérias por cm^3 em amostras de um líquido. Faça suposições necessárias para calcular:

(a) a probabilidade de encontrar mais que seis bactérias em uma amostra;

(b) o desvio padrão do número de bactérias;

(c) a probabilidade de encontrar entre quatro e seis bactérias;

(d) a probabilidade de encontrar, em uma amostra de $10cm^3$, mais que 58 bactérias;

Solução:

$$X \sim Poi(\lambda = 4,5\text{bactrias}/cm^3$$

(a) $P[X > 6] = 1 - P[X \leq 6] = 0,169$

(b) $sd(X) = \sqrt{\text{Var(X)}} = \sqrt{\lambda} = 2,121$

(c) $P[4 \leq X \leq 6] = P[X \leq 4] + P[X \leq 5] + P[X \leq 6] = 0,489$

(d)

$$X \sim Poi(\lambda = 45) \approx N(\mu = 45, \sigma^2 = 45) \tag{3}$$

$$P(X_{Poi} > 58) \approx P(X_N > 58.5) = 0,022 \tag{4}$$

---

160. Considera-se que em uma epidemia de gripe 60% das pessoas se infectam com o vírus. Uma vacina é eficiente para 80% dos indivíduos expostos a uma epidemia. Uma pessoa não vacinada tem 90% de chance de ter gripe. Duas pessoas, uma vacinada e outra não viajam separadamente para uma região epidêmica, sem ter contato com as mesmas pessoas ou se encontrarem. Qual a probabilidade de que ao menos uma delas tenha a gripe?

Solução:

$$\begin{aligned} P(I) &= 0,60 \;\; ; \;\; P(\bar{G}|V) = 0,8 \;\; ; \;\; P(G|\bar{V}) = 0.90 \\ P(\text{ao menos 1 com gripe}) &= P_1(I \cap G|V) + P_2(I \cap G|\bar{V}) - P_1(I \cap G|V) \cdot P_2(I \cap G|\bar{V}) = \\ &= 0,6 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,9 - (0,6 \cdot 0,2) \cdot (0,6 \cdot 0,9) = 0,5952 \end{aligned}$$

---

161. O taxa de mortes por afogamento em finais de semana numa cidade praiana é de 2,5 para cada 100.000 habitantes. Faça as suposições necessárias e encontre a probabilidade de que ocorram quatro ou mais afogamentos em um determinado final de semana para o qual estima-se uma população de 350.000 habitantes.

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{número de afogamentos para 350.000 habitantes} \\ X_B &= B(n = 350.000, p = 2,5/100.000) \\ X_P &\approx P(\lambda = n \cdot p = 8,75) \\ P[X \geq 4] &= 1 - P[X \leq 3] = 0,975 \end{aligned}$$

---

162. Suponha que em um determinado país estudos demográficos mostrem que em famílias constituídas o tempo (em anos) para concepção do primeiro filho, após o casamento, tem distribuição exponencial com parâmetro 0,35.

(a) Qual a probabilidade de uma família ter um filho(a) no primeiro ano de casamento?

(b) Qual a probabilidade de uma família ter um filho(a) apenas 5 anos após o casamento?

(c) Qual o tempo em anos até o qual espera-se que 80% das famílias tenham tido o primeiro filho(a)?

(d) Em quanto tempo espera-se que um novo casal tenha o seu primeiro filho(a)?

(e) Em quanto tempo espera-se que 50% das famílias tenham tido filho(a)?

Solução:

$$\begin{aligned} T &\sim Exp(\lambda = 0,35) \\ f(t) &= 0,35\mathrm{e}^{-0,35t}\mathrm{I}_{(0,\infty}(t) \end{aligned}$$

(a) $P[T < 1] = \int_0^1 f(t)dt = 0,295$

(b) $P[T > 5] = \int_5^\infty f(t)dt = 0,174$

(c) $\int_0^t f(t)dt = 0,8 \Longrightarrow t = 4,6$ anos

(d) $E[T] = 1/\lambda = 1/0,35 = 2,86$ anos

(e) mediana: $\int_0^t f(t)dt = 0,5 \Longrightarrow t = 1,98$ anos

---

163. Suponha que o comprimento de camarões da espécie *Litopenaeus schmitti* tem, em condições normais para comercialização, uma média de 6,0 *cm* e desvio padrão de 0,5 *cm*. Camarões abaixo de 5 *cm* são comercializados ao valor de 1 unidade monetária (u.m.). Entre 5 e 7,25 *cm* são comercializados ao valor de 1,5 u.m. e acima de 7,25 *cm* ao valor de 3 u.m.. Qual o valor que se espera obter na venda de 50,000 indivíduos?

Solução:

$$
\begin{aligned}
X &\sim N(\mu = 6; \sigma^2 = (0,5)^2) \\
Y &: \text{Valor de venda} \\
E(Y) &= 1 \cdot P[Y = 1] + 1,5 \cdot P[Y = 1,5] + 3 * P[Y = 3] = \\
&= 1 \cdot P[X \leq 5] + 1,5 \cdot P[5 < X \leq 7,5] + 3 \cdot P[X > 7,25] = \\
&= 1 \cdot 0,0228 + 1.5 \cdot 0,976 + 3 \cdot 0,00135 = \\
&= 1,49
\end{aligned}
$$

Para 50.000 ind. : 74532

---

164. Um servidor registra conexões segundo um processo de Poisson com média de 3,5 conexões por minuto.

(a) Qual a probabilidade não receber conexões em um período de 1 minuto?
(b) Qual a probabilidade receber alguma conexão em um período de 2 minutos?
(c) Qual o tempo esperado entre conexões?
(d) A partir de um certo instante, qual o tempo para que, com probabilidade de 0,9, ocorra uma conexão?
(e) Qual o tempo que deve-se esperar até a 10^a conexão?

Solução:

$X \sim Poisson(\lambda = 3,5 \ \text{ conexões/min})$

(a) $P[X = 0] = \frac{e^{-3,5}(3,5)^0}{0!} = e^{-3,5} = 0,0302$

(b)

$$
\begin{aligned}
X_b &\sim P(\lambda = 7 \ \text{ conexões/(2 min)}) \\
P[X_b \geq 1] &= 1 - P[X_b = 0] = 1 - e^{-7} = 0,999
\end{aligned}
$$

(c) Se o número de conexões tem distribuição de *Poisson*, o tempo entre conexões tem distribuição *exponencial* pois:

$$
\begin{aligned}
T &: \text{tempo entre conexões} \\
X_t &\sim P(\delta t \cdot \lambda) \\
P[T > t] = P[X_t = 0] = \mathrm{e}^{-\lambda} &\Longrightarrow P[T \leq t] = F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \Longrightarrow f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \\
E[T] &= 1/\lambda = 1/3,5 = 0,286 \ min = 17,1 \ seg
\end{aligned}
$$

(d) $P[T < t] = 0,9 \Longrightarrow \int_0^t f(t)dt = 0,9 \Longrightarrow t = 0,658 \ min = 39,5 \ seg$

(e)

$$
\begin{aligned}
T_{10} &: \text{tempo até a 10 conexão} \\
T_{10} &\sim \text{Erlang}(r = 10, \lambda = 3,5) \\
E[T_{10}] &= r/\lambda = 10/3,5 = 2,86 min = 171,43 seg
\end{aligned}
$$

---

165. Sob condições normais, um sistema de radares de controle de velocidade registra em certo horário, em média, 3,2 multas por minuto. Faça suposições necessárias para calcular:

(a) a probabilidade de registrar mais que 5 multas por minuto;
(b) a probabilidade de não registrar nenhuma multa em 1 minuto;
(c) a probabilidade de registrar mais que mais que 25 multas em dez minutos;
(d) a probabilidade de registrar entre 30 e 40 multas em 10 minutos;
(e) passar 1 minuto sem registrar nenhuma multa;
(f) esperar no máximo 5 minutos até registrar a terceira multa.

Solução:

$$X \sim Poi(\lambda = 3,2 \text{ chamadas/minuto})$$

(a) $P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5] = 0,105$

(b) $P[X = 0] = 0,041$

(c)

$$X \sim Poi(\lambda = 32) \approx N(\mu = 32, \sigma^2 = 32) \quad (5)$$
$$P(X_{Poi} > 25) \approx P(X_N > 25.5) = 0,875 \quad (6)$$

(d)

$$X_1 \sim Exp(\lambda = 3,2) \quad (7)$$
$$P(X_1 \geq 1) = 0,041 \quad (8)$$

(e)

$$X_2 \sim Erlang(\kappa = 3, \lambda = 3,2) \quad (9)$$
$$P(X_1 \leq 1) = 0 \quad (10)$$

---

166. Um problema é proposto para dois alunos que tentam resolvê-lo independentemente. Um deles tem uma chance de 60% de conseguir resolver enquanto que o outro tem uma change de 35%. Qual a chance do problema ser resolvido?

Solução:
Eventos:
A - o primeiro aluno resolve o problema
B - o segundo aluno resolve o problema

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \overset{ind}{=} P[A] + P[B] + P[A].P[B] = 0,6 + 0,35 - (0,6)(0,35) = 0,74$$

---

167. Um escritório possui duas impressoras sendo que uma delas está disponível para uso em 60% do tempo e a outra em 85% do tempo e funcionam independentemente uma da outra. Se em um momento voce tenta fazer a impressão um arquivo, qual a probabilidade de conseguir a impressão naquele instante?

Solução:
Eventos:
A - a primeira impressora está disponível
B - a segunda impressora está disponível

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \overset{ind}{=} P[A] + P[B] + P[A].P[B] = 0,6 + 0,85 - (0,6)(0,85) = 0,94$$

---

168. Suponha que 10% dos clientes que compram a crédito em uma loja deixam de pagar suas prestações. Se em um particular dia a loja vende a crédito para 10 pessoas, qual a probabilidade de 20% delas deixem de pagar suas prestações?

Solução:

$$X : \text{Número de clientes que deixam de pagar}$$
$$X \sim \text{Bin}(n = 10, p = 0,10)$$
$$P[X = 2] = \binom{10}{2}(0,10)^2(1 - 0,10)^8 = 0,19$$

---

169. Em um sistema de transmissão de dados, existe uma probabilidade igual a 0,05 de um lote de dados ser transmitido erroneamente. Foram transmitidos 20 lotes de dados para realização de um teste de confiabilidade do sistema.

(a) Qual o modelo de probabilidade adequado para o problema? Justifique.

(b) Qual a probabilidade de haver erro na transmissão?

(c) Qual a probabilidade de que haja erro em exatamente 2 dos 20 lotes de dados?

(d) Qual o número esperado de erros em transmissões de 20 dados?

Solução:

(a) Binomial: 20 ensaios de Bernoulli, assumidos como independentes, com probabilidade de "sucesso"(transmissão com erro) constante

$$X : \text{Número de lotes transmitidos com erro}$$
$$X \sim \text{Bin}(n = 20, p = 0,05)$$

(b) $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - 0,358 = 0,642$

(c) $P[X = 2] = \binom{20}{2}0,05^2(1 - 0,05)^{20-2} = 0,189$

(d) $\text{E}[X] = n.p = 20(0,05) = 1$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> (1a <- pbinom(0, size=20, prob=0.05, lower=FALSE))

[1] 0,6415

> (1b <- dbinom(2, size=20, prob=0.05))

[1] 0,1887
```

---

170. Duas pessoas contratam um seguro de vida e deseja-se verificar as probabilidades de sobrevivência por um período de 25 anos. De acordo com tábuas de vida e características dos indivíduos, a chance de um deles estar vivo daqui 25 anos é de 70% enquanto que para o outro esta chance é de 50%. Determinar as probabilidades de que daqui a 25 anos:

- ambos estejam vivos;
- nenhum deles esteja vivo;
- apenas um deles esteja vivo.

Solução:
Eventos:
A - a primeira pessoa está viva após 25 anos. $P[A] = 0.70$
B - a segunda pessoa está viva após 25 anos. $P[B] = 0.50$

- $P[A \cap B] \stackrel{ind}{=} P[A].P[B] = (0,70)(0,50) = 0,35$
- $P[\bar{A} \cap \bar{B}] \stackrel{ind}{=} P[\bar{A}].P[\bar{B}] = (0,30)(0,50) = 0,15$
  ou $P[\bar{A} \cap \bar{B}] = 1 - P[A \cup B]$
- $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] \stackrel{Ind/M.Exc.}{=} P[A].P[\bar{B}] + P[\bar{A}].P[B] = (0,7)(0,5) + (0,3)(0,5) = 0,5$
  ou $1 - P[A \cap B] - P[\bar{A} \cap \bar{B}]$

---

171. Em um processo de seleção, após diversas fases 12 engenheiras e 8 engenheiros foram classificados. Como só haviam três vagas foi feito um sorteio entre os classificados.

- defina uma variável aleatória adequada e obtenha sua distribuição de probabilidades;
- qual a a probabilidade do grupo selecionado ter todos os indivíduos do mesmo sexo?
- sabendo que todos os selecionados são do mesmo sexo, qual a probabilidade de serem todas mulheres?

Solução:

- X : Número de mulheres selecionadas $\quad X \sim \text{HG}(N = 20, K = 12, n = 3)$
- $P[X = 0] + P[X = 3] = 0,24$
- $P[X = 3|(X = 0 \cup X = 3)] = P[X = 3]/(P[X = 0] + P[X = 3]) = 0,8$

---

172. Em uma classe de Português para estrangeiros, 6 tem nacionalidade peruana, 5 são argentinos e 4 chilenos. Para dois alunos escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de não terem a mesma nacionalidade?

Solução:
P: peruano ; A: argentino ; C: chileno

$$\begin{aligned}
\text{Prob} &= P(P,A) + P(P,C) + P(A,C) + P(A,P) + P(C,P) + P(C,A) \\
&= \frac{6}{15}.\frac{5}{14} + \frac{6}{15}.\frac{4}{14} + \frac{5}{15}.\frac{4}{14} + \frac{5}{15}.\frac{6}{14} + \frac{4}{15}.\frac{6}{14} + \frac{4}{15}.\frac{5}{14} \\
&= 0,7
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\text{Prob} &= 1 - P(P,P) - P(A,A) - P(C,C) \\
&= 1 - \frac{6}{15}.\frac{5}{14} - \frac{5}{15}.\frac{4}{14} - \frac{4}{15}.\frac{3}{14} \\
&= 0,7
\end{aligned}$$

---

173. Um grupo de 4 homens e 4 mulheres é dividido por sorteio em dois grupos de 4 pessoas. Determina a probabilidade de cada grupo ficar com o mesmo número de mulheres.

Solução:

$$P[2,2] = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = 0,51$$

---

174. Seja uma função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} \ , & 0 \leq x < 3 \ ; \\ \frac{1}{9}(6-x) \ , & 3 \leq x < 6 \ ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida;

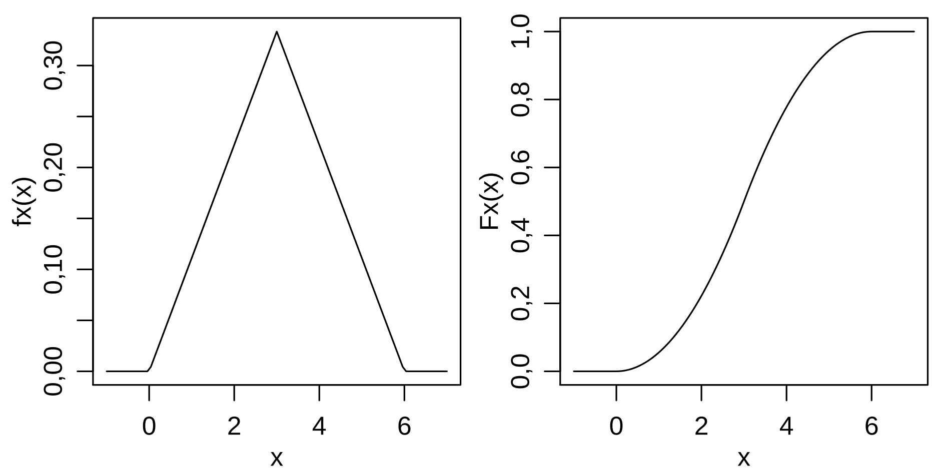
(b) calcule $P[X > 2]$

(c) calcule $P[X > 4,5]$

(d) calcule $P[X < 2|X > 1]$

Solução:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{x^2}{18} \ , & 0 \leq x < 3 \ ; \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(x-3) - \frac{1}{18}(x^2-9) \ , & 3 \leq x < 6 \ ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



(a) $f(x) \geq 0 \forall x e \int_0^6 f(x)dx = \frac{6\cdot(1/3)}{2} = 1$

(b) $P[X > 2] = \int_2^6 f(x)dx = 1 - \int_0^2 f(x)dx = 1 - F(2) = 1 - \frac{2.(2/9)}{2} = 0,78$

(c) $P[X > 4,5] = \int_{4,5}^6 f(x)dx = \frac{1,5.((6-4,5)/9)}{2} = 1 - F(4,5) = 0,12$

(d) $P[X < 2|X > 1] = \frac{P[1<X<2]}{P[X>1]} = \frac{\int_1^2 f(x)dx}{\int_1^6 f(x)dx} = \frac{0,17}{0,94} = \frac{F(2)-F(1)}{1-F(1)} = 0,18$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> fx <- function(x){
+   y <- numeric(length(x))
+   y <- ifelse(x>=0 & x<3, x/9, y)
+   y <- ifelse(x>=3 & x<=6, (6-x)/9, y)
+   y
+   }
> Fx <- function(x){
+   y <- ifelse(x < 0, 0, 1)
+   y <- ifelse(x>=0 & x<3, (x^2)/18, y)
```

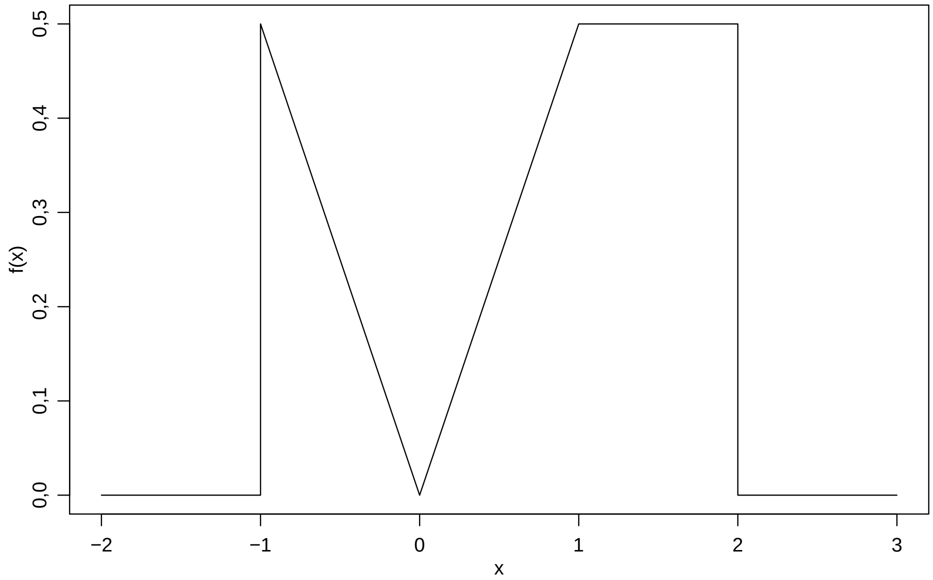
```
+   y <- ifelse(x>=3 & x<6, 0.5 + (2/3)*(x-3) - (1/18)*(x^2 - 9), y)
+   y
+   }
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(3,3,.2,.2), mgp=c(1.8, 0.8, 0))
> x <- seq(-1, 7, length=201)
> curve(fx, from=-1, to=7, type="l")
> curve(Fx, from=-1, to=7, type="l")
> (ita <- integrate(fx,0,6)[[1]])

[1] 1

> (ita <- Fx(6))

[1] 1

> (itb <- 1-integrate(fx,0,2)[[1]])

[1] 0,7778

> (itb <- 1-Fx(2))

[1] 0,7778

> (itc <- integrate(fx,4.5,6)[[1]])

[1] 0,125

> (itc <- Fx(6) - Fx(4.5))

[1] 0,125

> (itd <- integrate(fx,1,2)[[1]]/integrate(fx,1,6)[[1]])

[1] 0,1765

> (itd <- (Fx(2) - Fx(1))/(1-Fx(1)))

[1] 0,1765
```

---

175. Seja uma função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x/2 \ , & -1 \leq x \leq 0 \ ; \\ x/2 \ , & 0 < x \leq 1 \ ; \\ 1/2 \ , & 1 < x \leq 2 \ ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida;
- calcule $P[X < 0,5]$
- calcule $P[X > -0,5]$
- calcule $P[X < 1,5 | X > 0]$



Solução:

- $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 0,25 + 0,25 + 0,5 = 1$
- $P[X < 0,5] = \int_{-1}^{0,5} f(x)dx = 0,25 + (0,5).(0,5/2)/2 = 0,3125$
- $P[X > -0,5] = \int_{-0,5}^{2} f(x)dx = (-0,5).(-0,5/2)/2 + (1).(0,5)/2 + 0,5 = 0,8125$
- $P[X < 1,5|X > 0] = P[0 < X < 1,5]/P[X > 0] = \int_{0}^{1,5} f(x)dx / \int_{0}^{2} f(x)dx = 0,5/0,75 = 0,67$

---

176. Em um laticínio, a temperatura ideal do pasteurizador deve ser de 75°C. Se a temperatura ficar inferior a 70°C, o leite poderá ficar com bactérias indesejáveis ao organismo humano. Observações do processo mostram que na forma de operação atual os valores da temperatura seguem uma distribuição normal com média de $74,2$°C e desvio padrão de $2,2$°C.

    (a) qual a probabilidade da temperatura ficar inferior a 70°C?
    (b) qual a probabilidade da temperatura ultrapassar os 75°C desejados?
    (c) qual a probabilidade de que em 20 pasteurização, alguma(s) dela(s) não atinja a temperatura de 70°C?
    (d) deseja-se regular equipamentos para alterar a temperatura média do processo para que a probabilidade de ficar inferior a 70°C seja de no máximo 0,0005. Qual deveria ser a nova média de operação?
    (e) suponha agora que a nova média de operação seja de $74,5$°C. Deseja-se então alterar o desvio padrão para satisfazer as condições do ítem anterior. Qual deve ser o novo desvio padrão de operação?

Solução:

$$X : \text{temperatura do pasteurizador}$$
$$X \sim N(74,2; 2.2^2)$$

(a) $P[X < 70] = P[Z < (70 - 74,2)/2.2] = 0,0281$

(b) $P[X > 75] = P[Z < (75 - 74,2)/2.2] = 0,3581$

(c)

$$Y : \text{número de pasteurizações que não atingem } 70^\circ$$
$$Y \sim Bin(20, p)$$
$$p = P[X < 70] = 0,0281$$
$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 0,435$$

(d)

$$\begin{aligned} P[X < 70|\mu_0] &= 0,0005 \\ z_{0,0005} &= (x - \mu_0)/\sigma \\ -3,291 &= (70 - \mu_0)/2,2 \\ \mu_0 &= 70 - 2,2(-3,291) = 77,26 \end{aligned}$$

(e) suponha agora que a nova média de operação seja de $74,5°$C. Deseja-se então alterar o desvio padrão para satisfazer as condições do ítem anterior. Qual deve ser o novo desvio padrão de operação?

$$\begin{aligned} P[X < 70|\sigma_0] &= 0,0005 \\ z_{0,0005} &= (x - 74,2)/\sigma_0 \\ -3,291 &= (70 - 74,2)/\sigma_0 \\ \sigma_0 &= (70 - 74,2)/(-3,291) = 1,28 \end{aligned}$$

---

177. Uma empresa fabrica dois monitores de vídeo, $M1$ e $M2$. Supõe-se que as durabilidades possuem distribuição normal, sendo a média de 6 anos e o desvio padrão de 2,3 anos para o monitor $M1$ e média de 8 anos com desvio padrão de 2,8 anos para $M2$. $M1$ tem 2 anos de garantia e $M2$ tem 3 anos. A empresa lucra R\$100,00 a cada $M1$ vendido e R\$200,00 a cada $M2$ vendido, mas, se deixarem de funcionar no período da garantia, perde R\$300,00 para $M1$ e R\$800,00 para $M2$. Em média, qual modelo de monitor gera mais lucro para a empresa?

Solução:

$$\begin{aligned} &F_1 : \text{tempo de vida para modelo } M1 \quad F_2 : \text{tempo de vida para modelo } M2 \\ &M_1 \sim N(6,2,3^2) \quad M_2 \sim N(8,2,8^2) \\ &F_1 : \text{falha durante garantia de } M_1 \quad F_2 : \text{falha durante garantia de } M_2 \\ &F_1 \sim Ber(p_1 = P[M_1 < 2] = 0,041) \quad F_2 \sim Ber(p_2 = P[M_2 < 3] = 0,037) \\ &L_1 : \text{lucro com } M_1 \quad L_2 : \text{lucro com } M_2 \end{aligned}$$

l_1	-300	100
$P[L_1 - l_1]$	p_1	$1 - p_1$

l_2	-800	200
$P[L_2 - l_2]$	p_2	$1 - p_2$

$$\begin{aligned} E(L_1) &= (1 - p_1)(100) + p_1(-300) = 83,6 \\ E(L_2) &= (1 - p_2)(200) + p_2(-800) = 162,9 \end{aligned}$$

---

178. A vida útil de um certo componente eletrônico é, em média, 10.000 horas e apresenta distribuição exponencial.

(a) Qual a probabilidade de algum componente falhar antes de 10.000 horas?

(b) Após quantas horas se espera que 25% dos componentes tenham falhado?

Solução:

$$\begin{aligned} &X : \text{vida útil (hrs)} \\ &X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/10000) \\ f(x) &= \lambda \exp\{-\lambda x\} \end{aligned}$$

(a) $P[X < 10.000] = \int_0^{10000} f(x)dx = 0,632$

(b) $P[X < t] = 0,25 \longrightarrow \int_0^t f(x)dx = 0,25 \longrightarrow t = 2877$

---

179. Sabe-se que o soro da verdade, quando ministrado a um suspeito, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando é inocente. Em outras palavras, 10% dos culpados são julgados inocentes, e 1% dos inocentes é julgado culpado. Se o suspeito foi retirado de um grupo em que 95% jamais cometeram qualquer crime, e o soro indica culpado, qual a probabilidade de o suspeito ser inocente?

Solução:

$$\begin{aligned}
C &: \text{comete crime}; P[C] = 0,05; P[\bar{C}] = 0.95;\\
JC &: \text{julgado culpado}; P[JC|C] = 0,90 \longrightarrow P[\bar{JC}|C] = 0,10\\
\bar{JC} &: \text{julgado inocente}; P[\bar{JC}|\bar{C}] = 0,99 \longrightarrow P[JC|\bar{C}] = 0,01\\
P[\bar{C}|JC] &= \frac{P[JC \cap \bar{C}]}{P[JC]} = \frac{P[JC \cap \bar{C}]}{P[JC \cap C] + P[JC \cap \bar{C}]} = \frac{P[JC|\bar{C}] \cdot P[\bar{C}]}{P[JC|C] \cdot P[C] + P[JC|\bar{C}] \cdot P[\bar{C}]}\\
&= \frac{(0,01)(0,95)}{(0,90)(0,05) + (0,01)(0,95)} = 0,174
\end{aligned}$$

---

180. Um meteorologista acerta 80% dos dias em que chove e 90% dos dias em que faz bom tempo. Chove em 10% dos dias. Tendo havido previsão de chuva, qual a probabilidade de chover?

Solução:

$$\begin{aligned}
C &: \text{chove em um dia}; P[C] = 0,10; P[\overline{C}] = 0.90\\
P_C &: \text{previsão de chuva}; P[P_C|C] = 0,80 \longrightarrow P[\overline{P_C}|C] = 0,20\\
\overline{P_C} &: \text{sem previsão de chuva}; P[\overline{P_C}|\overline{C}] = 0,90 \longrightarrow P[P_C|\overline{C}] = 0,10\\
P[C|P_C] &= \frac{P[P_C \cap C]}{P[P_C]} = \frac{P[P_C \cap C]}{P[P_C \cap C] + P[P_C \cap \overline{C}]} = \frac{P[P_C|C] \cdot P[C]}{P[P_C|C] \cdot P[C] + P[P_C|\overline{C}] \cdot P[\overline{C}]}\\
&= \frac{(0,8)(0,10)}{(0,8)(0,10) + (0,10)(0,90)} = 0,471
\end{aligned}$$

Solução alternativa, organizando dados na forma de uma tabela:

	Ocorrência		
Previsão	Chove (C)	Não chove ($\overline{C}$)	Probabilidade
com chuva (P_c)	$P[P_c \cap C] = 0,80 \cdot 0,10$	$P[P_c \cap \overline{C}] = 0,09$	0,17
sem chuva ($\overline{P_C}$)	$P[\overline{P_c} \cap C] = 0,02$	$P[\overline{P_c} \cap \overline{C}] = 0,90 \cdot 0,90$	0,83
Probabilidade	0,10	0,90	1

---

181. A probabilidade de que João resolva esse problema é 1/3, e a de que José resolva é 1/4. Se ambos tentarem resolver independentemente, qual a probabilidade de que o problema seja resolvido?

Solução:

$$\begin{aligned} A &: \text{João resolve} \quad P(A) = 1/3 \\ B &: \text{José resolve} \quad P(B) = 1/4 \end{aligned}$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \stackrel{ind}{=} P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{12} = 0,5$$

---

182. Um vendedor de automóveis sabe que o número de carros vendidos por dia em sua loja comporta-se como uma v.a. de Poisson cuja média é 2 nos dias de tempo bom, e é 1 nos dias chuvosos. Se em 70% dos dias faz tempo bom, qual é a probabilidade de que em certo dia do ano sejam vendidos pelo menos 3 automóveis?

Solução:

$$\begin{aligned} Y &: \text{número de vendidos} \;\; ; \;\; P[Y = y] = e^{-\lambda}\lambda^x/x! \\ C &: \text{chuva} \;\; ; \;\; P[\bar{C}] = 0,70; P[C] = 0,30 \\ Y|\bar{C} &\sim P(\lambda = 2) \;\; ; \;\; Y|C \sim P(\lambda = 1) \end{aligned}$$

$$P[Y \geq 3] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] - P[Y = 2] = P[Y \geq 3|\bar{C}] \cdot P[\bar{C}] + P[Y \geq 3|C] \cdot P[C] = (1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} + \frac{e^{-1}1^1}{1!} + \frac{e^{-1}}{2}$$

---

183. O tempo de reação de um motorista a um estímulo visual tem distribuição normal com média de 0,4 segundos e desvio padrão de 0,05 segundos?

(a) Qual a probabilidade que submetido a um estímulo o tempo de reação seja superior a 0,5 segundos?

(b) Qual a probabilidade que a reação esteja entre 0,4 e 0,5 segundos?

(c) Qual o tempo de reação que é excedido em 90% das vezes?

(d) Entre quais valores ao redor do tempo médio espera-se encontrar o tempo de reação em 50% dos casos?

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{tempo de reação} \\ X &\sim \mathrm{N}(0,4; 0.05^2) \end{aligned}$$

(a) $P[X > 0,5] = P[Z > \frac{0,5-0,4}{0.05}] = 0,0228$

(b) $P[0,4 < X < 0,5] = P[\frac{0,4-0,4}{0.05} < Z < \frac{0,5-0,4}{0.05}] = P[0 < Z < 2] = 0,4772$

(c)

$$\begin{aligned} P[X > c] &= 0.90 \\ P[Z > \frac{c - 0,4}{0,05}] &= 0.90 \\ z = -1,282 &= \frac{c - 0,4}{0,05} \\ c &= 0,34 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P[d_1 < X < d_2] = P[|X - \mu| < d] &= 0.50 \\ d = 0,674 \cdot 0,05 &= 0,034 \\ d_1 = 0,4 - d &= 0,366 \\ d_2 = 0,4 + d &= 0,434 \\ (0,366, 0,434)& \end{aligned}$$

184. Um escritório possui duas impressoras sendo que uma delas está disponível para uso em 60% do tempo e a outra em 85% do tempo e funcionam independentemente uma da outra. Se em um momento voce tenta fazer a impressão um arquivo, qual a probabilidade de conseguir a impressão naquele instante?

Solução:
Eventos:
A - a primeira impressora está disponível
B - a segunda impressora está disponível

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \overset{ind}{=} P[A] + P[B] + P[A].P[B] = 0,6 + 0,85 - (0,6)(0,85) = 0,94$$

---

185. Em um sistema de transmissão de dados, existe uma probabilidade igual a 0,05 de um lote de dados ser transmitido erroneamente. Foram transmitidos 20 lotes de dados para realização de um teste de confiabilidade do sistema.

- qual o modelo de probabilidade adequado para o problema? Justifique.
- qual a probabilidade de haver erro na transmissão?
- qual a probabilidade de que haja erro em exatamente 2 dos 20 lotes de dados?
- qual o número esperado de erros em transmissões de 20 dados?

Solução:

$$X : \text{Número de lotes transmitidos com erro}$$
$$X \sim Bin(n = 20, p = 0,05)$$

- Binomial: 20 ensaios de Bernoulli, assumidos como independentes, com probabilidade de "sucesso"(transmissão com erro) constante
- $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - 0,358 = 0,642$
- $P[X = 2] = 0,189$
- $\text{E}[X] = n.p = 20(0,05) = 1$

---

186. A vida útil de certo componente eletrônico é, em média, 10.000 horas e apresenta distribuição exponencial.

- Qual é a porcentagem esperada de componentes que apresentarão falhas em menos de 10.000 horas?
- Após quantas horas se espera que 25% dos componentes tenham falhado?

Solução:

$$X : \text{vida útil (hrs)}$$
$$E[X] = 10.000$$
$$X \sim Exp(\lambda = 1/10.000)$$
$$f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\}$$

- $100 \times P[X < 10.000] = 100 * 0,632 = 63,2\ \%$
- $\int_0^T f(x)dx = 0.25 \longrightarrow T = 2877$ hrs

---

187. O tempo para que um sistema computacional execute determinada tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal, com média 320 segundos e desvio padrão de 7 segundos.

- Qual a probabilidade da terefa ser executada entre 310 e 330 segundos?
- Se a tarefa é colocada para execução 200 vezes, qual a probabilidade de ela demorar mais que 325 segundos em pelo menos 50 vezes?

Solução:

$$X : \text{tempo de execução (seg)}$$
$$X \sim \mathrm{N}(\mu = 320, \sigma^2 = 7^2)$$

- $P[310 < X < 330] = P[\frac{310-320}{7} < Z < \frac{330-320}{7}] = 0,85$
- $$P[X > 325] = P[Z > \frac{325-320}{7}] = 0,238$$
$$Y : \text{número de vezes que demora mais que 325 seg}$$
$$Y \sim \mathrm{Bin}(n = 200, p = P[X > 325] = 0,238) \approx \mathrm{N}(\mu = n.p = 47,5, \sigma^2 = n.p.(1-p) = 11,3)$$
$$P[Y_B \geq 50] = P[Y_N \geq 49,5] = 0,37$$

---

188. Uma rede local de computadores é composta por um servidor e cinco clientes (A, B, C, D e E). Registros anteriores indicam que dos pedidos de determinado tipo de processamento, realizados através de uma consulta, cerca de 10% vem do cliente A, 15% do B, 15% do C, 40% do D e 20% do E. Se o pedido não for feito de forma adequada, o processamento apresentará erro. Usualmente, ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente A, 2% do B, 0,5 % do C, 2% do D e 8% do cliente E.

- Qual a probabilidade de o sistema apresentar erro?
- Qual é a probabilidade do processo ter sido solicitado pelo cliente E, sabendo que apresentou erro?

Solução:

$$\begin{array}{l}
\text{I : pedido inadequado} \\
A : \text{requisição do cliente A} \;;\; P[A] = 0.10 \;;\; P[I|A] = 0.01 \\
B : \text{requisição do cliente B} \;;\; P[B] = 0.15 \;;\; P[I|B] = 0.02 \\
C : \text{requisição do cliente C} \;;\; P[C] = 0.15 \;;\; P[I|C] = 0.005 \\
D : \text{requisição do cliente D} \;;\; P[D] = 0.40 \;;\; P[I|D] = 0.02 \\
E : \text{requisição do cliente E} \;;\; P[E] = 0.20 \;;\; P[I|E] = 0.08
\end{array}$$

- $$\begin{aligned} P[\text{Erro}] &= P[I] = P[A \cap I] + P[B \cap I] + P[C \cap I] + P[D \cap I] + P[E \cap I] \\ &= P[A].P[I|A] + P[B].P[I|B] + P[C].P[I|C] + P[D].P[I|D] + P[E].P[I|E] = 0,02875 \end{aligned}$$
- $P[E|I] = \frac{P[E \cap I]}{P[I]} = \frac{P[E].P[I|E]}{P[I]} = \frac{0,016}{0,02875} = 0,56$

---

189. A duração do ”tonner”da uma impressora pode ser modelada pela distribuição normal com média 10.000 cópias e desvio padrão de 1.200 cópias. A duração do ”tonner”será anotada e pergunta-se a probabilidade de ser:

(a) inferior a 9.000 cópias;
(b) inferior a 11.000 cópias;
(c) superior a 10.500 cópias;
(d) entre 9.200 e 10.000 cópias;
(e) entre 8.200 e 11.800 cópias.
(f) Qual a probabilidade de não de ser desviar da média mais que dois desvios padrões?
(g) Qual o número de cópias que espera-se que ao menos 80% dos tonners consiga imprimir?
(h) Se for definido como um limite máximo o número de cópias que apenas 2% dos tonners consegue atingir. qual será este limite máximo de cópias?
(i) Mantendo-se o desvio padrão de 1.200, qual deveria ser a média do número de impressões para que 90% dos tonners conseguisse imprimir ao menos 9.000 cópias.
(j) E se a média não puder ser alterada de 10.000, qual deveria ser o desvio padrão para garantir a condição acima?

Solução:

$$X : \text{duração do tonner (em número de cópias)}$$
$$X \sim N(\mu = 10.000, \sigma^2 = 1.200^2)$$

(a) $P[X < 9.000] = P[Z < \frac{9.000-10.000}{1.200}] = P[Z < -0,8333] = 0,2023$
(b) $P[X < 11.000] = P[Z < \frac{11.000-10.000}{1.200}] = P[Z < 0,8333] = 0,7977$
(c) $P[X > 10.500] = P[Z > \frac{10.500-10.000}{1200}] = P[Z > 0,4167] = 0,3385$
(d) $P[9.200 < X < 10.000] = P[\frac{9.200-10.000}{1.200} < Z < \frac{10.000-10.000}{1.200}] = P[-0,6667 < Z < 0] = 0,2475$
(e) $P[8.200 < X < 11.800] = P[\frac{8.200-11.800}{1.200} < Z < \frac{11.800-10.000}{1.200}] = P[-1,5 < Z < 1,5] = 0,8664$
(f) $P[-2\sigma < X < 2\sigma] = P[-2 < Z < 2] = 0,9545$
(g) $P[X > x_g] = 0,80 \rightarrow P[Z > -0,8416] = 0,80 \rightarrow -0,8416 = \frac{x_g - 10.000}{1.200} \rightarrow x_g = 8990$
(h) $P[X > x_h] = 0,02 \rightarrow P[Z > 2,054] = 0,02 \rightarrow 2,054 = \frac{x_h - 10.000}{1.200} \rightarrow x_h = 12464$
(i) $P[X > 9.000] = 0,90 \rightarrow P[Z > -1,282] = 0,90 \rightarrow -1,282 = \frac{9.000-\mu}{1.200} \rightarrow \mu = 10538$
(j) $P[X > 9.000] = 0,90 \rightarrow P[Z > -1,282] = 0,90 \rightarrow -1,282 = \frac{9.000-10.000}{\sigma} \rightarrow \sigma = 780,3$

Solução computacional com o sistema **R**:

```
> (qa <- pnorm(9000, m=10000, sd=1200))

[1] 0,2023

> (qb <- pnorm(11000, m=10000, sd=1200))

[1] 0,7977

> (qc <- pnorm(10500, m=10000, sd=1200, low=F))

[1] 0,3385

> (qd <- diff(pnorm(c(9200, 10000), m=10000, sd=1200)))

[1] 0,2475
```

```
> (qe <- diff(pnorm(c(8200, 11800), m=10000, sd=1200)))

[1] 0,8664

> (qf <- diff(pnorm(c(-2, 2))))

[1] 0,9545

> (qg <- qnorm(0.20, m=10000, sd=1200))

[1] 8990

> (qh <- qnorm(0.98, m=10000, sd=1200))

[1] 12464

> (qi <- 9000 - qnorm(0.1)*1200)

[1] 10538

> (qj <- (9000 - 10000)/qnorm(0.1))

[1] 780,3
```

---

190. O tempo de processamento de certo tipo de requisição tem distribuição normal com média de 10 segundos e variância de 4 segundos. Sob as suposições convenientes, qual a probabilidade de que uma sequência de 9 requisições tenha duração superior a 91 segundos?

Solução:

---

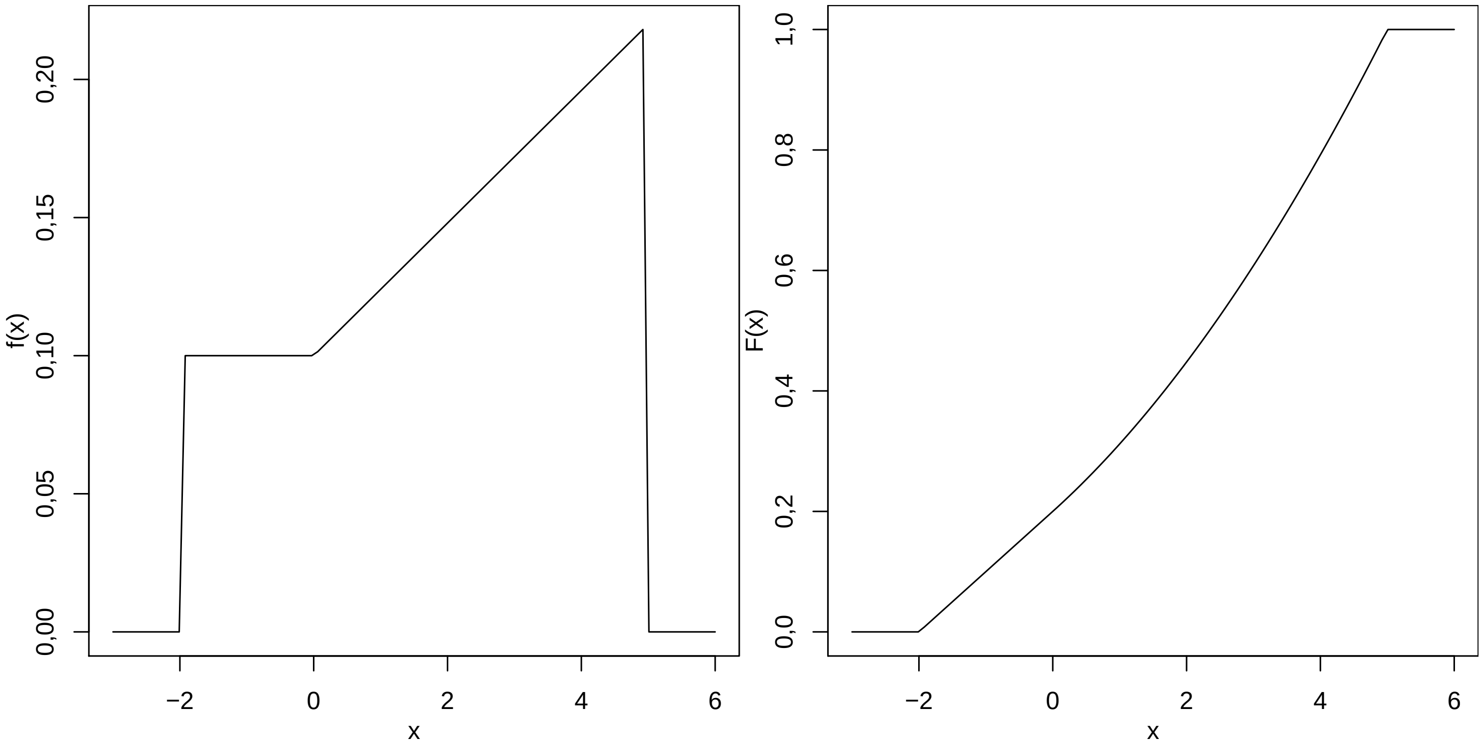
191. Seja uma função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} \;, & -2 \leq x < 0 \;; \\ \frac{1}{10} + \frac{3x}{125} \;, & 0 \leq x < 5 \;; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida;
- calcule $P[X > 1]$
- calcule $P[-0,5 < X < 4,5]$
- calcule $P[X < 3|X > -1]$

Solução:

- $\int_{-2}^{5} f(x)dx = 2\frac{1}{10} + \frac{5}{2}(\frac{1}{10} + \frac{3.5}{125}) = 1$
- $P[X > 1] = \int_{1}^{5} f(x)dx = 0,69$
- $P[-0,5 < X < 4,5] = \int_{-0,5}^{4,5} f(x)dx = 0,74$
- $P[X < 3|X > -1] = \frac{P[-1<X<3]}{P[X>-1]} = \frac{\int_{-1}^{3} f(x)dx}{\int_{-1}^{5} f(x)dx} = \frac{0,51}{0,9} = 0,56$



Soluções alternativas usando $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)}{10} \ , & -2 \leq x < 0 \ ; \\ \frac{2}{10} + \frac{x}{10} + \frac{3x^2}{250} \ \ , & 0 \leq x < 5 \ ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $\int_{-2}^{5} f(x)dx = F(5) = 1$
- $P[X > 1] = \int_{1}^{5} f(x)dx = 1 - F(1) = 0,69$
- $P[-0,5 < X < 4,5] = \int_{-0,5}^{4,5} f(x)dx = F(4,5|) - F(-0,5) = 0,74$
- $P[X < 3|X > -1] = \frac{\int_{-1}^{3} f(x)dx}{\int_{-1}^{5} f(x)dx} == \frac{P[-1<X<3]}{P[X>-1]} = \frac{F(3)}{1-F(-1)} = 0,68$

Soluções computacionais (com o programa **R**):
Usando $f(x)$:

```
> fx <- function(x){
+   y <- numeric(length(x))
+   y <- ifelse(x>=-2 & x<0, 1/10, y)
+   y <- ifelse(x>=0 & x<=5, (1/10) + (3*x/125), y)
+   y
+ }
> curve(fx, -3, 6, ylab="f(x)")
> (ia <- integrate(fx, -2, 5)[[1]])

[1] 1

> (ib <- integrate(fx,1,5)[[1]])

[1] 0,688

> (ic <- integrate(fx,-0.5, 4.5)[[1]])

[1] 0,743
```

```
> (id <- integrate(fx,-1,3)[[1]]/integrate(fx,-1,5)[[1]])
```

```
[1] 0,5644
```

Usando $F(x)$:

```
> Fx <- function(x){
+   y <- numeric(length(x))
+   y <- ifelse(x>=-2 & x<0, (x+2)/10, y)
+   y <- ifelse(x>=0 & x<=5, 0.2 + (x/10) + (3*x^2/250), y)
+   y <- ifelse(x>5, 1, y)
+   y
+ }
> Fx(5)
```

```
[1] 1
```

```
> curve(Fx, -3, 6, ylab="F(x)")
> (iaa <- Fx(5))
```

```
[1] 1
```

```
> (iba <- 1 - Fx(1))
```

```
[1] 0,688
```

```
> (ica <- Fx(4.5) - Fx(-0.5))
```

```
[1] 0,743
```

```
> (ida <- Fx(3)/(1-Fx(-1)))
```

```
[1] 0,6756
```

---

192. Supondo que a expectativa de vida, em anos, tenham distribuição exponencial com média de 60 anos:

(a) Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de viver pelo menos até os 70 anos.

(b) Idem para morrer antes dos 70, sabendo que o indivíduo acabou de completar 50 anos.

(c) Calcule o valor de m tal que $P(X > m) = 1/2$.

Solução:

$$X : \text{expectativa de vida (em anos)}$$
$$X \sim \text{Exp}(1/60)$$
$$f(x) = \frac{1}{60}\exp\{-x/60\}\text{I}_{0,\infty}(x) F(x) \qquad = \int_0^x f(x)\text{d}x = 1 - \exp\{-x/60\}$$

(a) $P[X \geq 70] = \int_{70}^{\infty} f(x)dx = 1 - F(70) = 0,311$

(b) $P[X \leq 70|X > 50] = \frac{P[50<X\leq 70]}{P[X>50]} = \frac{\int_{50}^{70} f(x)dx}{\int_{50}^{\infty} f(x)dx} = \frac{F(70)-F(50)}{1-F(50)} = 0,283$

ou, usando a propriedade de falta de memória:
$P[X \leq 70|X > 50] = P[0 < X < 20] = 0,283$

(c) $\int_m^{\infty} f(x)dx = 0,5 \longrightarrow m = 41,6$

Soluções computacionais (com o programa **R**):

```
> (va <- pexp(70, rate=1/60, low=FALSE))

[1] 0,3114

> (vb <- diff(pexp(c(50,70), rate=1/60))/pexp(50, rate=1/60, low=F))

[1] 0,2835

> (vc <- qexp(0.5, rate=1/60))

[1] 41,59
```

---

193. Suponha que o volume, em litros, de uma garrafa de refrigerante tenha distribuição normal com parâmetros $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 9\text{x}10^{-4}$. Se três garrafas forem sorteadas ao acaso, pergunta-se a probabilidade de:

(a) Todas terem pelo menos 980 ml?
(b) Não mais que uma ficar com volume inferior a 980 ml?

Solução:

X : volume (em litros)
$X \sim \mathrm{N}(\mu = 1, \sigma^2 = 9\text{x}10^{-4})$
Y : número de garrafas com volume inferior a 980 ml (0,98 l)
$Y \sim \mathrm{Bin}(n = 3, p)$

$p = P[X < 0,980] = P[Z < \frac{0{,}980-1}{0{,}03}] = P[Z < -0,67] = 0,2525$

(a) $P[Y = 0] = (1-p)^3 = 0,418$
(b) $P[Y \leq 1] = P[Y = 0] + P[Y = 1] = (1-p)^3 + 3 \cdot p \cdot (1-p)^2 = 0,841$

Soluções computacionais (com o programa **R**):

```
> (p <- pnorm(0.98, m=1, sd=0.03))

[1] 0,2525

> (vol.a <- (1-p)^3)

[1] 0,4177

> (vol.b <- pbinom(1, size=3, prob=p))

[1] 0,8409
```

---

194. (Andrade e Ogliari, 2007) Um estudo de uma tribo no Brasil revelou que 75% dos seus integrantes tinham sangue tipo A, e o restante tinha sangue tipo O; 60% de toda a população tinha fator RH^-, enquanto que 30% tinha sangue tipo A com RH^+. Usando estas informações encontre a probabilidade que um membro da tribo tenha:

(a) sangue tipo A ou RH^+
(b) sangue tipo A e RH^-
(c) RH^+ mas não sangue do tipo A
(d) sangue tipo O e RH^-

Solução:

$$P[A] = 0,75 \;\; ; \;\; P[O] = 0,25 \;\; ; \;\; P[-] = 0,60 \;\; ; \;\; P[A \cap +] = 0,30$$

(a) $P[A \cup +] = 0,85$

(b) $P[A \cap -] = 0,45$

(c) $P[+ \cap \bar{A}] = 0,10$

(d) $P[O \cap -] = 0,15$

	A	O	Total
RH^+	0,30	0,10	0,40
RH^-	0,45	0,15	0,60
Total	0,75	0,25	1

---

195. O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma v.a., de média 0,10 cm e desvio padrão 0,02 cm. Se o diâmetro de um anel diferir da média em mais que 0,03 cm ele é vendido por R$5,00; caso contrário, é vendido por R$10,00. Qual o preço esperado de venda de um lote de 500 anéis?

Solução:

$$\begin{aligned}
&X : \text{diâmetro do anel}\\
&X \sim N(\mu = 0,10; \sigma^2 = 0,02^2)\\
&Y : \text{preço da peça}\\
&y_1 = 5 \text{ com probabilidade } (1-p) \text{ e } y_2 = 10 \text{ com probabilidade } p\\
&Y \sim B(p = P[|X - \mu| < 0,03])\\
&p = P[|X-\mu| < 0,03] = P[0,07 < X < 0,13] = P[\frac{0,07-0,10}{0,02} < Z < \frac{0,13-0,10}{0,02}] = 0,8664\\
\text{Preço esperado } &= 500 \cdot E[Y] = 500 \sum Y_i \cdot P[Y = y_i] = 500 \cdot [5 \cdot (1-p) + 10 \cdot p] = 4665,96
\end{aligned}$$

---

196. Um dado é viciado de forma que um número par é duas vezes mais provável que um número impar. Encontre a probabilidade de que em um lançamento:

(a) um número par ocorra;

(b) um número primo ocorra;

(c) número primo par ocorra.

Solução:

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/9	2/9	1/9	2/9	1/9	2/9

(a) $P(X = 2 \cup X = 4 \cup X = 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = 6/9 = 0,667$

(b) $P(X = 2 \cup X = 3 \cup X = 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 5) = 4/9 = 0,444$

(c) $P(X = 2) = 2/9 = 0,222$

---

197. Considere um experimento que consiste em contar o número de partículas alfa emitidas por segundo, por um grama de material radioativo. Sabe-se por experiências passadas que, em média, 2,3 de tais partículas são emitidas por segundo. Faça as suposições razoáveis e necessárias e determine a probabilidade de que não mais que 3 partículas alfa seja emitidas em um intervalo de **2 segundos**.

Solução:

X : número de partículas em dois segundos
$X \sim Poi(\lambda = 4,6)$

$$P[X \leq 3] = P[X=0]+P[X=1]+P[X=2]+P[X=3] = \frac{e^{-4,6}4,6^0}{0!}+\frac{e^{-4,6}4,6^1}{1!}+\frac{e^{-4,6}4,6^2}{2!}+\frac{e^{-4,6}4,6^3}{3!} = 0,3257$$

Solução computacional (com o programa **R**):

```
> ppois(3, lam=4.6)

[1] 0,3257
```

---

198. A probabilidade de que um aluno saiba a resposta de uma questão de um exame de múltipla escolha é p. Há m respostas possíveis para cada questão, das quais apenas uma é correta. Se o aluno não sabe a resposta para uma dada questão, ele escolhe ao acaso uma das m respostas possíveis.

(a) qual a probabilidade de o aluno responder corretamente uma questão?

(b) se o aluno respondeu corretamente a questão, qual a probabilidade de que tenha *chutado* a resposta?

Solução:
S : sabe; $\bar{S}$: não sabe; A : acerta; $\bar{A}$: não acerta

(a) $P[A] = P[A \cap S] + P[A \cap \bar{S}] = P[S] \cdot P[A|S] + P[\bar{S}] \cdot P[A|\bar{S}] = p(1) + (1-p)(1/m) = \frac{p(m-1)+1}{m}$

(b) $P[\bar{S}|A] = \frac{P[\bar{S} \cap A]}{P[A]} = \frac{P[\bar{S}] \cdot P[A|\bar{S}]}{P[A]} = \frac{(1-p)/m}{(p(m-1)+1)/m} = \frac{1-p}{p(m-1)+1}$

---

199. Suponha que um componente eletrônico tenha um tempo de vida (em unidades de 1000 horas) que é considerado uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade $f(x) = e^{-x}\mathrm{I}_{(0,+\infty)}(x)$. Suponha também que o custo de fabricação de um item seja de R$ 2,00 e o preço de venda seja de R$5,00. O fabricante garante a devolução total do dinheiro se $x \leq 0,9$. Qual o lucro esperado do fabricante em 10.000 itens a serem produzidos?

Solução:

X : tempo de vida
$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1)$
Y : lucro por item

y	-2,00	3,00
$P[Y=y]$	$P[X < 0,9] = 0,59343$	$P[X \geq 0,9] = 0,40657$

$10,000 \cdot \mathrm{E}[X] = 10000(-2(0,59343) + 3(0,40657)) = 328,48$

---

200. Uma construtora emprega 3 engenheiros de avaliação e venda. Cada um deles estima 30, 20 e 50% das avaliações de custos de construção da companhia. A probabilidade de cada um deles cometer um erro sério de avaliação são de 0,01; 0,03 e 0,02; respectivamente. Se um custo foi estimado com erro sério, qual dentre os engenheiros é o mais provável de ter feito a avaliação Responda calculando e comparando as chances do erro ter sido de cada um deles.

Solução:

$$
\begin{aligned}
I &: \text{engenheiro 1 avalia;} \quad II : \text{engenheiro 2 avalia;} \quad III : \text{engenheiro 3 avalia}\\
E &: \text{erro é cometido}\\
P[I] &= 0,30; \quad P[II] = 0,20; \quad P[III] = 0,50\\
P[E|I] &= 0,01; \quad P[E|II] = 0,03; \quad P[E|III] = 0,02\\
P[E] &= P[E \cap I] + P[E \cap II] + P[E \cap III] =\\
&= P[E|I] \cdot P[I] + P[E|II] \cdot P[II] + P[E|III] \cdot P[III] =\\
&= (0,01)(0,30) + (0,03)(0,20) + (0,02)(0,5) = 0,019\\
P[I|E] &= \frac{P[E|I] \cdot P[I]}{P[E]} = 0,1579\\
P[II|E] &= \frac{P[E|II] \cdot P[II]}{P[E]} = 0,3158\\
P[III|E] &= \frac{P[E|III] \cdot P[II]}{P[E]} = 0,5263
\end{aligned}
$$

---

201. O retrospecto mostra que um jogador de basquete tem uma probabilidade de 0,75 de acertar um *lance livre*. Se este jogado vai arremessar cinco *lances livres* qual a probabilidade de acertar:

(a) todos

(b) nenhum

(c) pelo menos 3

Solução:

$$
\begin{aligned}
&X : \text{número acertos}\\
&X \sim Bin(n = 5, p = 0,75)
\end{aligned}
$$

(a) $P[X = 5] = (0,75)^5 = 0,2373$

(b) $P[X = 0] = (0,25)^5 = 0,001$

(c) $P[X \geq 3] = P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = 0,8965$

Solução computacional (com o programa `R`):

```
> (ita <- dbinom(5, size=5, prob=0.75))

[1] 0,2373

> (itb <- dbinom(0, size=5, prob=0.75))

[1] 0,0009766

> (itc <- pbinom(2, size=5, prob=0.75, lower=FALSE))

[1] 0,8965
```

---

202. Os escores obtidos em um exame de proficiência se distribuem segundo a distribuição normal com média 400 e desvio padrão 45.

(a) Qual a porcentagem de pessoas com escores acima de 350?

(b) Qual a porcentagem de pessoas com escores entre 450 e 500?

(c) Qual a porcentagem de pessoas com escores que não se afastem da média mais do que 30?

(d) Qual valor deve ter 80% dos escores abaixo dele?

(e) Mantendo-se a mesma média, quanto deveria ser o desvio padrão ter 10% dos escores acima de 500?

$$X : \text{escores no exame e proficiência}$$
$$X \sim N(400, 45^2)$$

(a) $P[X > 350] = P[Z > \frac{350-400}{45}] = P[Z > -1,111] = 0,8667 \longrightarrow 86,67\%$

(b) $P[450 < X < 500] = P[\frac{450-400}{45} < Z < \frac{500-400}{45}] = P[1,11 < Z < 2,22] = 0,1201 \longrightarrow 12,01\%$

(c) $P[|X - 400| < 30] = P[370 < X < 430] = P[\frac{370-400}{45} < Z < \frac{430-400}{45}] = P[-0,667 < Z < 0,667] == 0,495 \longrightarrow 49,5\%$

(d) $P[X < a] = 0,8 \longrightarrow z = 0,842 = \frac{a-400}{45} \longrightarrow a = 437,9$

(e) $P[X > 500|\mu = 400, \sigma] = 0,1 \longrightarrow z = 1,28 = \frac{500-400}{\sigma} \longrightarrow \sigma = 78$

Solução computacional com o programa R:

```
> (ita <- round(pnorm(350, 400, 45, low=F),dig=4))

[1] 0,8667

> (itb <- round(diff(pnorm(c(450, 500), 400, 45)),dig=4))

[1] 0,1201

> (itc <- round(diff(pnorm(c(370, 430), 400, 45)),dig=4))

[1] 0,495

> (itd <- round(qnorm(0.8, 400, 45), dig=1))

[1] 437,9

> (ite <- round((500-400)/qnorm(0.90), dig=1))

[1] 78
```

---

203. Uma empresa de televisores garante a restituição da quantia paga para aparelhos que apresentar algum defeito grave no prazo de seis meses. A empresa produz aparelhos do tipo A (comum), e do tipo B (luxo), com lucro de R$ 1.000,00 e R$2.000,00 respectivamente, se não houver devolução, e com prejuízo de R$3.000,00 e R$8.000,00 respectivamente, se houver devolução. Suponha que o tempo para ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos uma variável aleatória com distribuição normal, respectivamente com médias de 9 e 12 meses e variâncias 4 e 9 meses.

(a) Qual a probabilidade de haver devolução para cada um dos modelos?

(b) Se tivesse que planejar uma estratégia de marketing para a empresa, voce incentivaria a venda do tipo A ou do tipo B. Justifique apresentando cálculos adequados.

(c) De quanto deveria ser o tempo médio para apresentar defeito grave do modelo B para que a probabilidade de devolução fosse a mesma do tipo A? (suponha variâncias e média do tipo A inalteradas.)

(d) Com as médias e variância do modelo A originais, quanto deveria ser o desvio padrão dos aparelhos do tipo B para que os modelos tivessem o mesmo lucro esperado?

Solução:

$$X_A: \text{tempo para o modelo A apresentar defeito grave} \quad ; \quad X_A \sim N(9,4)$$
$$X_B: \text{tempo para o modelo B apresentar defeito grave} \quad ; \quad X_B \sim N(12,9)$$

(a)

$$P[X_A < 6] = P[Z < \frac{6-9}{2}] = P[Z < -1,5] = 0,0668$$
$$P[X_B < 6] = P[Z < \frac{6-12}{3}] = P[Z < -2] = 0,0228$$

(b)

$$L_1: \text{lucro com } M_1 \quad L_2: \text{lucro com } M_2$$

l_1	-3000	1000
$P[L_1 = l_1]$	$p_1 = P(X_A < 6) = 0,0668$	$1 - p_1 = 0,9332$
l_2	-8000	2000
$P[L_2 = l_2]$	$p_2 = P(X_B < 6) = 0,0228$	$1 - p_2 = 0,9772$

$$E(L_1) = (1-p_1)(1000) + p_1(-3000) = 732,8$$
$$E(L_2) = (1-p_2)(2000) + p_2(-8000) = 1772,5$$

(c) $z = -1,5 = \frac{6-\mu_B}{3} \longrightarrow \mu_B = 10,5$

(d)

$$E(L_2) = E(L_1) = 732,8$$
$$(1-p_2)(2000) + p_2(-8000) = 732,8$$
$$p_2 = P[X_B < 6] = (1-p_2)(2000) + p_2(-8000) = (2000 - 732,8)/10000$$
$$z = -1,14 = \frac{6-12}{\sigma_B}$$
$$\sigma_B = 5,3$$

---

204. Uma editora envia livros de divulgação com caixas com três unidades. O peso dos livros tem distribuição normal de média 400 gramas e desvio padrão de 60 gramas e a caixa pesa 200 gramas. Se os livros são escolhidos ao acaso calcule:

(a) a probabilidade de que uma caixa a ser enviada pese mais que 1,5 quilos;

(b) o custo esperado para envio de 1.000 caixas sabendo-se que paga-se R$5,00 para caixas acima de 1,5 quilos, R$3,00 para caixas entre 1,25 e 1,5 quilos, e R$ 2,00 para caixa abaixo de 1,25 quilos.

Solução:

$$X_A: \text{peso do livro} \quad ; \quad X_A \sim N(400, 60^2)$$
$$X_B: \text{peso da embalagem} \quad ; \quad X_B = 200$$
$$X_C: \text{peso da caixa com 3 livros} \quad ; \quad X_B \sim N(\mu_c = E(X_C), \sigma_c^2 = V(X_c))$$
$$E(X_c) = E(3X_A + 200) = 3E(X_A) + 200 = 1400 \quad ; \quad V(X_c) = 3^2 V(X_a) = 3^2 60^2$$

(a) $P[X_c > 1500] = P[Z > \frac{1500-1400}{180}] = P[Z > 0,56] = 0,2893$

(b)

C : custo por caixa

c	2,00	3,00	5,00
$P[C = c]$	p_1	p_2	p_3

$$p_1 = P[C < 1250] = P[Z < \frac{1250 - 1400}{180}] = P[Z < -0,83] = 0,2023$$
$$p_2 = P[1250 < C < 1500] = P[\frac{1250 - 1400}{180} < Z < \frac{1500 - 1400}{180}] = P[-0,83 < Z < 0,56] = 0,5084$$
$$p_3 = P[X_c > 1500] = 0,2893$$
$$1000E[C] = 2,00p_1 + 3,00p_2 + 5,00p3 = 3376,19$$

---

205. Para se ajustar uma máquina, a correia deve ter entre 60 e 62 cm de comprimento. Tendo em vista o processo de fabricação, o comprimento destas correia pode ser considerado como uma variável aleatória com distribuição normal, de média 60,7 e desvio padrão 0,8 cm. Pergunta-se:

(a) Qual a probabilidade de uma correia, escolhida ao acaso, poder ser usada na máquina?
(b) Qual o percentual de correias que não irão se ajustar por serem muito curtas?
(c) Pretende-se aumentar a proporção de correias que se ajustam. Qual das alternativas mais efetiva: (i) aumentar o comprimento médio de 60,7 para 61 cm ou, (ii) reduzir o desvio padrão de 0,8 para 0,6 cm?

Solução:

$$X : \text{comprimento da correia}$$
$$X \sim \text{N}(60,7; 0.8^2)$$

(a) $P[\text{correia poder ser usada}] = P[60 < X < 62] = P[\frac{60-60,7}{0.8} < Z < \frac{62-60.7}{0.8}] = 0,757$
(b) $P[X < 60] = P[Z < \frac{60-60,7}{0,8}] = P[Z < -0,875] = 0,191$
(c) Em (i) a proporção de correais que se ajustam seria de 78,9% enquanto que em (ii) seria de 86,3%.

Solução computacional com o programa R:

```
> (cor.a <- diff(pnorm(c(60,62), m=60.7, sd=0.8)))

[1] 0,7571

> (cor.b <- pnorm(60, m=60.7, sd=0.8))

[1] 0,1908

> (cor.c1 <- diff(pnorm(c(60,62), m=61, sd=0.8)))

[1] 0,7887

> (cor.c2 <- diff(pnorm(c(60,62), m=60.7, sd=0.6)))

[1] 0,8632
```

---

206. Uma pessoa está discando um número de telefone (oito dígitos) e conhece todos os dígitos, mas esqueceu-se da ordem dos últimos três (que são diferentes entre si). Ela disca variando aleatoriamente esses três últimos dígitos, até encontrar o número completo. Admitindo que ela não repita os números discados, qual a probabilidade de ser necessário discar cinco números errados antes de acertar?

Solução:
O número de posibilidades com três dígitos diferentes é de $P_3 = 3! = 6$.

$$X : \text{número de tentativas até acertar}$$
$$P[X = 5] = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

---

207. Ainda no contexto do problema anterior suponha que a pessoa não registra os números discados, isto é, ela pode, por acaso, repetir os números discados. A probabilidade se alteraria? Qual a distribuição de probabilidade do número de tentativas até conseguir a fazer a ligação com o número correto? Qual a probabilidade de precisar de no máximo três tentativas?

Solução:
Neste caso a probabilidade de acertar (ou não) permanece constante em cada tentativa, e então temos:

$$X \sim \mathrm{G(p = 1/6)}$$
$$P[X = 5] = (\frac{5}{6})^4 \cdot \frac{1}{6} = 0,08$$
$$P[X \leq 3] = P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] = (\frac{5}{6})^0 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^1 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} = 0,421$$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> dgeom(4, prob=1/6)

[1] 0,08038

> pgeom(2, prob=1/6)

[1] 0,4213
```

---

208. Seja uma v.a. X com função de distribuição de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x/A, & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ (6-x)/A, & \text{se } 3 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) encontre o valor de A
(b) encontre $P[X < 2]$ e $P[X < 1 \text{ ou } X > 4,5]$
(c) encontre a média e a mediana de X

Solução:

(a) $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = 1 \longrightarrow A = 9$ (pode também ser encontrado pela área do triângulo)
(b) (considerar a solução geométrica equivalente por área de triângulos)

$$P[X < 2] = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0,222$$
$$P[X < 1 \text{ ou } X > 4,5] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_{4,5}^6 f(x)\mathrm{d}x = 0,181$$

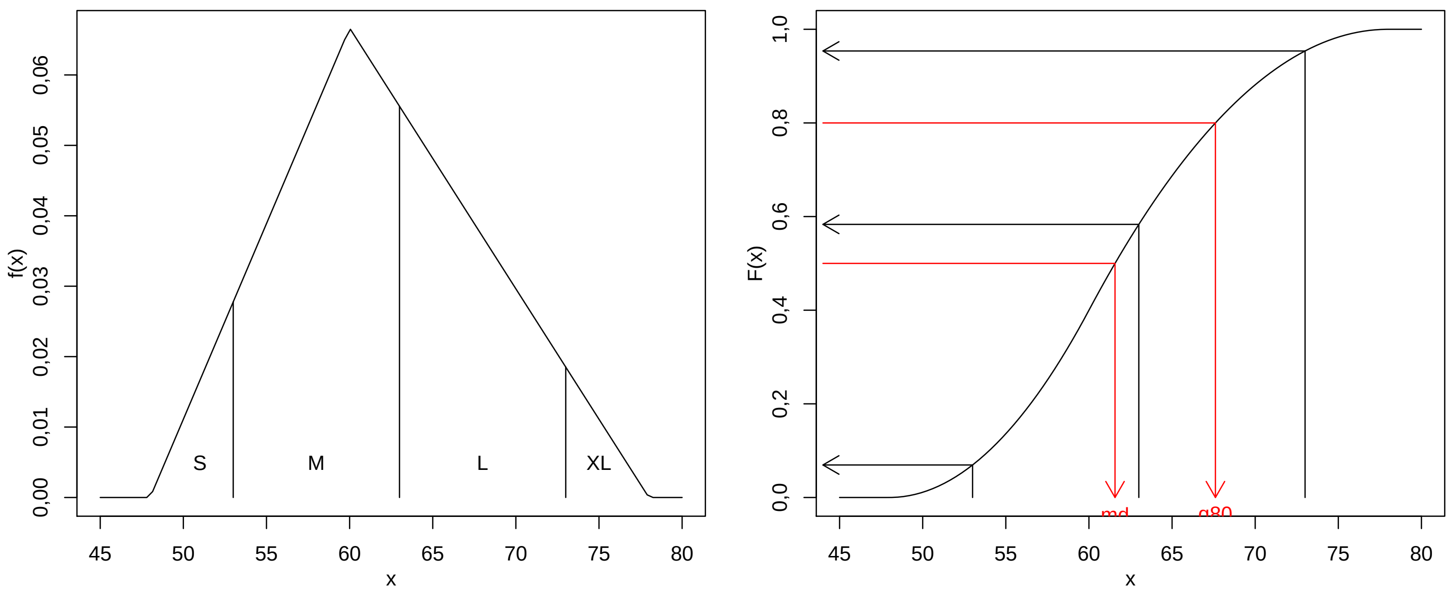


Figura 6: Funções de distribuição de probabilidades ($f(x)$) e acumulada ($F(x)$).

(c) (notar que a distribuição é simétrica, a solução é portanto trivial)

$$E[X] = \int_0^6 x \cdot f(x) \mathrm{d}x = 3$$
$$\mathrm{md}[X] : \int_0^{\mathrm{md}} f(x) \mathrm{d}x = 0,5 \longrightarrow \mathrm{md}[X] = 3$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> ## definindo f(x)
> ddist <- function(x){
+     y <- numeric(length(x))
+     y[x >= 0 & x < 3] <- x[x >= 0 & x < 3]/9
+     y[x >= 3 & x < 6] <- (6-x[x >= 3 & x < 6])/9
+     return(y)
+ }
> ## definindo F(x)
> pdist <- function(x){
+     y <- numeric(length(x))
+     ind <- x >= 0 & x < 3
+     y[ind] <- x[ind]^2/18
+     ind <- x >= 3 & x < 6
+     y[ind] <- 0.5 + (6*(x[ind]-3) - (x[ind]^2-3^2)/2)/9
+     y[x >= 6] <- 1
+     return(y)
+ }
> ## definindo F^{-1}(x) (forma numérica - geral)
> qdist <- function(prob){
+     uniroot(function(x) pdist(x) - prob, interval=c(0,6))$root
+ }
> ## definindo F^{-1}(x) (forma analítica - específica para este caso)
> qdist <- function(prob){
+     ifelse(prob <= 0.5, sqrt(18*prob), (12-sqrt(144-72*(prob+1)))/2)
+ }
```

```
> ## Soluções
> p1 <- pdist(2)
> p2 <- pdist(1) + (1-pdist(4.5))
> Exf <- function(x) x*ddist(x)
> Ex <- integrate(Exf, 0, 6)$value
> md <- qdist(0.5)
> ## Gráficos
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(3.5,3.5,1,1), mgp=c(2,1,0))
> curve(ddist, from=-0.5, to=6.5, ylab="f(x)")
> curve(pdist, from=-0.5, to=6.5, ylab="F(x)")
```

---

209. Um dispositivo eletrônico é formado por três partes. Cada parte tem probabilidade de 0,9 de funcionar bem e 0,1 de falhar. O funcionamento de cada parte não depende das demais. O dispositivo falha se duas ou mais falham. Calcule a probabilidade de falha do dispositivo.

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{número de componentes que falham} \\ X &\sim Bin(n=3, p=0.1) \\ P[X \geq 2] &= P[X=2] + P[X=3] = 0,028 \end{aligned}$$

---

210. Seja uma variável aleatória X com f.d.p. $f(x) = |1-x|\mathrm{I}_{(0,2)}(x)$. Obtenha:

(a) A função de distribuição (acumulada) de X

(b) $P(X > 1/2)$

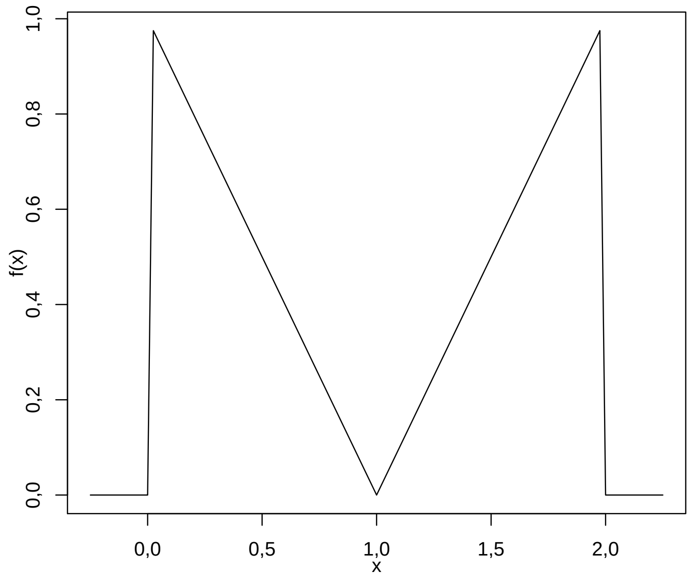
(c) $P(X < 1/4)$

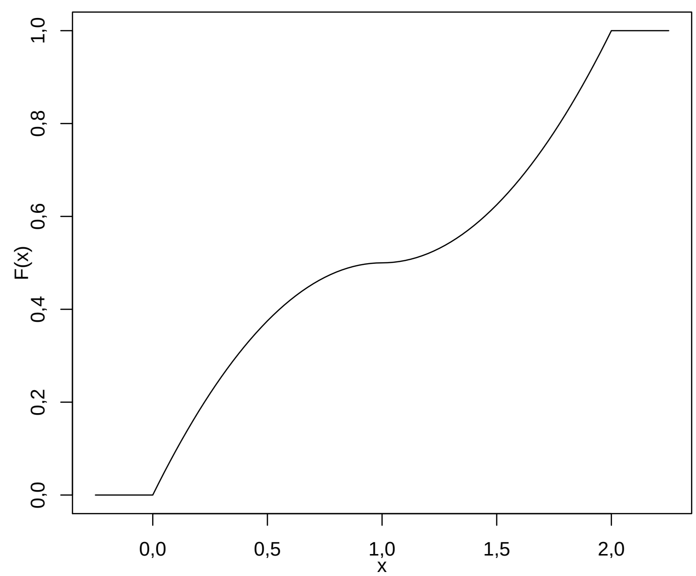
(d) $P(X < 2/3 | X > 1/2)$

Solução:

(a) $F(x) \int_0^x f(x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right] I_{[0,1)}(x) + \left[1 - (x - \frac{x^2}{2})\right] I_{[1,2)}(x)$

```
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(3,3,0.5, 0.5), mgp=c(1.7,1,0))
> fx <- function(x) ifelse((x>0)&(x<2), abs(1-x), 0)
> curve(fx, -0.25, 2.25, xlab="x", ylab="f(x)")
> Fx <- function(x){
+       res <- ifelse(x<0, 0, 1)
+       res <- ifelse((x>=0)&(x<1), x-x^2/2, res)
+       res <- ifelse((x>=1)&(x<2), 1 -(x-x^2/2), res)
+       return(res)
+  }
> curve(Fx, -0.25, 2.25, xlab="x", ylab="F(x)")
> integrate(fx, 0, 2)$value

[1] 1
```





(b) $P(X > 1/2) = \int_{1/2}^{2} f(x)dx = 1 - F(1/2) = 0,625$

(c) $P(X < 1/4) \int_{0}^{1/4} f(x)dx = F(1/4) = 0,2188$

(d) $P(X < 2/3|X > 1/2) = \frac{P[1/2<X<2/3]}{P[X>1/2]} = \frac{\int_{1/2}^{2/3} f(x)dx}{\int_{1/2}^{2} f(x)dx} = \frac{F(2/3)-F(1/2)}{1-F(1/2)} = 0,1111$

---

211. Alguns historiadores atribuem como marco do inícios do estudo de probabilidades a sequencia de correspondências trocadas entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat em 1654. Os dois resolveram um problema que ficou conhecido como o Dilema de Chevalier, em referência a um aristocrata e também compulsivo jogador e apostador chamado Chevalier de Mere.

Chevalier estava interessado no número de lançamentos de dois dados que deveriam que ser realizados para se obter um par de seis. Neste problema indique como seriam feitos os cálculos necessários(não é preciso fazer as contas, apenas indicá-las) para se obter:

(a) a probabilidade de se obter o par de 6 com no máximo 10 lançamentos
(b) a probabilidade de não se obter o par de seis em 30 lançamentos
(c) O número esperado de lançamentos para se obter o par de seis
(d) O número de lançamentos para que a probabilidade de se obter ou não um par de seis fosse aproximadamente iguais

Solução:

$$X : \text{número de fracassos até obter um par de seis}$$
$$X \sim G(p = 1/36)$$

(a) $P[X \leq 9] = \sum_{k=0}^{9}(1 - 1/36)^k \cdot (1/36) = 0,24551$
(b) $P[X > 30] = 1 - P[X \leq 30] = 1 - \sum_{k=0}^{30}(1 - 1/36)^k \cdot (1/36) = 0,41757$
(c) $\mathrm{E}[X] + 1 = \frac{(1-p)}{p} + 1 = \frac{(1-1/36)}{1/36} + 1 = 35 + 1 = 36$
(d) $P[X \leq K] \approx 0,5 \longrightarrow K = 24$ (25 tentativas)

Soluçãos computacionais com o programa R:

```
> pgeom(9, p=1/36)

[1] 0,2455
```

```
> pgeom(30, p=1/36, low=F)

[1] 0,4176

> (1-1/36)/(1/36) + 1

[1] 36

> x <- 0:50
> x[which.min(abs(pgeom(x, p=1/36) - 0.5))]

[1] 24
```

---

212. Em um estudo com usuários de internet nos EUA, pesquisadores descobriram que 80% dos usuários possuem ao menos um computador e que 25% dos usuários se conectavam a internet mais que 30 horas por semana. (Internet research, 11, 2001). Suponha que 15% dos usuários possuem ao menos um computador e se conectam a internet por mais que 30 horas por semana.

    (a) qual a probabilidade de que um usuário se conecte por mais que 30 horas por semana, sabendo que possui ao menos um computador?

    (b) Se um usuário se conecta a internet por mais que 30 horas por semana, qual a probabilidade de que possua ao menos um computador?

Solução:

$$C : \text{possui ao menos um computador} \; ; \quad N : \text{seL conecta mais que 30 hrs}$$
$$P[C] = 0,80 \; ; \quad P[N] = 0,25 \; ; \quad P[C \cap N] = 0,15$$

(a) $P[N|C] = \frac{P[N \cap C]}{P[C]} = \frac{0,15}{0,80} = 0,1875$

(b) $P[C|N] = \frac{P[N \cap C]}{P[N]} = \frac{0,15}{0,25} = 0,6$

---

213. A rede local de área (LAN - *local area network*) está sem conexão em um certo momento. Interrupções anteriores no serviço possuem como causas falhas de *hardware*, *software* e problemas de energia. Engenheiros de manutenção verificaram que as probabilidade de falhas por estas causas são de 0,01; 0,05 e 0,02, respectivamente. Também verificou-se que se o sistema apresenta problemas de *hardware*, ele interrompe serviços em 73% das vezes. Da mesma forma o serviço é interrompido em 12% das vezes que ocorre falha de *software* e 88% das vezes que ocorre falha de energia. Qual a probabilidade de que a falha que está ocorrendo seja devida a cada uma das três causas?

Solução:

$$\begin{aligned}
C_1 &: \text{falha por hardware} \; ; \;\; C_2 : \text{falha por software} \; ; \;\; C_3 : \text{falha por energia} \\
I &: \text{sistema interrompe} \\
P[C_1] &= 0,01 \; ; \;\; P[C_2] = 0,05 \; ; \;\; P[C_3] = 0,02 \\
P[I|C_1] &= 0,73 \; ; \;\; P[I|C_2] = 0,12 \; ; \;\; P[I|C_3] = 0,88 \\
P[I] &= P[C_1 \cap I] + P[C_2 \cap I] + P[C_3 \cap I] = \\
&= P[C_1] \cdot P[I|C_1] + P[C_2] \cdot P[I|C_2] + P[C_3] \cdot P[I|C_3] = 0,0324 \\
P[C_1|I] &= \frac{P[C_1] \cdot P[I|C1]}{P[I]} = \frac{0,01 \cdot 0,73}{0,0324} = 0,2253 \\
P[C_2|I] &= \frac{P[C_2] \cdot P[I|C2]}{P[I]} = \frac{0,05 \cdot 0,12}{0,0324} = 0,1852 \\
P[C_3|I] &= \frac{P[C_3] \cdot P[I|C3]}{P[I]} = \frac{0,02 \cdot 0,88}{0,0324} = 0,5432
\end{aligned}$$

---

214. Um homem possui em seu chaveiro 10 chaves das quais somente uma abre a porta que deseja abrir experimentando as chaves ao acaso. Determine o número esperado de tentativas se:

(a) as chaves incorretas são descartadas após cada tentativa e não mais selecionadas;

(b) as chaves incorretas não são descartadas, podendo ser escolhidas novamente.

Solução:

(a)

X : número de tentativas

x	1	2	3	...	10
P[X = x]	(1/10)	(9/10)(1/9) = 1/10	(9/10)(8/9)(1/8) = 1/10	...	1/10

$$X \sim U_d(1/10) \quad P[X = x] = (1/10)$$

$$\text{E}[X] = \frac{max(x) - min(x)}{2} = 5,5$$

(b)

$$\begin{aligned}
&X : \text{tentativas falhas até conseguir abrir} \\
&X \sim Geo(p = 0.1) \\
\text{E}[X] &= \frac{(1-p)}{p} = \frac{(1-1/10)}{1/10} = 9 \text{ falhas e portanto, 10 tentativas}
\end{aligned}$$

---

215. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (5-3x)/2 & \text{se} \quad 1 < x \leq 5/3 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 5/3 \end{cases}$$

(a) verifique que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade (f.d.p.) válida

(b) encontre a função de densidade acumulada $F(x)$

(c) obtenha as seguintes probabilidades:

- $P[X < 0.5]$
- $P[X > 1]$
- $P[0,7 < X < 1,5]$

- $P[X > 0,5|X < 1]$
- $P[X > 1,5|X > 1]$

(d) obtenha o valor médio

(e) obtenha o 1^0 quartil ($q_{0,25}$), a mediana (md) e 3^0 quartil ($q_{0,75}$)

(f) Suponha agora que X representa teores de um determinado elemento em amostras de água que determinam o tratamento químico a ser adotado em um volume de água. Se o custo do tratamento é de $R\$100,00$ para teores abaixo de $0,5$, $R\$120,00$ para teores entre $0,5$ e $1,5$ e $R\$200,00$ para teores acima de $1,5\%$, qual o custo esperado para o tratamento de 1,000 unidades de volume?

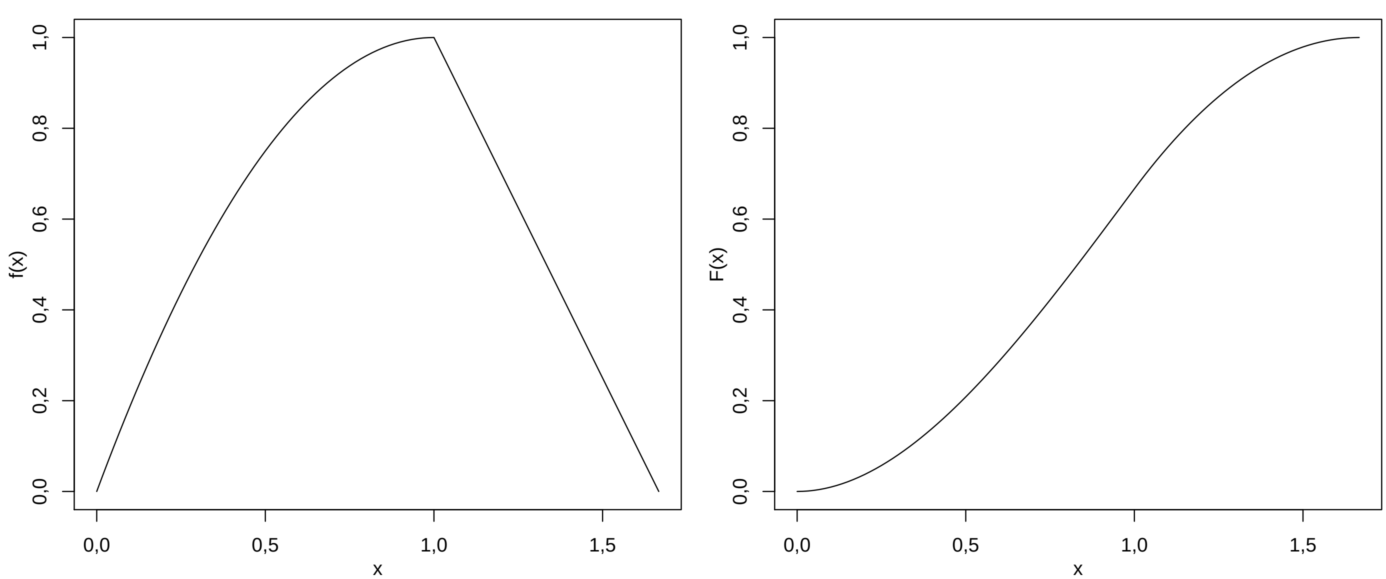
Solução:

(a)
```
> fx <- function(x){
+   y <- ifelse(x >= 0 & x <= 1, -(x-1)^2+1, 0)
+   y <- ifelse(x > 1 & x <= 5/3, (5 - 3*x)/2, y)
+   return(y)
+ }
> curve(fx, 0, 5/3)
> all(fx(seq(0,5/3, l=1000)) >=0)
[1] TRUE
> integrate(fx, 0, 5/3)
1 with absolute error < 6,3e-05
```

(b)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{3}(x-3) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{10(x-1)-3(x^2-1)}{4} & \text{se} \quad 1 < x \leq 5/3 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 5/3 \end{cases}$$

```
> Fx <- function(x){
+   y <- ifelse(x >= 0 & x <= 1, -((x^2)/3)*(x-3), 0)
+   y <- ifelse(x > 1 & x <= 5/3, 2/3 + (10*(x-1) - 3*(x^2-1))/4, y)
+   return(y)
+ }
> curve(Fx, 0, 5/3)
```



(c)
- $P[X < 0.5] = \int_0^{0,5} f(x)dx = F(0,5) = 0,2083$
- $P[X > 1] = \int_1^{5/3} f(x)dx = 1 - F(1) = 0,3333$
- $P[0,7 < X < 1,5] = \int_{0,7}^{1,5} f(x)dx = F(1,5) - F(0,7) = 0,6035$

- $P[X > 0,5|X < 1] = \frac{P[0,5<X<1]}{P[X<1]} = \frac{F(1)-F(0,5)}{F(1)} = 0,6875$
- $P[X > 1,5|X > 1] = \frac{P[X>1,5]}{P[X>1]} = \frac{1-F(1,5)}{1-F(1)} = 0,0625$

(d) $E[X] = \int_0^{5/3} x\, f(x)dx = 0,82$

(e) q_1: $\int_0^{q_1} f(x)dx = 0,25$ ou $F(q_1) = 0,25 \longrightarrow q1 = 0,55$

$md = q_2$: $\int_0^{q_2} f(x)dx = 0,50$ ou $F(q_2) = 0,50 \longrightarrow q2 = 0,83$

q_3: $\int_0^{q_3} f(x)dx = 0,75$ ou $F(q_3) = 0,75 \longrightarrow q3 = 1,09$

(f)

$Y:$ custo de tratamento

y	100	120	200
$P[Y = y]$	p_1	p_2	p_3

$$p_1 = P[X < 0,5] = F(0,5) = 0,21$$
$$p_2 = P[0,5 < X < 1,5] = F(1,5) - F(0,5) = 0,77$$
$$p_3 = P[X > 1,5] = 1 - F(1,5) = 1 - p_1 - p_2 = 0,02$$

$E[Y] = \sum_{i=1}^{3} y_i\, P[Y = y_i] = 100p_1 + 120p_2 + 200p_3 = 117,5$
$1000 \cdot E[Y] = 117500$

Soluções computacionais com o programa R: ______

216. Dois estudantes estão matriculados em um certo curso. Sabe-se que o primeiro assiste a 80% das aulas enquanto que o segundo assiste 60%. Sabe-se ainda que a decisão de um deles faltar não é afetada pela do outro.

   (a) qual a probabilidade que ao menos um dos estudantes esteja em sala em um determinado dia?
   (b) se o segundo estudante está em sala em um dia, qual a probabilidade do primeiro também estar?

Solução:

$A:$ primeiro assiste — $B:$ segundo assiste

$P[A] = 0,80$ — $P[B] = 0,60$

A & B independentes

(a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \overset{ind}{=} P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = 0,8 + 0,6 - (0,8)(0,6) = 0,92$

(b) $P[A|B] \overset{ind}{=} P[A] = 0,8$

---

217. Oito animais são capturados, marcados e devolvidos ao ambiente natural no qual há uma população de 50 indivíduos desta espécie. Após algum tempo retorna-se ao local para estudar a população e considera-se diferentes estratégias. Fazendo suposições adequadas (como por exemplo, que a população não se alterou) avalie as probabilidades nos seguintes cenários.

   (a) Captura-se e prende-se animais até encontrar o primeiro marcado. Qual a probabilidade de encontrar algum marcado em até três (3) capturas?
   (b) Idem anterior mas sendo cada animal capturado avaliado e imediatamente solto.
   (c) No esquema de capturar e soltar, quantas capturas espera-se fazer até encontrar o primeiro animal marcado?
   (d) Ainda no esquema de capturar e soltar, pretende-se agora capturar animais até encontrar o terceiro marcado. Qual a probabilidade de serem necessárias mais do que seis (6) capturas?
   (e) Decide-se capturar exatamente seis (animais). Qual a probabilidade de encontrar algum (ao menos um) animal marcado?

Solução:

(a) $P[1^a] + p[2^a] + P[3^a] = \frac{8}{50} + \frac{42}{50} \cdot \frac{8}{49} + \frac{42}{50} \cdot \frac{41}{49} \cdot \frac{8}{48} = 0,4143$

(b) X : número de não marcados até 1o marcado $\rightarrow X \sim G(p = 8/50) \rightarrow P[X \leq 2] = \sum_{x=0}^{2}(42/50)^2(8/50) = 0,4073$

(c) $1 + E[X] = 1 + \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} = 6,25$

(d) X : número de não marcados até 3o marcado $\rightarrow X \sim BN(3, p = 8/50) \rightarrow P[X > 3] = 1 - P[X \leq 3] = \sum_{x=0}^{3}\binom{x+3-1}{3-1}(42/50)^x(8/50)^3 = 0,944$

(e) X : número de marcados em 6 animais $\rightarrow X \sim HG(N = 50, K = 8, n = 6) \rightarrow P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{\binom{8}{0}\binom{50-8}{6-0}}{\binom{60}{6}} = 0,6699$

---

218. Uma certa enciclopédia eletrônica possui, em média, 1,7 erros por página. Acessa-se (ao acaso) uma página desta enciclopédia e deseja-se saber a probabilidade desta página não conter erros. Identifique a variável aleatória, uma distribuição de probabilidades adequada e calcule a probabilidade de interesse.

Solução:

$$X: \text{ número de erros por página}$$
$$X \sim P(\lambda = 1,7) \longrightarrow P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$P[X = 0] = \frac{e^{-1,7}1,7^0}{0!} = 0,1827$$

---

219. Em um certo exame os estudantes do um curso possuem escore médio de 625 com variância de 2500.

(a) Qual a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso possuir escore acima de 700?

(b) Qual a porcentagem esperada de estudantes com escore entre 600 e 700?

(c) Qual o escore que apenas 10% dois estudantes estão acima dele?

(d) Tomando-se agora o escore de dois (2) estudantes escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que a soma dos escores

- não seja inferior 1200?
- esteja entre 1200 e 1300?

Solução:

$$X: \text{ escore no exame}$$
$$X \sim N(625, 2500)$$

(a) $P[X > 700] = P[Z > \frac{700-625}{50}] = P[Z > 1,5] = 0,0668$

(b) $P[600 < X < 700] = P[\frac{600-625}{50} < Z < \frac{700-625}{50}] = P[-0,5 < Z < 1,5] = -0,6247 \longrightarrow -62,47\%$ dos estudantes

(c) $z_{0,90} = 1,28155 \longrightarrow z_{0,90} = \frac{q_{0,90}-\mu}{\sigma} \longrightarrow q_{0.90} = 689,1$

(d) $X_1 + X_2 \sim N(1250, 5000)$

- $P[X_1 + X_2 > 1200] = P[Z > \frac{1200-1250}{\sqrt{5000}}] = P[Z > -0,707106781186547] = 0,7602$
- $P[1200 < X < 1300] = P[\frac{1200-1250}{\sqrt{5000}} < Z < \frac{1300-1250}{\sqrt{5000}}] = P[-0,71 < Z < 0,71] = -0,5205$

---

220. Um novo teste é desenvolvido para detectar um tipo de câncer. Se aplicado a uma pessoa com este tipo de câncer, a probabilidade do teste apresentar uma reação positiva é de 0,95. Quando aplicado a uma pessoa sem o câncer ainda existe uma probabilidade de 0,03 de um resultado positivo. Suponha ainda que sabe-se que na população uma a cada 50.000 pessoas tem este tipo de cancêr. Se uma pessoa escolhida ao acaso é testada e apresenta resultado positivo, qual a probabilidade de que esta pessoa tenha tal tipo de câncer?

Solução:

$$C : \text{câncer} \quad T : \text{teste positivo}$$
$$P[T|C] = 0,95 \quad P[T|\bar{C}] = 0,03 \quad P[C] = 1/50000$$
$$P[C|T] = \frac{P[C \cap T]}{P[T]} = \frac{P[C]P[T|C]}{P[C]P[T|C] + P[\bar{C}]P[T|\bar{C}]} = \frac{(1/50000)(0,95)}{(1/50000)(0,95) + (49000/50000)(0,03)} = 0,00065$$

---

221. (Magalhães e Lima) Uma Cia que fura poços artesianos trabalha em uma região escolhendo, aleatoriamente, o ponto de furo. Não encontrando água nesta tentativa, sorteia outro local e, caso não tenha sucesso faz uma terceira e última tentativa. Admita a probabilidade de 0,7 de encontrar água em qualquer ponto dessa região. Calcule a probabilidade de:

(a) Encontrar água na segunda tentativa
(b) Encontrar água em no máximo duas tentativas
(c) Encontrar água

Solução:

$$X : \text{número de perfurações (até encontrar água)}$$
$$X \sim G(p = 0,7)$$
$$P[X = x] = p(1-p)^{x-1} \quad \text{somente para } x = 1, 2, 3$$

(a) $P[X = 2] = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$
(b) $P[X \leq 2] = P[X = 1] + P[X = 2] = 0.7 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.91$
(c) $P[X \leq 3] = 1 - P[X > 3] = 1 - 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0,973$

---

222. (Magalhães e Lima) Em um estudo sobre crescimento de jacarés, uma pequena lagoa contém 4 exemplares da espécie A e 5 da espécie B. A evolução do peso e tamanho dos jacarés da lagoa é acompanhada pelos pesquisadores através de capturas periódicas. Determine a probabilidade de, em três jacarés capturados de uma vez, obtermos:

(a) Todos da espécie A.
(b) Nem todos serem da espécie B.
(c) A maioria seja da espécie A.

Solução:

$$X : \text{número jacarés da espécie A}$$
$$X \sim HG(N = 9, K = 4, n = 3)$$
$$P[X = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{x}\binom{9-4}{3-x}}{\binom{9}{3}} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3$$

Note ainda que podemos definir equivalentemente

$$X^c : \text{número jacarés da espécie B}$$
$$X^c \sim HG(N=9, K=5, n=3)$$
$$P[X^c = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{x}\binom{9-5}{3-x}}{\binom{9}{3}} \quad \text{para } x = 0,1,2,3$$

(a) $P[X=3] = \frac{\binom{4}{3}\binom{9-4}{3-3}}{\binom{9}{3}} = 0,0476$

(b) $P[X>0] = 1 - P[X=0] = 1 - \frac{\binom{4}{3}\binom{9-5}{3-0}}{\binom{9}{3}} = 0,881$

que é equivalente a: $P[X^c \neq 3] = 1 - P[X^c = 3] = 1 - \frac{\binom{5}{3}\binom{9-5}{3-3}}{\binom{9}{3}} = 0,881$

(c) $P[X \geq 2] = P[X=2] + P[X=3] = \frac{\binom{4}{2}\binom{9-5}{3-2}+\binom{4}{3}\binom{9-5}{3-3}}{\binom{9}{3}} = 0,4048$

---

223. Para cada uma das funções abaixo diga se é uma f.d.p. (função de densidade de probabilidade) válida justificando a resposta.

a) $f(x) = 1 - x \;\; ; \;\; 0 < x < 2$
b) $f(x) = (1/2)\exp\{-x/2\} \;\; ; \;\; 0 < x < +\infty$
c) $f(x) = 3\,x^2 \;\; ; \;\; -1 < x < 0$
d) $f(x) = |x-1|/2 \;\; ; \;\; 0 < x < 2$
e) $f(x) = 1/10 \;\; ; \;\; -0,1 < x < 0,1$

Solução:
Condições a serem verificadas e obedecidas:

- $f(x) \geq 0 \; \forall x$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

As condições devem ser verificadas para cada função.
A seguir é feita uma verificação numérica somente para ilustração.

a) $f(x) = 1 - x \;\; ; \;\; 0 < x < 2$ não é f.d.p. pois $\exists x | f(x) < 0$ e $\int f(x) dx \neq 1$

```
> fa <- function(x) ifelse((x > 0 & x < 2), 1-x, 0)
> all(fa(seq(0,2,l=1000)) >= 0)

[1] FALSE

> integrate(fa, 0, 1)$val

[1] 0,5

> integrate(fa, 1, 2)$val

[1] -0,5

> round(integrate(fa, 0, 2)$val, dig=5)

[1] 0
```

b) $f(x) = (1/2)\exp\{-x/2\} \;\; ; \;\; 0 < x < +\infty$ é f.d.p.

```
> fb <- function(x) ifelse(x > 0, 0.5*exp(-x/2), 0)
> all(fb(seq(0,10000,l=1000)) >= 0)

[1] TRUE

> round(integrate(fb, 0, Inf)$val, dig=5)
```

```
[1] 1
```

c) $f(x) = 3\,x^2$; $-1 < x < 0$ é f.d.p.

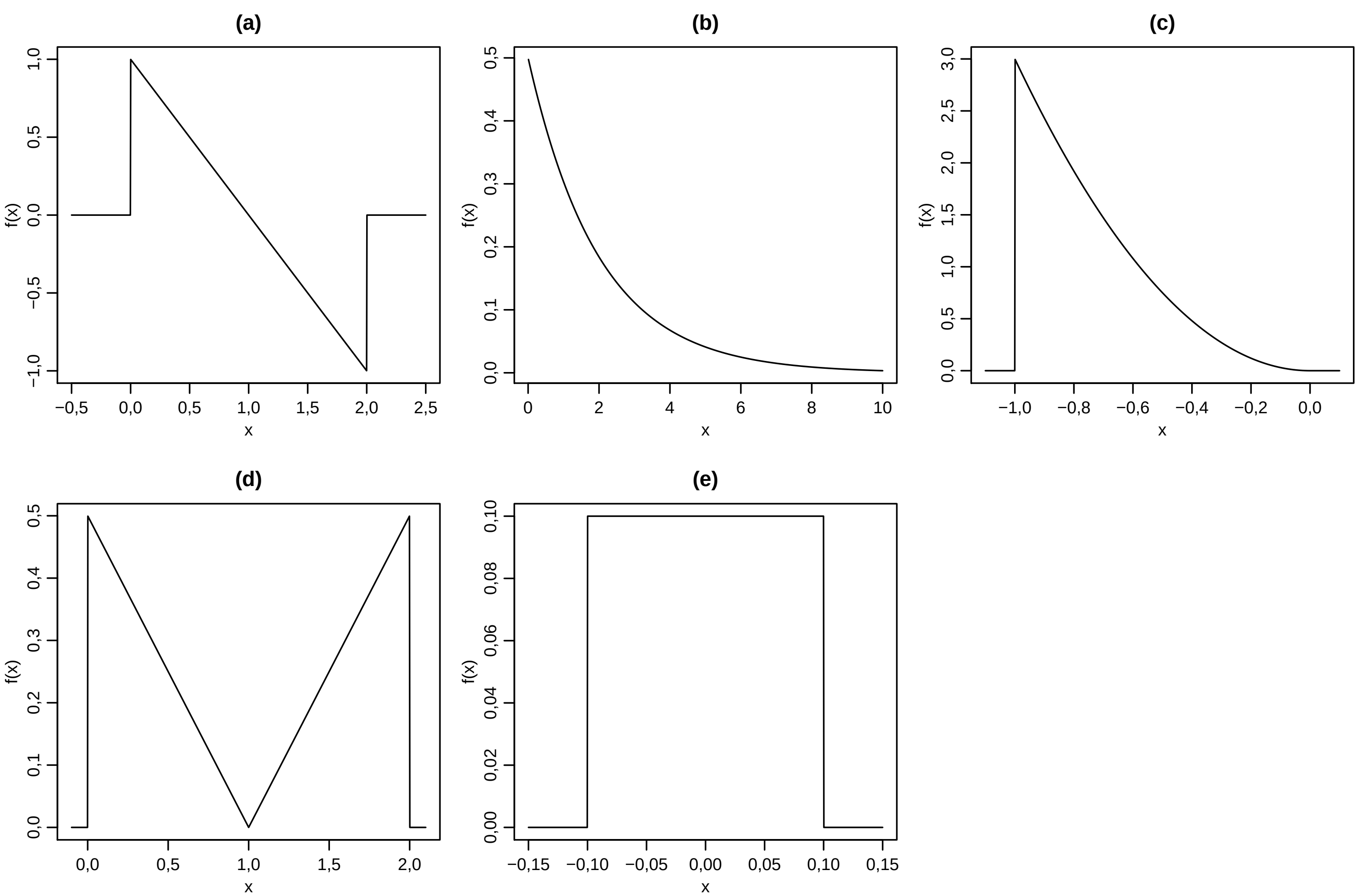
```
> fc <- function(x) ifelse((x > -1 & x < 0), 3*x^2, 0)
> all(fc(seq(-1,0, l=1000)) >= 0)

[1] TRUE

> round(integrate(fc, -1, 0)$val, dig=5)

[1] 1
```

d) $f(x) = |x-1|/2$; $0 < x < 2$ não é f.d.p. pois $\int f(x)dx \neq 1$

```
> fd <- function(x) ifelse(x > 0 & x < 2, abs(x-1)/2, 0)
> all(fd(seq(0,2,l=1000)) >= 0)

[1] TRUE

> round(integrate(fd, 0, 2)$val, dig=5)

[1] 0,5
```

e) $f(x) = 1/10$; $-0,1 < x < 0,1$ não é f.d.p. pois $\int f(x)dx \neq 1$

```
> fe <- function(x) ifelse((x > -0.1 & x < 0.1), 1/10, 0)
> all(fe(seq(-0.1, 0.1,l=1000)) >= 0)

[1] TRUE

> round(integrate(fe, -0.1, 0.1)$val, dig=5)

[1] 0,02
```



224. O tempo que passageiros esperam no balcão de *check-in* de uma cia aérea é uma variável aleatória com média de 13,5 minutos e desvio padrão de 1,8 minutos. Vai ser tomada uma amostra aleatória do tempo de espera de 36 passageiros. Encontre a probabilidade:

(a) do tempo de espera de um passageiro escolhido ao acaso ser maior que 15 min;

(b) do tempo médio dos 36 passageiros estar acima de 15 min;

(c) do tempo médio de atendimento dos 36 passageiros estar entre 13 e 14 minutos

Solução:

$$X \sim N(\mu = 13,5, \sigma^2 = 1,8^2)$$
$$\bar{X_{36}} \sim N(\mu = 13,5, \sigma^2 = 1,8^2/36)$$

(a) $P(X > 15) = P(Z > \frac{15-13,5}{1,8}) = P(Z > 0,833) = 0,2$

(b) $P(\bar{X} > 15) = P(Z > \frac{15-13,5}{1,8/\sqrt{36}}) = P(Z > 5) = 0$

(c) $P(13 < \bar{X} < 14) = P(\frac{13-13,5}{1,8/\sqrt{36}} < Z < \frac{14-13,5}{1,8/\sqrt{36}}) = P(-1,667 < Z < 1,667) = 0,9$

---

item (Magalhães e Lima) Dois processadores são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade e que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de 1/30, no tipo B 1/80 e, em ambos, 1/1000. Qual a probabilidade de que:

(a) Pelo menos um deles tenha apresentado erro?

(b) Nenhum tenha apresentado erro?

(c) Apenas A tenha apresentado erro?

Solução:

$$A: \text{ processador A falha} \quad B: \text{ processador B falha}$$
$$P[A] = 1/30 \quad P[B] = 1/80 \quad P[A \cap B] = 1/1000$$

(a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = (1/30) + (1/80) - (1/1000) = 269/6000 = 0,045$

(b) $P[\bar{A} \cup \bar{B}] = 1 - P[A \cup B] = 0,955$

(c) $P[A \cap \bar{B}] = P[A] - P[A \cap B]97/3000 = 0,032$

---

225. Uma certa enciclopédia eletrônica possui, em média, 1,7 erros por página. Acessa-se (ao acaso) uma página desta enciclopédia e deseja-se saber a probabilidade desta página não conter erros. Identifique a variável aleatória, uma distribuição de probabilidades adequada e calcule a probabilidade de interesse.

Solução:

$$X: \text{ número de erros por página}$$
$$X \sim P(\lambda = 1,7) \longrightarrow P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$P[X = 0] = \frac{e^{-1,7}1,7^0}{0!} = 0,1827$$

---

226. Em um certo exame os estudantes do um curso possuem escore médio de 625 com variância de 2500.

(a) Qual a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso possuir escore acima de 700?

(b) Qual a porcentagem esperada de estudantes com escore entre 600 e 700?

(c) Qual o escore que apenas 10% dois estudantes estão acima dele?

(d) Tomando-se agora o escore de dois (2) estudantes escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que a soma dos escores

- não seja inferior 1200?
- esteja entre 1200 e 1300?

(e) Qual a probabilidade de que o escore médio de um grupo de 5 estudantes escolhidos ao acaso seja inferior a 600?

Solução:

$$X : \text{ escore no exame}$$
$$X \sim N(625, 2500)$$

(a) $P[X > 700] = P[Z > \frac{700-625}{50}] = P[Z > 1,5] = 0,0668$

(b) $P[600 < X < 700] = P[\frac{600-625}{50} < Z < \frac{700-625}{50}] = P[-0,5 < Z < 1,5] = 0,6247 \longrightarrow 62,47\%$ dos estudantes

(c) $z_{0,90} = 1,28155 \longrightarrow z_{0,90} = \frac{q_{0,90}-\mu}{\sigma} \longrightarrow q_{0.90} = 689,1$

(d) $X_1 + X_2 \sim N(1250, 5000)$

- $P[X_1 + X_2 > 1200] = P[Z > \frac{1200-1250}{\sqrt{5000}}] = P[Z > -0,707106781186547] = 0,7602$
- $P[1200 < X < 1300] = P[\frac{1200-1250}{\sqrt{5000}} < Z < \frac{1300-1250}{\sqrt{5000}}] = P[-0,71 < Z < 0,71] = -0,5205$

(e) $\bar{X}_n \sim N(625, 2500/n)$
$P[\bar{X}_5 < 600] = P[Z < \frac{600-625}{50/\sqrt{5}}] = P[Z < -1,118] = 0,1318$

---

227. (Magalhães e Lima) Estatísticas obtidas junto às assistências técnicas indicam que a bomba de água de uma certa lavadora só pode apresentar defeitos após quatro anos de uso. Admita que, nos próximos seis meses, após este período, um mal funcionamento tem probabilidade 0,1 de ocorrer e, caso ocorra, terá 0,5 de probabilidade de ser recuperável. O reparo, que só pode ser feito uma vez, tem preço de R$10,00, enquanto que a bomba nova tem preço de R$ 30,00. Determine a média e variância do gasto com peças em 4,5 anos de uso.

Solução:

$$A : \text{mal funcionamento} \quad P[A] = 0,1$$
$$R : \text{recuperável} \quad P[R|A] = 0,5$$
$$\text{Eventos possíveis :}$$
$$\bar{A} : P[\bar{A}] = 0,9$$
$$A \cap R : P[A \cap R] = P[R|A] \cdot P[A] = 0,5 \cdot 0.1 = 0.05$$
$$A \cap \bar{R} : P[A \cap \bar{R}] = P[\bar{R}|A] \cdot P[A] = 0,5 \cdot 0.1 = 0.05$$

$$Y : \text{gasto em reais}$$

Distribuição de Probabilidades:

Evento	A	$A \cap R$	$A \cap \bar{R}$
Gastos (Y)	R$ 0,00	R$ 0,10	R$ 0,30
$P[Y = y]$	0,9	0,05	0,05

- $E[Y] = \sum y_i P[Y = y_i] = 0 \cdot 0,9 + 10 \cdot 0,05 + 30 \cdot 0,03 = 2$
- $V[X] = \sum (y_i - E[X])^2 P[Y = y_i] = (0-2)^2 \cdot 0,9 + (10-2)^2 \cdot 0,05 + (30-2)^2 \cdot 0,03 = 46$

228. Uma indústria de tintas recebe pedidos de seus vendedores através de fax, telefone e internet. O número de pedidos que chega por qualquer meio em horário comercial é uma v.a. com distribuição de Poisson com taxa de 5 pedidos por hora.

(a) Calcule a probabilidade de que em uma hora haja mais que 2 pedidos

(b) Em um dia de trabalho (8 hrs), qual seria a probabilidade de haver 50 pedidos?

(c) Qual a probabilidade de que haja ao menos um pedido em um período de 2 horas?

Solução:

$$\begin{aligned} X_h &: \text{número de pedidos por hora} \quad X_h \sim \mathrm{P}(\lambda_h = 5) \\ X_d &: \text{número de pedidos por dia (8 horas)} \quad X_h \sim \mathrm{P}(\lambda_d = 40) \quad X_h \approx \mathrm{N}(\mu = 40, \sigma^2 = 40) \\ X_{2h} &: \text{número de pedidos a cada 2 horas} \quad X_{2h} \sim \mathrm{P}(\lambda_{2h} = 10) \end{aligned}$$

(a) $P[X_h > 2] = 1 - P[X_h = 0] - P[X_h = 1] = 0,96$

(b) $P[X_d = 50] \approx P[\frac{49{,}5-40}{\sqrt{40}} < Z < \frac{50{,}5-40}{\sqrt{40}}] = 0,0177$

(c) $P[X_{2h} > 2] = 1 - P[X_h = 0] = 0,99995$

---

229. Em uma montadora, três fábricas, A, B e C são responsáveis por 20, 50 e 30% do total de certa peça utilizada, respectivamente. De cada fábrica, 20, 5 e 2% respectivamente, das peças apresentam problemas antes do vencimento da garantia. É detectado problema em uma peça na montadora. Qual a probabilidade de ter sido fornecida pela fábrica A ? E pela fábrica C ?

Solução:

```
> FAB <- c(0.2, 0.5, 0.3)
> GARdFAB <- c(0.20, 0.05, 0.02)
> GAR <- sum(FAB*GARdFAB)
> (AdGAR  <- FAB[1] * GARdFAB[1]/GAR)

[1] 0,5634

> (CdGAR  <- FAB[3] * GARdFAB[3]/GAR)

[1] 0,08451
```

---

230. O rendimento de uma frota de veículos de uma locadora tem a seguinte função de densidade de probabilidades. Calcule o solicitado nos itens a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k(x-5)}{2} & \text{se } 5 \leq x < 7 \\ \frac{k(11-x)}{4} & \text{se } 7 \leq x \leq 11 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) O valor de k.

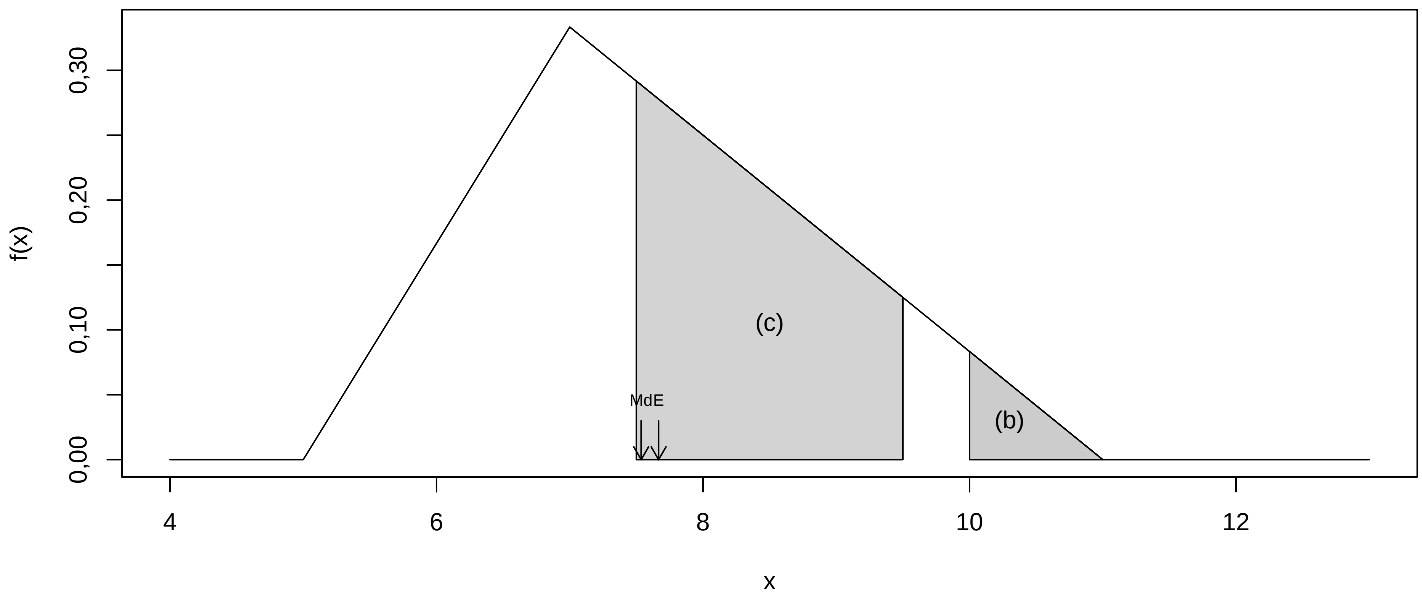
(b) $P[X > 10]$.

(c) $P[7,5 < X < 9,5]$.

(d) O consumo médio.

(e) O consumo mediano.

Solução:



(a)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_5^7 k(x-5)/2\mathrm{d}x + \int_7^{11} k(11-x)/4\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\frac{k}{2}\left[\frac{7^2-5^2}{2} - 5(7-5)\right] + \frac{k}{4}\left[11(11-7) - \frac{11^2-7^2}{2}\right] = 1$$

$$k = \frac{1}{3}$$

(b) $P[X > 10] = \int_{10}^{11} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1/3}{4}\left[11(11-10) - \frac{11^2-10^2}{2}\right] = 0,0417$

(c) $P[7,5 < X < 9,5] = \int_{7,5}^{9,5} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1/3}{4}\left[11(9,5-7,5) - \frac{9,5^2-7,5^2}{2}\right] = 0,417$

(d) $E[X] = \int_5^{11} f(x)\,\mathrm{d}x = 7,67$

(e) $\int_5^{Md} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,5 \Rightarrow Md = 7,54$

---

231. Mostre como a *função geradora de momentos* pode ser utilizada para encontrar momentos de uma variável aleatória, ilustrando com pelo menos uma distribuição discreta e uma contínua.

232. Seja v.a.'s X e Y com distribuição conjunta $f(x,y) = (1/8)(6-x-y)\mathrm{I}_{(0,2)}(x)\mathrm{I}_{(2,4)}(y)$ e obtenha:

   (a) as expressões das marginais $f(x)$ e $f(y)$
   (b) as expressões das condicionais $f(x|y)$ e $f(y|x)$
   (c) $P[0,5 < X < 1,5 \;\text{ e }\; 3 < Y < 3,5]$
   (d) $P[X > 1 \;\text{ e }\; Y < 3]$
   (e) $P[X > 1]$
   (f) $P[X > 1|Y > 3]$

233. Dois profissionais vão tentar resolver um problema e cada um deles pode ou não conseguir resolver. A chance do primeiro resolver é de 60% e do segundo 45%. Neste contexto responda às questões abaixo, fazendo suposições se necessário.

(a) Por que este pode ser considerado um experimento aleatório?
(b) Qual o espaço amostral?
(c) Qual a probabilidade de que ambos resolvam o problema?
(d) Qual a probabilidade de que o problema seja resolvido?
(e) Foi necessária alguma suposição para para resolver os items anteriores? Se positivo, qual suposição?

Solução:
Notação:

$$\begin{array}{lll} A: \text{o primeiro resolve o problema} & P[A] = 0,60 & P[\overline{A}] = 0,40 \\ B: \text{o segundo resolve o problema} & P[B] = 0,45 & P[\overline{B}] = 0,55 \end{array}$$

(a)
(b) $\Omega = \{(A, B), (A, \overline{B}), (\overline{A}, B), (\overline{A}, \overline{B})\}$
(c) Supondo independência: $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = 0,60 \cdot 0,45 = 0,27$
(d) Supondo independência: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,60 + 0,45 - 0,27 = 0,78$
(e) Independência entre os profissionais, ou seja, a probabilidade de cada um resolver independe do problema ser ou não resolvido pelo outro.

---

234. (adaptado de M. & L., 2002) Em um levantamento de dados de acidentes em uma estrada foram resumidos na tabela a seguir. A partir desses dados, responda às questões propostas.

	Vítimas fatais	
Motorista	Sim	Não
Sóbrio	1228	275
Alcoolizado	2393	762

(a) Voce diria que o fato do motorista estar ou não alcoolizado afeta a chance de ocorrer vítimas fatais? Justifique.
(b) Obtenha a partir da tabela acima: (a) alguma probabilidade marginal, (b) alguma probabilidade condicional, (c) alguma probabilidade de interseção de eventos.
(c) Cite um par de eventos mutuamente exclusivos.
(d) Se um motorista alcoolizado se envolve em um acidente, qual a probabilidade de haver vítima fatal?
(e) Se houve uma vítima fatal em um acidente, qual a probabilidade do motorista estar alcoolizado?

Solução:
Notação:

$$\begin{array}{ll} S: \text{motorista sóbrio} & A \equiv \overline{S}: \text{motorista alcoolizado} \\ F: \text{acidante com vítima fatal} & NF \equiv \overline{F}: \text{acidente sem vítima fatal} \end{array}$$

(a) Concluir comparando as proporções (probabilidades) de vítima fatal entre sóbrios e alcoolizados, ou seja as probabilidades condicionais $P[F|S]$ e $P[F|A]$, que são dadas por:

```
     S      A
0,8170 0,7585
```

(b) i. Probabilidades marginais:

$$P[A] = \frac{3155}{4658} = 0,677 \quad ; \quad P[S] = P[\overline{A}] = \frac{1503}{4658} = 0,677$$
$$P[A] = \frac{3621}{4658} = 0,777 \quad ; \quad P[S] = P[\overline{A}] = \frac{1037}{4658} = 0,223$$

ii. Probabilidades conjuntas (interseção):

$$P[A \cap F] = \frac{2393}{4658} = 0,514 \quad ; \quad P[S \cap F] = \frac{1228}{4658} = 0,264$$
$$P[A \cap NF], = \frac{762}{4658} = 0,164 \quad ; \quad P[S \cap NF] = \frac{275}{4658} = 0,059$$

iii. Probabilidades condicionais: $P[A|F], P[S|F], P[F|A], P[NF|A]$

$$P[A|F] = \frac{2393}{3621} = 0,661 \quad ; \quad P[S|F] = P[\overline{A}] = \frac{1228}{3621} = 0,339$$
$$P[A|NF] = \frac{762}{1037} = 0,735 \quad ; \quad P[S|NF] = P[\overline{A}] = \frac{275}{1037} = 0,265$$
$$P[F|A] = \frac{2393}{3155} = 0,758 \quad ; \quad P[NF|A] = P[\overline{A}] = \frac{762}{3155} = 0,242$$
$$P[F|S] = \frac{1228}{1503} = 0,817 \quad ; \quad P[NF|S] = P[\overline{A}] = \frac{275}{1503} = 0,183$$

(c) Pares de eventos mutuamente exclusivos: F e NF
- *com vítima fatal* e *sem vítima fatal* (F e NF)
- *sóbrio* e *alcoolizado* (S e A)

(d) $P[F|A] = \frac{P[F \cap A]}{P[A]} = \frac{2393}{2393+762} = 0,661$

(e) $P[A|F] = \frac{P[A \cap F]}{P[F]} = \frac{2393}{1228+2393} = 0,758$

---

235. Um instituto que faz previsões meteorológicas fez uma avaliação de suas previsões de 48 horas para finais de semana feitas por um particular modelo de previsão. Foi verificado que a previsão indicava chuva em 80% dos dias que de fato choveu e previa não chuva em 92% dos dias em que não choveu. Verificou-se ainda que chove em 12% dos períodos.

(a) Escreva em notação de probabilidades adequada as informações dadas no problema.
(b) Qual a probabilidade (proporção) de previsão de chuva?
(c) Qual a probabilidade de chover quando há uma previsão de chuva?
(d) Qual a probabilidade de obter uma previsão incorreta?
(e) Supondo os mesmos percentuais de acertos de previsão, qual seria a probabilidade de acerto de uma previsão de chuva em outra região em que chove em apenas 5% dos períodos?

Solução:
Notação:

A : previsão de chuva na região — $\overline{A}$: previsão de chuva

C : chove no período — $\overline{C}$: não chove no período

(a)

$$P[C] = 0,12 \qquad P[\overline{C}] = 0,88$$
$$P[A|C] = 0,80 \qquad P[\overline{A}|C] = 0,20$$
$$P[\overline{A}|\overline{C}] = 0,92 \qquad P[A|\overline{C}] = 0,08$$

(b) $P[A] = P[A \cap C] + P[A \cap \overline{C}] = P[A|C] \cdot P[C] + P[A|\overline{C}] \cdot P[\overline{C}] = (0,80)(0,12) + (0,08)(0,88) = 0,166$

(c) $P[C|A] = \frac{P[C \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|C] \cdot P[C]}{P[A]} = \frac{(0,80)(0,12)}{0,166} = 0,577$

(d) $P[C|\overline{A}] + P[\overline{C}|A] = \frac{P[C \cap \overline{A}]}{P[\overline{A}]} + \frac{P[\overline{C} \cap A]}{P[A]} = \frac{P[\overline{A}|C] \cdot P[C]}{P[\overline{A}]} + \frac{P[A|\overline{C}] \cdot P[\overline{C}]}{P[A]} = \frac{(0,20)(0,12)}{0,834} + \frac{(0,08)(0,88)}{0,166} = 0,452$

(e) Nesse caso:

$$P[C] = 0,05 \qquad P[\overline{C}] = 0,95$$

e recalculando temos:

$$P[A] = P[A \cap C] + P[A \cap \overline{C}] = P[A|C] \cdot P[C] + P[A|\overline{C}] \cdot P[\overline{C}] = (0,80)(0,05) + (0,08)(0,95) = 0,116.$$

A probabilidade de acertar uma previsão de chuva fica:

$$P[C|A] = \frac{P[C \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|C] \cdot P[C]}{P[A]} = \frac{(0,80)(0,05)}{0,116} = 0,345$$

---

236. Em um teste com quatro questões de múltipla escolha, cada questão possui cinco alternativas com apenas uma delas correta. Estamos interessados na situação de "acerto casual", na qual a resposta de cada questão é escolhida ao acaso, supondo que todas as questões são respondidas.

(a) Defina a v.a. de interesse.

(b) Obtenha a função de probabilidades.

(c) Obtenha a função de distribuição (acumulada).

(d) Obtenha o valor esperado da v.a.

Suponha agora que para cada acerto ganha-se dois pontos e perde-se um ponto para cada erro.

(e) Sob as mesmas condições, obtenha a distribuição de probabilidades do número de pontos ganhos.

Solução:

(a) X : número de acertos

(b)

x	0	1	2	3	4
$P[X = x]$	$(4/5)^4 =$ $= 0,4096$	$4(1/5)^1(4/5)^3 =$ $= 0,4096$	$6(1/5)^2(4/5)^2 =$ $= 0,1536$	$4(1/5)^3(4/5)^1 =$ $= 0,0256$	$(1/5)^4 =$ $= 0,0016$

(c)

x	0	1	2	3	4
$F(x) = P[X \leq x]$	0,4096	0,8192	0,9728	0,9984	1

(d) $\text{E}[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i P[X = x_i] = 0,8$

(e) Y : pontos obtidos. Y é uma transformação 1-1 de X e portanto $P[Y = y_i] = P[X = x_i]$.

x	0	1	2	3	4
y	-4	-1	2	5	8
$P[Y = y]$	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Solução alternativa: usar o fato que $X \sim B(n = 4, p = 1/5)$

---

237. Seja X uma v.a. com função de distribuição de probabilidades dada por:

$$f(x) = \begin{cases} c\,x & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Obtenha o valor de c.

(b) Calcule $P[X > 2]$

(c) Calcule $P[1,2 < X < 3,5]$

(d) Calcule $P[X < 3|X > 1,5]$

(e) Obtenha a $E[X]$

(f) Obtenha k tal que $P[X > k] = 0,5$

Solução:

(a)

$$\int_0^4 c\,x \;\; \mathrm{d}x = 1$$
$$c = 1/8$$

(b) $P[X > 2] = \int_2^4 x/8 \;\; \mathrm{d}x = 0,75$

(c) Calcule $P[1,2 < X < 3,5] \int_2^4 x/8 \;\; \mathrm{d}x = 0,6756$

(d) Calcule $P[X < 3|X > 1,5] = \frac{P[1,5<X<3]}{P[X>1,5]} = 0,4909$

(e) $E[X] = \int_0^4 x \cdot x/8 \;\; \mathrm{d}x = (1/8)4^3/3 = 8/3 = 2,67$

(f)

$$\int_0^k x/8 \;\; \mathrm{d}x = 0.5$$
$$(1/8)k^2/2 = 0,5$$
$$k = \sqrt{8}$$

---

238. Suponha que a posição na qual ocorre um dano em um disco pode ser considerada uma variável uniforme com valores entre 0 e 100 (valores percentuais em relação a capacidade total do disco). Define-se ainda que a porção inicial do disco corresponde aos 15% iniciais, a porção intermediária entre 15 e 80% e a porção nos restantes 20%.

(a) Defina a v.a. de interesse, a função de densidade de probabilidades e a função de distribuição (acumulada).

(b) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção inicial do disco.

(c) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção final do disco, sabendo que não ocorreu na inicial.

(d) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção inicial ou final do disco.

(e) Defina uma nova variável dada pela porção do disco onde ocorre a falha e monte a sua distribuição de probabilidades.

Considere agora que serão examinados cinco discos com dano e estamos interessados no número de discos que apresenta dano na porção inicial.

(f) Defina a v.a. de interesse, identifique o seu *tipo* e obtenha a distribuição de probabilidades.

(g) Calcule a probabilidade de obter no máximo um dos discos com dano na porção inicial.

(h) Se forem examinados 100 lotes de cinco discos, qual deve ser o número médio de discos por lote SEM dano na porção inicial?

Solução:

(a)

$$X : \text{número de acertos}$$
$$f(x) = \frac{1}{100-0} = \frac{1}{100}$$
$$F(x) = \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{100}x\Big|_0^x = \frac{x-0}{100-0} = \frac{x}{100}$$

(b)

$$P[0 < X < 15] = \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{100}x\Big|_0^{15} = \frac{1}{100}(15-0) = 0,15$$

ou

$$P[0 < X < 15] = F(15) = \frac{15}{100} = 0,15$$

(c)

$$P[80 < X < 100|X > 15] = \frac{P[80 < X < 100 \cap X > 15]}{P[X > 15]} = \frac{P[80 < X < 100]}{P[X > 15]} = \frac{\int_{80}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{15}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{20/100}{85/100} = 0,235$$

ou

$$P[80 < X < 100|X > 15] = \frac{1 - F(80)}{1 - F(15)} = 0,235$$

(d)

$$P[X < 15 \cup X > 80] = P[X < 15] + P[X > 80] = \frac{15}{100} + \frac{20}{100} = 0,35$$

ou

$$P[X < 15 \cup X > 80] = F(15) + (1 - F(80)) = \frac{15}{100} + (1 - \frac{80}{100}) = 0,35$$

(e)

$Y :$ porção do disco onde ocorre dano

y	inicial	intermediária	final
P[Y=y]	0,15	0,65	0,20

(f)

$Z :$ número de discos com dano entre cinco discos na porção inicial

$Z \sim B(n = 5, p = 0,15)$

$$P[Z = z] = \binom{5}{z}(0,15)^z\,(1 - 0,15)^{5-z}$$

(g) $P[Z \leq 1] = P[Z = 0] + P[Z = 1] = \binom{5}{0}(0,15)^0\,(1-0,15)^{5-0} + \binom{5}{1}(0,15)^1\,(1-0,15)^{5-1} = 0,444 + 0,392 = 0,835$

(h) $\mathrm{E}[5 - X] = 5 - \mathrm{E}[X] = 5 - n \cdot p = 5 - 5 \cdot (0,15) = 4,25$

---

239. Considere que um grande grupo (I) de pessoas vai fazer uma determinada prova. Supõe-se que as *notas* seguem uma distribuição normal de média 450 e variância 144. Chama-se de *escores* ($Z = (X - \mu)/\sigma$ as notas padronizadas para uma distribuição normal padrão (média zero e variância unitária)

(a) Qual a proporção esperada de candidatos com nota superior a 470?
(b) Qual a proporção esperada de candidados com notas entre 430 e 460?
(c) Qual a proporção esperada de candidados que se distanciem mais do que 1,5 desvios padrões da média?
(d) Se forem classificados para uma próxima etapa 20% dos candidatos com as maiores notas, qual será a nota de corte para classificação para próxima etapa.
(e) Se dividirmos os candidatos em três faixas: A : os 60% com menores notas, B : 30% de notas intermediárias e C : 10% com as maiores notas. Quais os escores que definem os grupos?
(f) Quais valores correspondem aos quartis da distribuição das notas?
(g) São considerados candidatos excepcionais aqueles com escore acima de 2,5. A qual nota corresponde tal escore?

Um outro grupo (II) fez uma prova equivalente em um outro dia. Para este outro grupo a média foi de 462 e a variância de 81. Os candidados dos dois grupos serão classificados usando os escores.

(h) Entre um candidato do grupo I com nota 470 e um do grupo II com nota 485, qual estaria melhor classificado?
(i) Quais seriam as notas para classificar os candidatos do grupo II nas faixas A, B e C?
(j) Se fosse adotada uma única nota de corte de 475, qual seria o percentual de classificados de cada grupo?

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{nota no grupo I} & X &\sim \mathrm{N}(450, 12) \\ Z = \frac{X - 450}{12} &: \text{escore} & Z &\sim \mathrm{N}(0, 1) \\ Y &: \text{nota no grupo II} & Y &\sim \mathrm{N}(462, 9) \end{aligned}$$

(a) $P[X > 470] = P[Z > \frac{470-450}{12}] = P[Z > 1,667] = 0,0478$

(b) $P[430 < X < 460] = P[\frac{430-450}{12} < Z < \frac{460-450}{12}] = P[-1,667 < Z < 0,8333] = 0,75$

(c) $P[|Z| > 1,5] = P[Z < -1,5] + P[Z > 1,5] = 0,134$

(d)

$$\begin{aligned} P[X > x_D] &= 0,20 \\ z &= 0,8416 \\ z &= \frac{x_D - 450}{12} \\ x_D &= 460,1 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} P[Z < z_1] = 0,60 &\longrightarrow z_1 = 0,2533 \quad (x_1 = 453) \\ P[Z < z_2] = 0,90 &\longrightarrow 1,282 \quad (x_2 = 465,4) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} Q_1 &: \\ P[X < Q_1] &= 0,25 \\ z_1 &= -0,6745 \\ z_1 &= \frac{Q_1 - 450}{12} \\ Q_1 &= 441,9 \\ Q_2 &: \\ P[X < Q_2] &= 0,50 \\ Q_2 &= 450 \\ Q_3 &: \\ P[X < Q_3] &= 0,75 \\ z_3 &= 0,6745 \\ z_3 &= \frac{Q_3 - 450}{12} \\ Q_3 &= 458,1 \end{aligned}$$

(g) $z = \frac{x_G-450}{12} = 2,5 \longrightarrow x_G = 480$

(h)

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{470 - 450}{12} = 1,67 \\ z_{II} &= \frac{482 - 462}{9} = 2,56 \end{aligned}$$

(i)

$$P[Z < z_1] = 0,60 \longrightarrow z_1 = 0,2533 \quad (y_1 = 464,3)$$
$$P[Z < z_2] = 0,90 \longrightarrow 1,282 \quad (y_2 = 473,5)$$

(j)

$$\text{Grupo I} : P[X > 475] = P[Z > \frac{475 - 450}{12}] = P[Z > 2,083] = 0,0186$$
$$\text{Grupo II} : P[X > 475] = P[Z > \frac{475 - 462}{9}] = P[Z > 1,444] = 0,0743$$

Solução computacional (com o R)

```
> (qA <- pnorm(470, m=450, sd=12, low=F))

[1] 0,04779

> (qB <- diff(pnorm(c(430,460), m=450, sd=12)))

[1] 0,7499

> (qC <- 2*pnorm(-1.5))

[1] 0,1336

> (qD <- qnorm(0.80, m=450, sd=12))

[1] 460,1

> (qE <- qnorm(c(0.60,0.90)))

[1] 0,2533 1,2816

> (qEn <- qnorm(c(0.60,0.90), m=450, sd=12))

[1] 453,0 465,4

> (qF <- qnorm(c(0.25,0.50,0.75), m=450, sd=12))

[1] 441,9 450,0 458,1

> (qG <- 450 + 2.5 * 12)

[1] 480

> (qH <- c((470-450)/12,(485-462)/9))

[1] 1,667 2,556

> (qI <- qnorm(c(0.60,0.90), m=462, sd=9))

[1] 464,3 473,5

> (qJ <- c(pnorm(475, m=450, sd=12, low=F), pnorm(475, m=462, sd=9, low=F)))

[1] 0,01861 0,07431
```

240. Suponha que um sistema apresenta uma taxa de 3,2 falhas a cada 1000 pacotes transmitidos.

(a) Qual a probabilidade de haver duas ou mais falhas na transmissão de 100 pacotes?

(b) Sabendo que houveram falhas na transmissão de 1000 pacotes, qual a probabilidade que tenha sido mais do que uma?

(c) Qual a probabilidade de não haver falhas na transmissão de 500 pacotes?

(d) Qual a probabilidade de haver 6 falhas na transmissão de 2000 pacotes?

(e) Qual deveria ser a taxa de falhas para que a probabilidade de não haver falha de transmissão em 1000 pacotes seja de pelo menos 0,90?

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{número de falhas a cada 1000 pacotes} \\ X &\sim \mathrm{P}(\lambda = 3,2) \\ P[X = x] &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \end{aligned}$$

(a) $P[X \geq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-3,2}3,2^0}{0!} - \frac{\mathrm{e}^{-3,2}3,2^1}{1!} = 1 - \mathrm{e}^{-3,2}(1 + 3,2) = 0,829$

(b) $P[X > 1|X \geq 1] = \frac{P[X>1 \cap X \geq 1]}{P[X \geq 1]} = \frac{P[X>1]}{P[X \geq 1]} = \frac{1-P[X=0]-P[X=1]}{1-P[X=1]} = \frac{1-0{,}171}{1-0{,}0408} = 0,864$

(c)

$$\begin{aligned} X_c &: \text{número de falhas a cada 500 pacotes} \\ X_c &\sim \mathrm{P}(\lambda_c = 1,6) \\ P[X = 0] &= \frac{\mathrm{e}^{-1,6}1,6^0}{0!} = 0,202 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} X_d &: \text{número de falhas a cada 2000 pacotes} \\ X_d &\sim \mathrm{P}(\lambda_d = 6,4) \\ P[X = 6] &= \frac{\mathrm{e}^{-6,4}6,4^6}{6!} = 0,159 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} X_e &: \text{número de falhas a cada 1000 pacotes} \\ X_e &\sim \mathrm{P}(\lambda_e) \\ P[X = 0] &\geq 0,90 \\ \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_e}\lambda_e^0}{0!} &\geq 0,90 \\ \mathrm{e}^{-\lambda_e} &\geq 0,90 \\ \lambda_e &\leq -\log(0,90) = 0,105 \end{aligned}$$

Solução computacional (com o R)

```
> (qA <- ppois(1, lam=3.2, low=F))
```

```
[1] 0,8288
```

```
> (qB <- ppois(1, lam=3.2, low=F)/ppois(0, lam=3.2, low=F))
```

```
[1] 0,864

> (qC <- dpois(0, lam=1.6))

[1] 0,2019

> (qD <- dpois(6, lam=6.4))

[1] 0,1586

> (qE <- -log(0.90))

[1] 0,1054
```

---

241. Um *cluster* possui 30 nós para processamento, sendo 10 de alta velocidade e 20 de baixa velocidade. A cada processo submetido são alocados aleatóriamente o número de nós solicitados. Se um processo solicita cinco nós (simultaneamente) qual a probabilidade de que:

(a) todos sejam alocados em nós de baixa velocidade,

(b) dois deles sejam alocados em nós de alta velocidade,

(c) pelo menos dois deles sejam alocados em nós de alta velocidade,

(d) sejam todos alocados em nós do mesmo tipo (alta ou baixa velocidade).

(e) Se os processos nós fossem solicitados sequencialmente (cada um após finalizar o processamento do anterior) a probabilidade de alocação em dois nós de alta velocidade seria diferente? (Justifique e recalcule, se for o caso)

Solução:

$$X : \text{número de alocações em nós de alta velocidade}$$
$$X \sim \text{HG}(N = 30, n = 5, r = 10)$$
$$P[X = x] = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{x}\binom{30-10}{5-x}}{\binom{30}{5}}$$

(a) $P[X = 0] = \frac{\binom{10}{0}\binom{30-10}{5-0}}{\binom{30}{5}} = 0,109$

(b) $P[X = 2] = \frac{\binom{10}{2}\binom{30-10}{5-2}}{\binom{30}{5}} = 0,36$

(c) $P[X \geq 2] = P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{30-10}{5-0}}{\binom{30}{5}} - \frac{\binom{10}{1}\binom{30-10}{5-1}}{\binom{30}{5}} = 1 - 0,109 - 0,34 = 0,551$

(d) $P[X = 0] + P[X = 5] = \frac{\binom{10}{0}\binom{30-10}{5-0}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{5}\binom{30-10}{5-5}}{\binom{30}{5}} 0,109 - 0,00177 = 0,111$

(e)

$$X_e \sim \text{B}(n = 5, p = 1/3)$$
$$P[X = 2] = \binom{5}{2}(1/3)^2(1 - 1/3)^{5-2} = 0,329$$

Solução computacional (com o R)

```
> (qA <- dhyper(0, m=10, n=20, k=5))

[1] 0,1088

> (qB <- dhyper(2, m=10, n=20, k=5))

[1] 0,36

> (qC <- phyper(1, m=10, n=20, k=5, low=F))

[1] 0,5512

> (qD <- sum(dhyper(c(0,5), m=10, n=20, k=5)))

[1] 0,1106

> (qE <- dbinom(2, size=5, prob=1/3))

[1] 0,3292
```

---

242. Peças que saem de uma linha de produção são marcadas como defeituosas (D) ou não defeituosas (N). A proporção de peças defeituosas na linha de produção é denotada por p. Peças são inspecionadas e sua condição (D ou N) é registrada. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorrer primeiro.

(a) Descreva o espaço amostral do experimento.

(b) Atribua probabilidades a cada ponto do espaço amostral.

(c) Qual (quais) a(s) suposição(ções) feita(s) no cálculo das probabilidades.

(d) Qual a probabilidade do evento *quatro peças são inspecionadas*.

(e) Qual a probabilidade do evento *quatro peças são inspecionadas sabendo-se que a primeira inspecionada era defeituosa*.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(D,D),(N,D,D),(D,N,D,D),(D,N,D,N),(D,N,N,D),(N,N,D,D),(N,D,N,D),\\ &(D,N,N,N),(N,D,N,N),(N,N,N,D),(N,N,D,N),(N,N,N,N)\}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\{(D,D)\} &: P = p^2\\ \{(N,D,D)\} &: P = (1-p)p^2\\ \{(D,N,D,D)\} &: P = (1-p)p^3\\ \{(D,N,D,N),(D,N,N,D),(N,N,D,D),(N,D,N,D)\} &: P = (1-p)^2p^2\\ \{(D,N,N,N),(N,D,N,N),(N,N,N,D),(N,N,D,N)\} &: P = (1-p)^3p\\ \{(N,N,N,N)\} &: P = (1-p)^4\end{aligned}$$

(c) Indepêndencia, probabilidade p permanece constante.

(d)

$$P[(D,N,D,D),(D,N,D,N),(D,N,N,D),(N,N,D,D),(N,D,N,D),$$
$$(D,N,N,N),(N,D,N,N),(N,N,N,D),(N,N,D,N),(N,N,N,N)] =$$
$$= (1-p)^1 * p^3 + 4*(1-p)^2 * p^2 + 4*(1-p)^3 * p + (1-p)^4$$

ou

$$P[(D,D),(N,D,D)] = 1 - p^2 - (1-p)p^2$$

(e)

$$P[(D,N,D,D),(D,N,D,N),(D,N,N,D),(D,N,N,N)] = (1-p)^1 * p^3 + 2*(1-p)^2 + (1-p)^4$$

---

243. Três equipes, I, II e III, vão ter jogos contra outros adversários em uma determinada rodada de um campeonato. Informações sobre as equipes e resultados anteriores mostram que a probabilidade de I vencer o seu jogo é de 0,7; enquanto que a probabilidade de II vencer seu jogo é de 0,5 e a de III é 0,9. Não há a possibilidade de empate nos jogos. Considere como independentes os resultados das três equipes na rodada e responda às questões a seguir.

(a) O resultado da rodada é um experimento aleatório? Porque?

(b) Qual o espaço amostral?

(c) Qual a probabilidade de alguma das equipes (ao menos uma) perder a sua partida?

(d) Sabendo-se que III venceu a partida, qual a probabilidade de que ambas as demais equipes tenham pedido?

(e) Os eventos *I vence o jogo* e *II vence o jogo* são mutuamente exclusivos? Justifique.

Solução:

Eventos :

I: equipe I vence a partida ; $P[I] = 0,7$; $P[\overline{I}] = 0,3$

II: equipe II vence a partida ; $P[II] = 0,5$; $P[\overline{II}] = 0,5$

III: equipe III vence a partida ; $P[III] = 0,9$; $P[\overline{III}] = 0,1$

(a) Sim, é possível dizer os resultados possíveis mas não o que vai acontecer

(b) $\Omega = \{(I,II,III),(I,II,\overline{III}),(I,\overline{II},III),(\overline{I},II,III),(I,\overline{II},\overline{III}),(\overline{I},II,\overline{III}),(\overline{I},\overline{II},III),(\overline{I},\overline{II},\overline{III})\}$

Resultado	(I,II,III)	$(I,II,\overline{III})$	$(I,\overline{II},III)$	$(\overline{I},II,III)$
Probabilidade	$(0,7)(0,5)(0,9)$	$(0,7)(0,5)(0,1)$	$(0,7)(0,5)(0,9)$	$(0,3)(0,5)(0,9)$
Resultado	$(I,\overline{IIIII})$	$(\overline{I},II,\overline{III})$	$(\overline{I},\overline{II},III)$	$(\overline{I},\overline{II},\overline{III})$
Probabilidade	$(0,7)(0,5)(0,1)$	$(0,3)(0,5)(0,1)$	$(0,3)(0,5)(0,9)$	$(0,3)(0,5)(0,1)$

(c) $P[\text{alguma equipe perder}] = 1 - P[\text{todas ganharem}] = 1 - P[(I,II,III)] = 1 - (0,7)(0,5)(0,9) = 0,685$

(d) $P[(\overline{I},\overline{II},III)|(*,*,III)] = \frac{P[(\overline{I},\overline{II},III)]}{P[(I,II,III),(I,\overline{II},III),(\overline{I},\overline{II},III)]} = \frac{(0,3)(0,5)(0,9)}{(0,7)(0,5)(0,9)+(0,7)(0,5)(0,9)+(0,3)(0,5)(0,9)+(0,3)(0,5)(0,9)} = 0,15$

(e) Não, porque a interseção entre eles não é vazia, correspondendo aos seguintes eventos:

$$\{(I,II,III),(I,II,\overline{III})\}$$

---

244. Uma empresa adquire 30% de sua matéria prima de um primeiro fornecedor, 50% de um segundo e o restante de um terceiro fornecedor. Os lotes de matéria prima são inspecionados e, se considerados não satisfatórios, são enviados de volta. Sabe-se que 2%, 5% e 1% dos lotes são retornados a cada fornecedor, respectivamente. Calcule as probabilidades de um lote tomado ao acaso:

(a) ser do fornecedor II e não retornar;

(b) ser devolvido;

(c) havendo sido rejeitado, ser do fornecedor II

(d) havendo sido rejeitado, ser do fornecedor III

(e) havendo sido aceito, ser do fornecedor I

Solução:

Eventos :

R: lote é devolvido

I: matéria prima vem do primeiro fornecedor $\quad P[I] = 0,3 \;;\; P[R|I] = 0,02$

II: matéria prima vem do primeiro fornecedor $\quad P[II] = 0,5 \;;\; P[R|II] = 0,05$

III: matéria prima vem do primeiro fornecedor $\quad P[III] = 0,2 \;;\; P[R|III] = 0,01$

(a) $P[II \cap \overline{R}] = P[\overline{R}|II] \cdot P[II] = 0,95 \cdot 0,5 = 0,475$

(b) $P[R] = P[I \cap R] + P[II \cap R] + P[III \cap R] = P[R|I] \cdot P[I] + P[R|II] \cdot P[II] + P[R|III] \cdot P[III] = 0.02 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,2 = 0,502$

(c) $P[II|R] = \frac{P[II \cap R]}{P[R]} = \frac{P[R|II]P[II]}{P[R]} = \frac{0,05 \cdot 0,5}{0,502} = 0,0498$

(d) $P[III|R] = \frac{P[III \cap R]}{P[R]} = \frac{P[R|III]P[III]}{P[R]} = \frac{0,01 \cdot 0,2}{0,502} = 0,00398$

(e) $P[I|\overline{R}] = \frac{P[III \cap \overline{R}]}{P[\overline{R}]} = \frac{P[R|III]P[III]}{1 - P[R]} = \frac{0,98 \cdot 0,3}{0,498} = 0,59$

---

245. Três metodologias para predição tentam, de forma independente, prever o comportamento de um sistema de produção. As metodologias fornecem previsões antecipadas que são comparadas com a produção observada e é considerada correta se estiver dentro de uma margem de tolerância pré-especificada. Baseado em estudos anteriores sabe-se que a primeira metodologia tem 72% de chance de acertar a predição, a segundo tem 45% e a terceira tem 65%. Qual a probabilidade de algumas delas fornecer a previsão considerada correta? Explique por que a suposição de independência é necessária para resolver o problema com os dados fornecidos.

Solução:

Eventos:

A : a primeira metodologia fornece previsão correta

B : a segunda fornece previsão correta

C : a terceira fornece previsão correta

Probabilidades informadas:

$$P(A) = 0,72 \quad P(B) = 0,45 \quad P(C) = 0,65$$

$$P(\overline{A}) = 0,72 \quad P(\overline{B}) = 0,45 \quad P(\overline{C}) = 0,65$$

Probabilidade pedida:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \overset{ind}{=} 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - (1 - 0,72)(1 - 0,45)(1 - 0,65) = 0,94$$

---

246. Dois jogadores (A e B) vão jogar um jogo que consiste no lançamento de dois dados. Ambos começam com R$ 10,00. Se a soma dos dados for um número ímpar, A paga R$ 1,00 para B. Se a soma for par, B paga R$ 1,00 para A.

(a) Quais os possíveis valores em dinheiro que os jogadores podem ter após 2 rodadas? A chance é a mesma para todos esses possíveis valores?

(b) Quais os possíveis valores em dinheiro que os jogadores podem ter após 3 rodadas? A chance é a mesma para todos esses possíveis valores?

(c) O jogo é honesto?

Solução:
No lançamento de dos dados exixtem 36 resultados possíveis $((1,1),(1,2),\ldots,(6,6))$ todos com a mesma probabilidade de ocorrência. As possíveis somas e respectivas probabilidades são:

S(soma)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[S = s]$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

O que resulta nas probabilidades de par e ímpar:

S(soma)	par	ímpar
$P[S = s]$	$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$	$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

(a) Denotanto por A e B as vitórias de cada um destes jogadores os possíveis resultados são:

$$\Omega = (A, A), (A, B), (B, A), (B, B)$$

e como $P[A] = P[par] = P[\text{ímpar}] = P[B] = 1/2$, cada um dos possíveis resultados em Ω possui probabilidade $1/2$. Denotando por X_A o saldo de A após duas rodadas (lembrando que $X_B = 20 - X_A$), temos que os possíveis valores e suas probabilidades após duas rodadas são:

x_A	8	10	12
$P[X_A = x_A]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(b) De forma análoga à anterior, os possíveis resultados são:

$$\Omega = (A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (B, A, A), (A, B, B), (B, A, B), (B, B, A), (B, B, B)$$

e cada ponto do espaço amostral possui probabilidade $1/8$. Os possíveis valores de X_A e suas probabilidades após duas rodadas são:

x_A	7	9	11	13
$P[X_A = x_A]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(c) Sim, a probabilidade de *par* é igual a de *mpar* o que resultou em probabilidades iguais para os ganhos possíveis dos jogadores.

As probabilidades poderiam ser ainda obtidas definindo-se:

$$\begin{aligned}
& Y_B \text{número de vitórias de B} \\
& y_B \in \{0,1,2,3\} \\
& Y_B \sim \text{Bin}(n, p = 1/2) \qquad \text{em que } n = 2 \text{ ou } 3\text{é o número de rodadas} \\
P[Y_B = y_B] = & \binom{n}{y_B} p^{y_B} (1-p)^{n-y_B}
\end{aligned}$$

---

247. Considere que um componente de um sistema de reconhecimento é composto de um código de três algarismos que podem ser fornecidos em qualquer ordem. O reconhecimento é positivo se ao menos dois algarismos corretos são fornecidos. Considere que são feitas tentativas aleatórias, sendo que cada tentativa consiste em fornecer três algarismos (de 0 a 9).

(a) Qual a probabilidade do reconhecimento ser positivo em uma tentativa qualquer?

(b) Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em duas tentativas consecutivas?

(c) Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas?

(d) Se são feitas tentativas até conseguir o primeiro reconhecimento positivo, qual a probabilidade de que sejam necessárias mais do que quatro tentativas?

(e) Voce consegue identificar distribuições de probabilidades discretas discutidas em aula os itens anteriores? Qual(ais)?

Solução:
O problema pode ser resolvido diretamente utilizando distribuições de probabilidades "conhecidas", mas vamos aqui detalhar a solução.
Denotando por C: *algarismo correto é fornecido* e $\bar{C}$: *algarismo incorreto é fornecido*, o espaço amostral do experimento definido por uma tentativa é:

$$\Omega = \{(\bar{C},\bar{C},\bar{C}),(\bar{C},\bar{C},C),(\bar{C},C,\bar{C}),(C,\bar{C},\bar{C}),(\bar{C},C,C),(C,\bar{C},C),(C,C,\bar{C}),(C,C,C)\}.$$

As probabilidades associadas a cada ponto podem ser obtidas considerando que $P[C] = 0,1$ e independência. Desta forma $P[(\bar{C},\bar{C},C)] = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1$ e de forma análoga para demais.

(a) E_1 : reconhecimento ser positivo em uma tentativa

$$pR = P[E_1] = P[(C,C,\bar{C})] + P[(C,\bar{C},C)] + P[(\bar{C},C,C)] + P[(C,C,C)] = 3 \cdot (0,1)^2(0,9) + (0,1)^3 = 0,028$$

(b)

$$P[E_1 \cap E_1] \overset{ind}{=} 0,01^2 = 0,000784$$

(c) E_3: reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas

$$P[E_3] = \binom{10}{2}(pR)^2(1-pR)^{10-2} = 0,02811$$

(d) E_4: mais do que quatro tentativas até primeiro reconhecimento positivo.

$$P[E_3] = 1 - P[\bar{E}_3] = 1 - (pR + (1-pR)pR + (1-pR)^2pR + (1-pR)^3pR) = 0,89262$$

(e) Distribuição Binomial para (i) número de algarismos corretos (ii) número de tentativas positivas. Distribuição Geomérica para número de tentativas até o primeiro reconhecimento.

Utilizando distribuições de probabilidades "conhecidas" teríamos as soluções apresentadas a seguir. Definindo as variáveis aleatórias:

X_1 : número de algarísmos corretos em uma tentativa	$X_1 \sim \mathrm{B}(n=3, p=1/10)$
X_2 : número de tentativas corretas em 2 tentativas	$X_2 \sim \mathrm{B}(n=2, p=P[X_1 \geq 2])$
X_3 : número de tentativas corretas em 10 tentativas	$X_3 \sim \mathrm{B}(n=2, p=P[X_1 \geq 2])$
X_4 : número de não reconhecimentos até o primeiro positivo	$X_4 \sim \mathrm{G}(p=P[X_1 \geq 2)$

E os itens anteriores seriam respondidos como:

(a) $P[X_1 \geq 2] = P[X_1 = 2] + P[X_1 = 3] = 0,027 + 0,001 = 0,028$

(b) $P[X_2 = 2] = 0,000784$

(c) $P[X_3 = 2] = 0,02811$

(d) $P[X_4 \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - 0,10738 = 0,89262$

---

248. A cada rodada de um experimento sobre funções cognitivas, o animal recebe um estímulo e depois faz uma escolha entre duas opções, sendo que em uma deles ele recebe um "prêmio" e em outra não. O interesse está no resultados dos "acertos" do animal (ou seja se ele recebe ou não o "prêmio"). Considere três rodadas deste experimento.

(a) Qual o espaço amostral do experimento?

(b) Qual a probabilidade associada a cada ponto do espaço amostral?

(c) Qual(ais) as suposições feitas para calcular estas probabilidades?

(d) Qual a probabilidade do animal receber algum "prêmio" durante as três rodadas?

(e) Defina algum evento simples e algum evento composto e forneça as probabilidades destes eventos.

Solução:
Notação:

$$A : \text{o animal recebe o prêmio} \quad P[A] = 0,50 \quad P[\overline{A}] = 0,50$$

(a) $\Omega = \{(A, A, A), (A, A, \overline{A}), (A, \overline{A}, A), (\overline{A}, A, A), (A, \overline{A}, \overline{A}), (\overline{A}, A, \overline{A}), (\overline{A}, \overline{A}, A), (\overline{A}, \overline{A}, \overline{A})\}$

(b) todos tem a mesma probabilidade, $P[(A, A, A)] = P[(A, A, \overline{A})] = \ldots = P[(\overline{A}, \overline{A}, \overline{A})] = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$

(c) Os resultados das três rodadas são independentes, a probabilidade de prêmio permanece constnate e igual a 1/2 em cada rodada.

(d) $P[\text{algum prêmio}] = 1 - P[\text{nenhum prêmio}] = 1 - P[(\overline{A}, \overline{A}, \overline{A})] = 1 - 1/8 = 7/8$

(e) Há várias possibilidades, o que se seguem são apenas possíveis opções:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_1(\text{evento simples}) : \text{o animal recebe prêmio em todas as tentativas}\\
&\qquad P[\mathrm{E}_1] = \frac{1}{8}\\
&\mathrm{E}_2(\text{evento simples}) : \text{o animal recebe prêmio em duas tentativas}\\
&\qquad P[\mathrm{E}_2] = P[(A, A, \overline{A})] + P[(A, \overline{A}, A)] + P[(\overline{A}, A, A)] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

---

249. Considere um estudo de padrões em texto no qual a ocorrência de algumas "expressões chave" é verificada. Responda cada um dos itens abaixo, identificando a variável aleatória envolvida e a respectiva distribuição de probabilidades.

(a) Sabe-se que uma certa expressão E_1 ocorre em média 1,4 vezes por página. Qual a probabilidade de tal expressão

   i. não ser encontrada em uma determinada página?

   ii. ocorrer ao menos três vezes em duas páginas?

(b) Uma outra expressão E_2 ocorre em 10% das páginas. Qual a probabilidade de:

   i. não ser encontrada em cinco páginas escolhidas ao acaso?

   ii. ser encontrada em ao menos uma de cinco páginas escolhidas ao acaso?

(c) Adota-se a estratégia de inspecionar páginas uma a uma até encontrar a primeira ocorrência da expressão E_2.

   i. Quantas páginas sem a ocorrência de E_2 espera-se encontrar?

   ii. Qual a probabilidade de serem encontradas mais que cinco páginas sem a ocorrência de E_2

(d) Em um texto completo de 80 páginas sabe-se que 30 apresentam algum erro no uso de expressões investigadas e as demais páginas não apresentam nenhum erro.

   i. Sendo escolhidas dez páginas do texto ao acaso, qual a probabilidade de que nenhuma delas contenha erro no uso das expressões?

   ii. Idem anterior para 15 páginas de texto.

(e) As páginas do texto serão inspecionadas até que se encontre a terceira página com algum erro.

   i. Qual a probabilidade que de sejam "varridas" pelo menos dez páginas?

   ii. Quantas páginas espera-se inspecionar antes de encontrar a terceira com erro?

   iii. Qual seria a probabilidade "de algo oposto", de ser necessário varrer mais de cinco páginas até que se encontre a terceira sem erro algum?

Solução:

(a)

$$
\begin{aligned}
&X : \text{número de ocorrências de } E_1 \text{ em uma página}\\
&X \sim \mathrm{P}(\lambda = 1,4)\\
&P[X=x] = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!}
\end{aligned}
$$

i. $P[X=0] = \frac{\mathrm{e}^{-1,4}1,4^0}{0!} = 0,247$

ii.

$$
\begin{aligned}
&X : \text{número de ocorrências de } E_1 \text{ em duas página}\\
&X \sim \mathrm{P}(\lambda = 2,8)\\
&P[X \geq] = 1 - (P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]) = 0,167
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&X : \text{número de páginas em que } E_2 \text{ ocorre dentre cinco páginas}\\
&X \sim \mathrm{B}(n=5, p=0,10)\\
&P[X=x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

i. $P[X=0] = \binom{5}{0}(0,1)^0(1-0,1)^{5-0} = 0,59$

ii. $P[X \geq 1] = 1 - P[X=0] = 0,41$

(c)

$$
\begin{aligned}
&X : \text{número de páginas insecionadas sem encontrar a ocorrência de } E_2\text{, antes de encontrar a primeira com o}\\
&X \sim \mathrm{G}(p=0,10)\\
&P[X=x] = (1-p)^x p
\end{aligned}
$$

i. $E[X] = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0,1}{0,1} = 9$

ii. $P[X>5] = 1 - P[X \leq 5] = 0,531$

(d)

$$
\begin{aligned}
&X : \text{número de página com erros em n páginas de texto verificadas}\\
&X \sim \mathrm{HG}(N=80, K=30, n)\\
&P[X=x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}
\end{aligned}
$$

i. $P[X=0|n=10] = \frac{\binom{30}{0}\binom{80-30}{10-0}}{\binom{80}{10}} = 0,00624$

ii. $P[X=0|n=15] = \frac{\binom{30}{0}\binom{80-30}{15-0}}{\binom{80}{15}} = 0,000339$

(e) As páginas do texto serão inspecionadas até que se encontre a terceira página com algum erro.

$$
\begin{aligned}
&X : \text{número de páginas inspecionadas sem encontrar a ocorrência de } E_2\text{, antes de encontrar a terceira com o}\\
&X \sim \mathrm{BN}(r=3, p=0,10)\\
&P[X=x] = \binom{x+r-1}{x} p^r (1-p)^x
\end{aligned}
$$

i. $P[X+3 \geq 10] = P[X \geq 7] = 0,93$

ii. $E[X] = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{3(1-0,1)}{0,1} = 27$

iii.

$$\begin{aligned}
& X : \text{número de páginas inspecionadas com encontrar a ocorrência de } E_2\text{, antes de encontrar a terceira s} \\
& X \sim \text{BN}(r = 3, p = 0,90) \\
P[X > 5] &= 1 - P[X \leq 4] = 0,000176
\end{aligned}$$

---

250. Considera-se que o número semanal de acidentes em uma certa rodovia segue uma distribuição de Poisson com média de 4,2.

(a) Qual a probabilidade de que em uma determinada semana ocorram menos que três acidentes?
(b) Indique como seria calculada a probabilidade de ocorrência de 10 ou mais acidentes.
(c) Qual a probabilidade de que não ocorra acidentes em um único dia tomado ao acaso?
(d) Qual seria a distribuição de probabilidades do número de acidentes por mês?
(e) Qual a probabilidade de que, em quatro semanas, no máximo em uma delas ocorram três ou mais acidentes?

Solução:

$$\begin{aligned}
& X : \text{número semanal de acidentes} \\
& X \sim \text{P}(\lambda = 4,2) \\
P[X = x] &= \frac{\text{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{\text{e}^{-4,2}4,2^x}{x!}
\end{aligned}$$

(a) $P[X \leq 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 0,21$
(b) $P[X \geq 10] = 1 - P[X \leq 9] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + \ldots + P[X = 9]) = 0,0111$
(c)

$$\begin{aligned}
& X_D : \text{número acidentes em 1 dia} \\
& X_D \sim \text{P}(\lambda = 4,2/7) \\
P[X_D = 0] &= \frac{\text{e}^{-4,2/7}(4,2/7)^0}{0!} = \text{e}^{-4,2/7} = 0,549
\end{aligned}$$

(d) Considerando o mês com 30 dias:

$$\begin{aligned}
& X_M : \text{número acidentes por mês} \\
& X_M \sim \text{P}(\lambda = 30 \cdot 4,2/7 = 18)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
& Y : \text{número semanas, dentre 4 semanas, em que ocorrem 3 ou mais acidentes} \\
& Y \sim \text{B}(n = 4, p = P[X \geq 3] = 0,79 \\
P[Y = y] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-y} = \binom{4}{x} 0,79^x (1 - 0,79)^{4-y} P[Y \leq 1] = P[Y = 0] + P[Y = 1] = 0,0313
\end{aligned}$$

---

251. A função de densidade de probabilidades de uma variável aleatória X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

encontre:

(a) k,

(b) $P[1 \leq X \leq 3]$,

(c) $P[2 \leq X \leq 4]$,

(d) $P[X \geq 3]$,

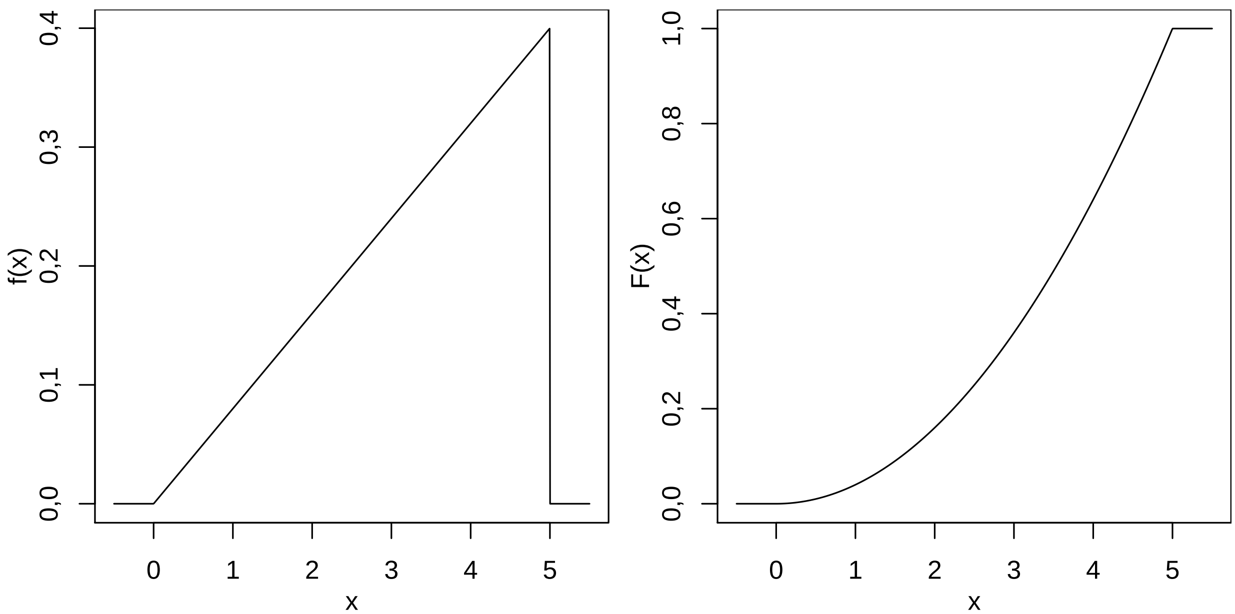
(e) $P[X \leq 3|X > 1]$,

(f) A expressão da função de densidade acumulada $F(x)$ e mostre como as probabilidades dos itens anteriores poderiam ser calculadas em função de $F(x)$,

(g) a média da variável X,

(h) os quartis (incluindo a mediana).

Solução:



(a)

$$Kx \geq 0, 0 \leq x \leq 5 \Rightarrow K > 0$$
$$\int_0^5 kx\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow k\frac{5^2 - 0^2}{2} = 1 \Rightarrow K = 2/25 = 0,08$$

(b) $P[1 \leq X \leq 3] = \int_1^3 0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{3^2-1^2}{2} = 0,32$

(c) $P[2 \leq X \leq 4] = \int_2^4 0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{4^2-2^2}{2} = 0,48$

(d) $P[X \geq 3] = \int_3^5 0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{5^2-3^2}{2} = 0,64$

(e) $P[X \leq 3|X > 1] = \frac{P[1<X\leq 3]}{P[X>1]} = \frac{\int_1^3 0,08x\mathrm{d}x}{\int_1^5 0,08x\mathrm{d}x} = \frac{0,08\frac{3^2-1^2}{2}}{0,08\frac{5^2-1^2}{2}} = 0,333$

(f)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{x^2-0^2}{2} = 0,04x^2 & 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

$$P[1 \leq X \leq 3] = F(3) - F(1) = 0,04(3^2 - 1^2) = 0,32$$
$$P[2 \leq X \leq 4] = F(4) - F(2) = 0,04(4^2 - 2^2) = 0,48$$
$$P[X \geq 3] = 1 - F(3) = 1 - 0,04(3^2) = 0,64$$
$$P[X \leq 3|X > 1] = \frac{F(3) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{0,04(3^2 - 1^2)}{1 - 0,04(3^2)} = 0,333$$

(g) $E[X] = \int xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^5 x0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{5^3-0^3}{3} = 10/3 = 3,33$

(h)

$$M_d[X] : \int_0^{M_d} f(x)\mathrm{d} = 0,5 \Rightarrow M_d[X] = F^{-1}(0,5) = \sqrt{0,5/0,04} = 3,54$$
$$Q_1[X] : \int_0^{Q_1} f(x)\mathrm{d} = 0,25 \Rightarrow Q_1[x] = F^{-1}(0,25) = \sqrt{0,25/0,04} = 2,5$$
$$Q_3[X] : \int_0^{Q_3} f(x)\mathrm{d} = 0,75 \Rightarrow Q_3[x] = F^{-1}(0,75) = \sqrt{0,75/0,04} = 4,33$$

---

252. Suponha que em uma determinada sexta-feira voce está interessado em saber se vai ou não ocorrer chuva em uma região na manhã do próximo domingo para confirmar ou desmarcar uma determinada atividade. Voce decide então consultar três *sites* de previsão meteorológica. Baseado em previsões anteriores sabe-se que, para este horizonte de previsão, o primeiro *site* acerta a previsão 62% de suas previsões, a segundo tem uma taxa de acerto de 85% e o terceiro de 54%.

(a) Qual a probabilidade de algum dos *sites* fornecer a previsão correta?

(b) Qual a suposição necessária para resolver o problema com os dados fornecidos? Comente se e/ou quando tal suposição é adequada.

(c) Um amigo seu sugere o seguinte: "se dois ou mais *sites* indicarem que não vai chover a atividade deve ser mantida". O que voce acha desta sugestão?

(d) Considere agora somente o segundo *site*. Verificando com mais detalhes as previsões anteriores feitas por este *site* voce nota ainda que a taxa de acerto é de 60% para os dias que de fato chovem e de 93% para os dias que não chove. Obtenha a probabilidade de chuva na região.

Solução:

Eventos:

S_1 : o primeira *site* acerta a previsão

S_2 : o segundo *site* acerta a previsão

S_3 : o terceiro *site* acerta a previsão

Probabilidades informadas:

$$P(S_1) = 0,62 \quad P(S_2) = 0,85 \quad P(S_3) = 0,54$$
$$P(\overline{S}_1) = 0,38 \quad P(\overline{S}_2) = 0,15 \quad P(\overline{S}_3) = 0,46$$

(a) $P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = 1 - P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3) \stackrel{ind}{=} 1 - P(\overline{S}_1) \cdot P(\overline{S}_2) \cdot P(\overline{S}_3) = 1 - (1 - 0,62)(1 - 0,85)(1 - 0,54) = 0,974$

(b) Independência. A resposta deve discutir se/quando é adequado considerar previsões de diferentes *sites* como independentes.

(c) O critério proposto não leva em consideração que os *sites* possuem probabilidades de acerto diferentes.

(d) Eventos e probabilidades:

$$C : \text{chuva} \quad P[S_2|C] = 0,60 \quad P[S_2|\overline{C}] = 0,93$$

Probabilidade pedida: $P[C]$

$$P[S_2] = P[S_2 \cap C] + P[S_2 \cap \overline{C}]$$
$$P[S_2] = P[S_2|C] \cdot P[C] + P[S_2|\overline{C}] \cdot P[\overline{C}]$$
$$P[S_2] = P[S_2|C] \cdot P[C] + P[S_2|\overline{C}] \cdot (1 - P[C])$$
$$0,85 = 0,60 \cdot P[C] + 0,93 \cdot (1 - P[C])$$
$$P[E] = \frac{0,95 - 0,85}{0,93 - 0,60} = 0,242$$

253. Considere um jogo com um baralho (52 cartas) no qual em uma primeira rodada retira-se duas cartas e em uma segunda rodada retira-se uma carta. O interesse é se as cartas são figuras (valete, dama ou rei) de qualquer naipe. Temos interesse em:

- obter o espaço amostral;
- obter a probabilidade de cada ponto amostral;
- obter a distribuição de probabilidades do número de figuras obtidas nas três cartas.

Deve-se considerar duas situações, com e sem reposição das cartas entre a primeira e a segunda rodada.

Solução:
Notação:

$$F : \text{a carta é uma figura}$$
$$N = \overline{F} : \text{a carta não é uma figura}$$

- O espaço amostral para as duas situações (com e sem reposição) é o mesmo.

$$\Omega = \{(FF,F);(FF,N);(FN,F);(NF,F);(FN,N);(NF,N);(NN,F);(NN,N)\}$$

- Já as probabilidades são afetadas por repor ou não as cartas

Ponto amostral	(FF,F)	(FF,N)	(FN,F)	(NF,F)	(FN,N)	(NF,N)	(NN,F)	(NN,N)
Com reposição	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{40}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{40}{52}$	$\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{40}{52}$	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{40}{52}$
Sem reposição	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{10}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{40}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{11}{50}$	$\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{11}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{39}{50}$	$\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{39}{50}$	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{12}{50}$	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{38}{50}$

-

$$X : \text{número de figuras obtidas nas três cartas}$$
$$x \in \{0,1,2,3\}$$

Com reposição

x	0	1	2	3
P[X=x]	P[(NN,N)]	P[(FN,N)] + P[(NF,N)] + P[(NN,F)]	P[(FF,N)] + P[(FN,F)] + P[(NF,F)]	P[(FFF)]
	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{40}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{40}{52} + \frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{40}{52} + \frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{40}{52} + \frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{12}{52} + \frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{12}{52}$
	0,4525	0,4142	0,1218	0,01149

Sem reposição

x	0	1	2	3
P[X=x]	P[(NN,N)]	P[(FN,N)] + P[(NF,N)] + P[(NN,F)]	P[(FF,N)] + P[(FN,F)] + P[(NF,F)]	P[(FFF)]
	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{38}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{39}{50} + \frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{39}{50} + \frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{12}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{40}{50} + \frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{11}{50} + \frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{11}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{10}{50}$
	0,4471	0,4235	0,1195	0,009955

OBS: no caso sem reposição a v.a. X segue uma distribuição hipergeométrica e as probabilidades podem ser obtidas pela função de probabilidade desta distribuição.

$$X \sim \text{HG}(N = 52, n = 3, k = 12)$$
$$P[X = x] \sim \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$
$$P[X = 0] = \frac{\binom{12}{0}\binom{52-12}{3-0}}{\binom{52}{3}} = 0,4471$$
$$P[X = 1] = \frac{\binom{12}{1}\binom{52-12}{3-1}}{\binom{52}{3}} = 0,4235$$
$$P[X = 2] = \frac{\binom{12}{2}\binom{52-12}{3-2}}{\binom{52}{3}} = 0,1195$$
$$P[X = 3] = \frac{\binom{12}{3}\binom{52-12}{3-3}}{\binom{52}{3}} = 0,009955$$

---

254. Considere que indivíduos vão fazer um teste online no qual questões serão apresentadas sequencialmente ao candidato. Calcule a probabilidade pedidas nos contextos de cada um dos itens a seguir. Procure identificar: a variável aleatória em questão e sua distribuição de probabilidades.

(a) Suponha que oito (8) questões são retiradas com reposição (ou seja uma mesma questão pode ser retirada mais de uma vez) de um *banco* de 40 questões dos quais o candidato sabe responder a 25 delas. Qual a probabilidade de acertar três ou mais questões?

(b) Idem anterior porém supondo agora que as questões não podem se repetir.

(c) Supondo novamente reposição das questões, o candidato responde até errar pela primeira vez. Qual a probabilidade de acertar pelo menos três questões?

(d) Idem anterior supondo que responde até errar pela terceira vez.

Solução:

(a)

$$X : \text{número de questões certas entre oito questões selecionadas ao acaso (com repetição)}$$
$$X \sim \text{B}(n = 8, p = 25/40)$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots 8\}$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0,964$$

(b)

$$X : \text{número de questões certas entre oito questões selecionadas ao acaso (sem repetição)}$$
$$X \sim \text{HG}(N = 40, K = 25, n = 8)$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots 8\}$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0,9783$$

(c)

$$X : \text{número de acertos até o primeiro erro}$$
$$X \sim \text{G}(p = 15/50)$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0,2441$$

(d)

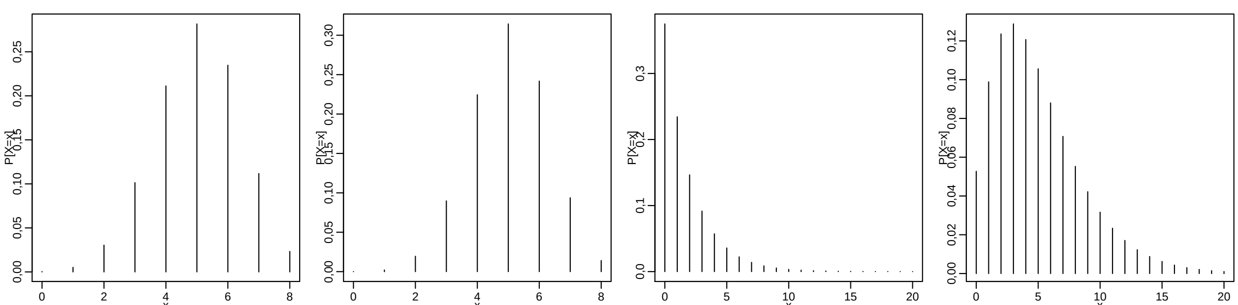
$$X : \text{número de acertos até o terceiro erro}$$
$$X \sim \text{BN}(k=3, p=15/40)$$
$$x \in \{0,1,2,\ldots\}$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X=0] - P[X=1] - P[X=2] = 0,7248$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> (q1 <- pbinom(2, size=8, prob=25/40, lower=FALSE))

[1] 0,964

> (q2 <- phyper(2, m=25, n=15, k=8, lower=FALSE))

[1] 0,9783

> (q3 <- pgeom(2, prob=15/40, lower=FALSE))

[1] 0,2441

> (q4 <- pnbinom(2, size=3, prob=15/40, lower=FALSE))

[1] 0,7248
```

Gráficos das distribuições de probabilidades.

```
> par(mfrow=c(1,4))
> par(mar=c(3,3,0.2, 0.2), mgp=c(1.2, 0.6, 0))
> plot(0:8, dbinom(0:8, size=8, prob=25/40), xlab="x", ylab="P[X=x]", type="h")
> plot(0:8, dhyper(0:8, m=25, n=15, k=8), xlab="x", ylab="P[X=x]", type="h")
> plot(0:20, dgeom(0:20, prob=15/40), xlab="x", ylab="P[X=x]", type="h")
> plot(0:20, dnbinom(0:20, size=3, prob=15/40), xlab="x", ylab="P[X=x]", type="h")
```



255. Um vendedor consegue vender, em média, 0,5 unidades de um produto por dia. Calcule as probabilidades de:

(a) vender alguma unidade em um particular dia;

(b) não efetuar nenhuma venda em uma semana (considere a semana tendo cinco dias úteis);

(c) em uma semana (cinco dias úteis) efetuar vendas em ao menos três dias.

Solução:

(a)

$$
\begin{aligned}
&X_1 : \text{número de vendas em um dia}\\
&x_1 \in \{0, 1, 2, \ldots\}\\
&X_1 \sim \mathrm{P}(\lambda = 0,5)\\
P[X_1 = 0] &= \frac{\mathrm{e}^{0,5} 0,5^0}{0!} = 0,6065\\
P[X_1 \geq 1] &= 1 - P[X_1 = 0] = 0,3935
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&X_2 : \text{número de vendas em uma semana (cinco dias)}\\
&x_2 \in \{0, 1, 2, \ldots\}\\
&X_2 \sim \mathrm{P}(\lambda = 2,5)\\
P[X_2 = 0] &= \frac{\mathrm{e}^{2,5} 2,5^0}{0!} = 0,08208
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&X_3 : \text{número de dias com vendas em uma semana (cinco dias)}\\
&x_3 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\\
&X_3 \sim \mathrm{B}(n = 5, p = P[X_1 = 0]\\
P[X_3 \geq 3] &= P[X_3 = 3] + P[X_3 = 4] + P[X_3 = 5] = 0,6938
\end{aligned}
$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> (q1 <- ppois(0, lambda=0.5, lower=FALSE))

[1] 0,3935

> (q2 <- ppois(0, lambda=0.5*5))

[1] 0,08208

> (q2a <- (ppois(0, lambda=0.5)^5))

[1] 0,08208

> (q3 <- pbinom(2, size=5, prob=dpois(0, lambda=0.5), lower=FALSE))

[1] 0,6938
```

---

256. Suponha que os escores obtidos por estudantes em um teste *online* possam ser bem modelados por uma distribuição normal com média $\mu = 120$ e variância $\sigma^2 = 12^2$.

(a) Considera-se como estudante de alta performance os que atingem um escore a partir de 135. Qual o percentual esperado de estudantes de alta performance entre todos os que fazem o teste?

(b) Estudantes com escore abaixo de 100 devem se reinscrever e só podem voltar a fazer o teste após seis meses e os com escore entre 100 e 125 são convidados a refazer o teste após um mês. Quais as proporções de estudantes que deverá se reinscrever e que deverá refazer o teste após um mês?

(c) Define-se como *quartis* os escores abaixo dos quais espera-se encontrar 25, 50 e 75% dos estudantes. Quais os valores dos escores que definem os quartis?

(d) Quanto deveria ser o valor μ da média dos escores para que ao menos 30% dos escores fossem de alta performance?

(e) Há um outro teste que possui média $\mu = 125$ e variância $\sigma^2 = 6^2$. Em qual deles espera-se a maior proporção de estudantes de alta performance?

Solução:

$$X \sim \mathrm{N}(120, 12^2)$$

(a) $P[X > 135] = P[Z > \frac{135-120}{12}] = P[Z > 1,25] = 0,1056$

(b)

$$P[X < 100] = P[Z < \frac{100-120}{12}] = P[Z < -1,6667] = 0,0478$$
$$P[100 < X < 125] = P[\frac{100-120}{12} < Z < \frac{125-120}{12}] = P[-1,67 < Z < 0,417]$$

(c)

$$P[X < Q_1] = 0,25$$
$$z_1 = -0,674 = \frac{Q_1 - 120}{12}$$
$$Q_1 = 120 - 8,09 = 112$$

Usando o fato de que a distribuição é simétrica temos ainda que:

$$Q_2 = \mu = 120$$
$$Q_3 = 120 + 8,09 = 128$$

(d) $z = \frac{135-\mu}{15} = 0,524 \longrightarrow \mu = 128,7$

(e)

$$X_1 \sim \mathrm{N}(120, 12^2)$$
$$X_2 \sim \mathrm{N}(125, 6^2)$$
$$P[X_1 \geq 135] = P[Z_1 > \frac{135-120}{12}] = P[Z_1 > 1,25] = 0,106$$
$$P[X_2 \geq 135] = P[Z_2 > \frac{135-120}{12}] = P[Z_2 > 1,67] = 0,0478$$

Comandos em R para soluções:

```
> (qa <- pnorm(135, mean=120, sd=12, lower=FALSE))

[1] 0,1056

> (qb <- diff(pnorm(c(-Inf, 100, 125), mean=120, sd=12)))

[1] 0,04779 0,61375

> (qc <- qnorm(c(.25, .50, .75), mean=120, sd=12))

[1] 111,9 120,0 128,1

> (qd <- 135 - 12 * round(qnorm(0.70), dig=3))

[1] 128,7

> (qez <- (135 - c(120, 125))/c(12, 6))

[1] 1,250 1,667

> (qep <- pnorm(135, m=c(120, 125), sd=c(12, 6), lower=FALSE))

[1] 0,10565 0,04779
```

---

257. Declare as condições sob as quais a distribuição de Poisson pode ser usada para aproximar a distribuição Binomial. Se $X \sim \mathrm{B}(200; 0,01)$ calcule $P[X \leq 2]$ (a) usando a distribuição Binomial, (b) usando a aproximação Poisson para a Binomial.

Solução:

$$P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]$$

Pela Binomial:

$$P[X_B \leq 2] = \binom{200}{0}(0,01)^0(1-0.01)^{200-0} + \binom{200}{1}(0,01)^1(1-0.01)^{200-1} + \binom{200}{2}(0,01)^2(1-0.01)^{20}$$

$$= 0,134 + 0,271 + 0,272 = 0,272$$

Pela aproximação Poisson: $X \approx \mathrm{P}(\lambda = n \cdot p = 200 \cdot 0,01 = 2)$

$$P[X_P \leq 2] = \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!} = e^{-2}[1 + 2 + 4/2] = 0,677$$

---

258. Sabe-se que o número médio de bactérias por mililitro de um líquido é 4. Supondo que o número de bactérias segue uma distribuição de Poisson, encontre a probabilidade de que uma porção qualquer de 1 ml do líquido contenha

(a) nenhuma bactéria,

(b) quatro bactérias,

(c) menos que 3 bactérias.

Encontre ainda a probabilidade de que

(d) em 3 ml de líquido se encontrem menos que 2 bactérias,

(e) em 0,5 ml do líquido se encontre mais que duas bactérias.

Solução:

---

259. Pacientes que sofreram AVC com déficits afásicos foram submetidos a um teste psicométrico com uma bateria de tarefas simples. O número de erros cometidos por 123 pacientes é listado na tabela a seguir. Calcule a média e variância do número de erros por paciente e comente os valores obtidos. Ajuste uma distribuição de Poisson (calculando o número de pacientes que comete cada número de erros) e comente sobre o quão bem a distribuição se ajusta aos dados.

Número de erros	Número de pacientes
0	5
1	30
2	56
3	15
4	10
5 ou mais	7

Solução:

---

260. Em uma grande cidade, uma pessoa a cada 80, em média, tem sangue do tipo X. (i) Se 200 doadores de sangue são tomados ao acaso, encontre uma aproximação à probabilidade de que ao menos cinco destes possuam o sangue do tipo X. (ii) Quantos doadores devem ser tomados ao acaso de forma que a probabilidade de que no grupo haja ao menos um doador do tipo X com probabilidade de pelo menos 0,90.

Solução:

---

261. (adaptado de Bussab & Morettin) Três jogadores, A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.

   (a) A sequência de jogos que determina o resultado final do torneio pode ser considerada um experimento aleatório? Justifique.

   (b) Quais são os possíveis resultados?

   (c) O torneio é "justo" em relação às chances de vitória dos jogadores mediante a regra proposta?

   Considere agora que, sabendo-se dos restrospectos de resultados dos jogadores e suas classificações em *rankings* tem-se que A vence B com probabilidade de 0,72, vence C com probabilidade de 0,65 e B vence C com probabilidade de 0,38.

   (d) Qual a probabilidade de cada jogador ganhar o torneio?

Solução:

1o Jogo	Vencedor	2o Jogo	Vencedor	3o Jogo	Vencedor	4o Jogo	Vencedor	Campeão	Sequência*	Prob**
A x B	A	A x C	A	-	-	-	-	A	(AA)	1/4
	A	A x C	C	B x C	B	A x B	A	A	(ACBA)	1/16
	A	A x C	C	B x C	B	A x B	B	B	(ACBB)	1/16
	A	A x C	C	B x C	C	-	-	C	(ACC)	1/8
	B	B x C	B	-	-	-	-	B	(BB)	1/4
	B	B x C	C	A x C	A	A x B	A	A	(BCAA)	1/16
	B	B x C	C	A x C	C	A x B	B	B	(BCAB)	1/16
	B	B x C	C	A x C	C	-	-	C	(BCC)	1/8

*Sequência : sequência de vencedores dos jogos torneio

** Probabilidade supondo igualdade entre os competidores em cada jogo

(a) Sim. (justificativas serão analisadas)

(b)

$$\Omega = \{(AA), (ACBA), (ACBB), (ACC), (BB), (BCAA), (BCAB), (ACC)\}$$

(c) O jogo não é honesto pois sob a hipótese de igualdade de condições em cada jogo os jogadores possuem diferentes chances de vencer o torneio.

Vencedor	A	B	C
Sequências	{(AA), (ACBA), (BCAA)}	{(ACBB),(BB),(BCAB)}	{(BCC),(ACC)}
Probabilidade	(1/4)+(1/16)+(1/16)=3/8	(1/16)+(1/4)+(1/16)=3/8	(1/8)+(1/8) = 2/8

(d)

Campeão	Sequência	Probabilidade
A	(AA)	$0,72 \cdot 0,65 = 0,468$
A	(ACBA)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,38 \cdot 0,72 = 0,0689$
B	(ACBB)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,38 \cdot 0,28 = 0,0268$
B	(ACC)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,62 = 0,1562$
B	(BB)	$0,28 \cdot 0,38 = 0,1064$
A	(BCAA)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,65 \cdot 0,72 = 0,0812$
B	(BCAB)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,65 \cdot 0,28 = 0,0316$
C	(BCC)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,35 = 0,0608$

Vencedor	A	B	C
Sequências	{(AA), (ACBA), (BCAA)}	{(ACBB),(BB),(BCAB)}	{(BCC),(ACC)}
Probabilidade	0,6182	0,1648	0,217

---

262. Uma coleção de 100 programas de computador foi examinada para detectar erros de *"sintaxe"*, *"input/output"* e de *"outro tipo"* diferente dos anteriores. Desses 100 programas, 20 tinham erros de "sintaxe", 10 tinham erros de "input/output" e 5 tinham erros de "outro tipo", 6 tinham erros de "sintaxe" e de "input/output", 3 tinham erros de "sintaxe" e de "outro tipo", 3 tinham erros de "input/output" e de "outro tipo" e 2 tinham os três tipos de erros considerados. Um programa é seleccionado ao acaso desta coleção. Determine a probabilidade de que o programa seleccionado tenha:

(a) Exclusivamente erros de "sintaxe".

(b) Pelo menos um dos três tipos de erros

Solução:
Notação:

$$S : \text{erro de sintaxe}$$
$$I : \text{erro de input/output}$$
$$O : \text{erro de outro tipo}$$

Dados:

$$P[S] = 0,20 \quad ; \quad P[I] = 0,10 \quad ; \quad P[O] = 0,05$$
$$P[S \cap I] = 0,06 \quad ; \quad P[S \cap O] = 0,03 \quad ; \quad P[I \cap O] = 0,03$$
$$P[S \cap I \cap O] = 0,02$$

(a) $P[S] - P[(S \cap I) \cup (S \cap O)] = P[S] - \{P[(S \cap I)] + (S \cap O)] - P[S \cap I \cap O]\} =$
$= 0,20 - 0,06 - 0,03 + 0,02 = 0,13$

(b) $P[S \cup I \cup O] = P[S] + P[I] + P[O] - P[S \cap I] - P[S \cap O] - P[I \cap O] + P[S \cap I \cap O] =$
$= 0,20 + 0,10 + 0,05 - 0,06 - 0,03 - 0,03 + 0,02 = 0,25$

---

263. Suponha que 5% de uma população sofre de hipertensão e que, de entre estes, 75% ingerem bebidas alcoólicas. De entre os que não são hipertensos 50% ingerem bebidas alcoólicas. Suponha que um indivíduo é escolhido ao acaso da população.

(a) Calcule a probabilidade de o indivíduo escolhido ingerir bebidas alcoólicas.

(b) Sabendo que o indivíduo escolhido ingere bebidas alcoólicas, calcule a probabilidade de sofrer de hipertensão.

Solução:
Notação:

$$H : \text{indivíduo é hipertenso} \quad \overline{H} : \text{indivíduo não é hipertenso}$$
$$A : \text{indivíduo ingere bebida alcólica} \quad \overline{H} : \text{indivíduo não ingere bebida alcólica}$$

Dados:

$$P[H] = 0,05 \quad , \quad P[A|H] = 0,75 \quad , \quad P[A|\overline{H}] = 0,50$$

Portanto

$$P[\overline{H}] = 1 - P[H] = 0,95$$

(a) $P[A] = P[A \cap H] + P[A \cap \overline{H}] = P[A|H] \cdot P[H] + P[A|\overline{H}] \cdot P[\overline{H}] = 0,75 \cdot 0,05 + 0,50 * 0,95 = 0,5125$

(b) $P[H|A] = \frac{P[H\cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|H]\cdot[H]}{P[A]} = \frac{0{,}75\cdot 0.05}{0{,}5125} = 0,0732$

Observação: o problema poderia ser organizado e resolvido utilizando uma tabela 2×2:

	H	$\overline{H}$	
A	$P[A\cap H] = 0,0375$	$P[A\cap \overline{H}] = 0,475$	$P[A] = 0,5125$
$\overline{A}$	$P[\overline{A}\cap H] = 0,0125$	$P[\overline{A}\cap \overline{H}] = 0,475$	$P[\overline{A}] = 0,4875$
	$P[H] = 0,05$	$P[\overline{H}] = 0,95$	1

---

264. Registos efetuados levaram a concluir que os motoristas que circulam em determinada estrada podem ter transgressões classificadas em dois tipos ditas do tipo I ou do tipo II, não se notando nenhum caso em que o motorista cometa ambas as transgressões. Por cada 500 motoristas multados há 100 motoristas multados por transgressões do tipo I. Sabendo que 10% dos motoristas que cometem transgressões do tipo I são multados; que 1% cometem transgressões do tipo I e que 2% cometem transgressões do tipo II, calcule a probabilidade de que um motorista que circule nessa estrada e cometa uma transgressão do tipo II seja multado.

Solução:
Notação:

I : transgressão do tipo I ; II : transgressão do tipo II ; 0 : sem transgressão
M : motorista recebe multa ; $\overline{M}$: motorista não recebe multa

Dados:

$$P[I\cap II] = 0$$
$$P[I|M] = 100/500 = 0,20$$
$$P[M|I] = 0,10$$
$$P[I] = 0,01 \text{ e } P[II] = 0,02$$

Queremos calcular $P[M|II]$.
A partir dos dados temos que:

$$P[II|M] = 1 - P[1|M] = 0,80$$
$$P[M|I]\cdot P[I] = 0,10\cdot 0,01 = 0,001$$

Podemos obter $P[M]$:

$$P[I|M] = 0,20$$
$$\frac{P[M\cap I]}{P[M]} = 0,20$$
$$\frac{0,001}{P[M]} = 0,20$$
$$P[M] = 0,005$$

Como $P[M] = P[M\cap I] + P[M\cap II]$ temos que

$$P[M\cap II] = 0,004$$
$$P[M|II]\cdot P[II] = 0,004$$
$$P[M|II] = 0,004/0,02 = 0,20$$

Alternativamente, o problema pode ser esquamatizado na tabela:

	0	I	II	
M	$P[0\cap M] = 0$	$P[I\cap M] = 0,001$	$P[II\cap M] = 0,004$	0,005
$\overline{M}$	$P[0\cap \overline{M}] = 0,97$	$P[I\cap \overline{M}] = 0,009$	$P[II\cap \overline{M}] = 0,016$	0,995
	$P[0] = 0,97$	$P[I] = 0,01$	$P[II] = 0,02$	1

265. Um estudante vai fazer um teste no qual cada questão tem cinco alternativas das quais apenas uma é correta. Nos dois contextos a seguir defina a variável aleatória, seus possíveis valores, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade pedida, supondo-se acerto ao acaso (ou seja, o estudante "chuta" todas as questões).

(a) **Contexto 1:** O estudante vai fazer cinco questões e deseja-se a probabilidade de acertar três ou mais questões.

(b) **Contexto 2:** As questões são apresentadas sequencialmente e o teste se encerra quando o estudante erra alguma questão. Qual a probabilidade do estudante acertar três ou mais questões.

Itens extras discutidos em sala:

(c) **Contexto 3:** Considere o mesmo que no **Contexto 2:**, só que encerrando quando erra a *terceira* questão.

(d) **Contexto 4:** Considere que há um banco de 30 questões das quais o estudante sabe 10. Selecionam-se cinco questões e deseja-se saber a probabilidade de mais que três acertos.

Solução:

(a) **Contexto 1:**

$$\begin{aligned}
X &: \text{número de acertos em cinco questões} \\
x &\in \{0,1,2,3,4,5\} \\
X &\sim \mathrm{B}(n=4, p=1/5) \\
P[X=x] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
p &: \text{probabilidade de acertar cada questão ("sucesso")} \\
P[X \geq 3] &= P[X=3] + P[X=4] + P[X=5] = \\
&= \binom{5}{3} 0,2^3 (1-0,2)^{5-3} + \binom{5}{4} 0,2^4 (1-0,2)^{5-4} + \binom{5}{5} 0,2^5 (1-0,2)^{5-5} = 0,0579
\end{aligned}$$

(b) **Contexto 2:**

$$\begin{aligned}
X &: \text{número de acertos até o primeiro erro} \\
x &\in \{0,1,2,3,\ldots\} \\
X &\sim \mathrm{G}(n=4, p=4/5) \\
P[X=x] &= (1-p)^x p \\
p &: \text{probabilidade de errar a questão ("sucesso")} \\
P[X \geq 3] &= 1 - (P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]) = 1 - (0,2^0 0,8 + 0,2^1 0,8 + 0,2^2 0,8) = 0,008
\end{aligned}$$

(c) **Contexto 3:**

$$\begin{aligned}
X &: \text{número de acertos até o terceiro erro} \\
x &\in \{0,1,2,3,\ldots\} \\
X &\sim \mathrm{BN}(k=3, p=4/5) \\
P[X=x] &= \binom{x+k-1}{x} (1-p)^x p \\
p &: \text{probabilidade de errar a questão ("sucesso")} \\
P[X \geq 3] &= 1 - (P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]) = \\
&= 1 - (\binom{2}{0} 0,2^0 0,8 + \binom{3}{1} 0,2^1 0,8 + \binom{4}{2} 0,2^2 0,8) = 0,0579
\end{aligned}$$

(d) **Contexto 4:**

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de acertos em cinco questões sorteadas} \\
x &\in \{0,1,2,3,4,5\} \\
X &\sim \text{HG}(N=30, K=10, n=5) \\
P[X=x] &= \frac{\binom{k}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
P[X \geq 3] &= P[X=3] + P[X=4] + P[X=5] = \\
&= \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{2}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{20}{1}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{5}\binom{20}{5}}{\binom{30}{0}} = 0,1912
\end{aligned}
$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> pa <- pbinom(2, size=5, prob=1/5, lower=FALSE)
> pb <- pgeom(2, prob=4/5, lower=FALSE)
> pc <- pnbinom(2, size=3, prob=4/5, lower=FALSE)
> pd <- phyper(2, m=10, n=20, k=5, lower=FALSE)
```

---

266. Considere que serão feitas inspeções em veículos em uma determinada área para identificar e orientar a correção de irregularidades. Supõe-se que os veículos inspecionados são escolhidos ao acaso. Considere os diferentes cenários descritos em cada um dos itens a seguir, identifique a variável aleatória em questão, seus possíveis valores, sua distribuição de probabilidades e responda à questão formulada.

(a) Em um lote de 50 veículos sabe-se que 8 deles possuem alguma irregularidade. Serão inspecionados sete veículos. Qual a probabilidade de encontrar mais de um com alguma irregularidade?

(b) Sabendo que 15% dos veículos na área apresentam irregularidade, serão inspecionados veículos até que seja encontrado o segundo com irregularidade. Qual a probabilidade de que sejam feitas no máximo cinco inspeções?

(c) A partir de experiências anteriores sabe-se que são encontrados, em média, 1,8 carros irregulares por hora de inspeção. Qual a probabilidade de que em uma hora não seja encontrado nenhum carro irregular? E qual a probabilidade de que sejam encontrados exatamente cinco irregulares em duas horas de inspeção?

(d) A partir de um certo momento decide-se que a inspeção vai terminar quando for encontrado o próximo veículo irregular. Qual a probabilidade de que a partir deste momento sejam ainda inspecionados três ou mais carros? (supondo ainda que 15% dos carros da região são irregulares)

(e) Um inspetor vai inspecionar sete carros. Qual a probabilidade de que encontre mais que um irregular? (supondo ainda que 15% dos carros da região são irregulares)

Solução:

(a) **Contexto 1:**

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número veículos com irregularidade (dentre os sete selecionados)} \\
x &\in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \\
X &\sim \text{HG}(N=200, K=30, n=7) \\
P[X=x] &= \frac{\binom{k}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
P[X > 1] &= P[X=2] + P[X=3] + \ldots P[X=7] = 1 - \{P[X=0] + P[X=1]\} \\
&= 1 - \left\{ \frac{\binom{8}{0}\binom{42}{7}}{\binom{50}{7}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{42}{6}}{\binom{50}{7}} \right\} = 0,3098
\end{aligned}
$$

(b) **Contexto 2:**

$$\begin{aligned}
&Y: \text{número de inspeções até o segundo irregular}\\
&y \in \{2,3,4,5,\dots\}\\
&X: \text{número de regulares até o segundo irregular}\\
&x \in \{0,1,2,3,\dots\}\\
&X \sim \mathrm{BN}(k=2, p=0,15)\\
P[X=x] = &\binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x\\
&p: \text{probabilidade de encontrar um veículo irregular ("sucesso")}
\end{aligned}$$

$$P[Y \le 5] = P[X \le 3] = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] + P[X=3] =$$

$$= \binom{1}{0} 0,15^2 0,85^0 + \binom{2}{1} 0,15^2 0,85^1 + \binom{3}{2} 0,15^2 0,85^2 + \binom{4}{1} 0,15^2 0,85^3 = 0,7765$$

(c) **Contexto 3:**

$$\begin{aligned}
&X_1: \text{número de irregulares por hora}\\
&x_1 \in \{0,1,2,3,\dots\}\\
&X_1 \sim \mathrm{P}(\lambda = 1,8)\\
P[X=x] = &\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\\
P[X_1=0] = &\frac{e^{-1,8} 1,8^0}{0!} = 0,1653\\
&X_2: \text{número de irregulares por período de duas (2) horas}\\
&x_2 \in \{0,1,2,3,\dots\}\\
&X_2 \sim \mathrm{P}(\lambda = 2 \cdot 1,8 = 3,6)\\
P[X_2=5] = &\frac{e^{-3,6} 3,6^5}{5!} = 0,1377
\end{aligned}$$

(d) **Contexto 4:**

$$\begin{aligned}
&Y: \text{número de inspeções até o próximo irregular}\\
&y \in \{1,2,3,4,\dots\}\\
&X: \text{número de regulares até o próximo irregular}\\
&x \in \{0,1,2,3,\dots\}\\
&X \sim \mathrm{G}(p = 0,15)\\
P[X=x] = &(1-p)^x p\\
&p: \text{probabilidade de encontrar um veículo irregular ("sucesso")}
\end{aligned}$$

$$P[Y \ge 3] = P[X \ge 2] = 1 - \{P[X=0] + P[X=1]\} =$$

$$= 1 - \left\{0,15 \cdot 0,85^0 + 0,15 \cdot 0,85^1\right\} = 0,7225$$

(e) **Contexto 5:**

$$\begin{aligned}
&X: \text{número de irregulares em sete (7) inspeções}\\
P[X=x] = &\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\\
&p: \text{probabilidade de acertar cada questão ("sucesso")}
\end{aligned}$$

$$P[X > 1] = 1 - \{P[X=0] + P[X=1]\} = 1 - \left\{\binom{5}{0} 0,15^0 (1-0,15)^{7-0} + \binom{5}{1} 0,15^1 (1-0,15)^{7-1}\right\} = 0,2834$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> pa <- phyper(1, m=8, n=42, k=7, lower=FALSE)
> pb <- pnbinom(4, size=2, prob=0.15, lower=FALSE)
> pc1 <- dpois(0, lambda=1.8)
> pc2 <- dpois(5, lambda=2*1.8)
> pd <- pgeom(1, prob=0.15, lower=FALSE)
> pe <- pbinom(1, size=7, prob=0.15, lower=FALSE)
```

---

267. Uma determinada indústria classifica ovos como: XL acima de 73 g, L 63 a 73 g, M 53 a 63 g, S abaixo de 53 g. Suponha que um produtor produza ovos cujos tamanhos (pesos) são descritos pela seguinte função de densidade de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-48)}{12k} & \text{se } 48 \leq x < 60 \\ -\frac{(x-78)}{18k} & \text{se } 60 \leq x \leq 78 \\ 0 & \text{se } x < 48 \text{ ou } x > 78 \end{cases}$$

(a) Qual o valor de k ?

(b) Qual a proporção de ovos que deve ser produzida em cada classificação?

(c) Se o produtor recebe R$ 0,05 por ovo S, R$ 0,10 por ovo M, R$ 0,12 por ovo L e R$ 0,18 por ovo XL, quanto deve receber em um lote de 10.000 ovos?

(d) Qual o tamanho (peso) mediano dos ovos?

(e) Forneça a expressão da distribuição acumulada $F(x)$.

(f) Qual o tamanho (peso) para o qual apenas 20% dos ovos estão acima dele?

Solução:

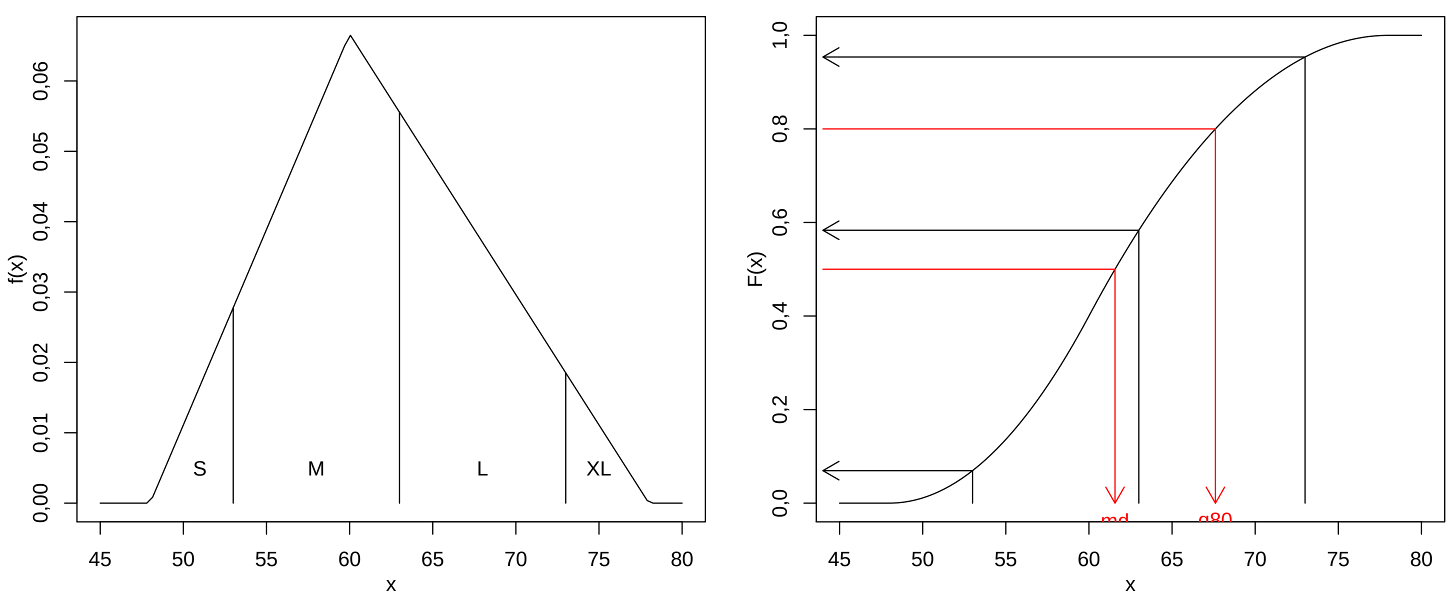


Figura 7: Funções de distribuição de probabilidades ($f(x)$) e acumulada ($F(x)$) do problema. Segmentos e setas são as soluções de alguns dos items do problema.

(a) $k = 15$

(b) Pode-se resolver de três formas diferentes: geometricamente (áreas dos polígonos indicados na figura), integrando-se $f(x)$ ou avaliando-se e fazendo as diferenças dos valores de $F(x)$ nos pontos que definem as classificações.

$$C : \text{valor por ovo}$$
$$c \in \{0,05; 0,10; 0,12; 0,18\}$$

c_i	$0,05$	$0,10$	$0,12$	$0,18$
$P[C=c_i]$	$P[X<53]=$ $0,0694$	$P[53 \leq X < 63]=$ $0,5139$	$P[63 \leq X \leq 73]=$ $0,3704$	$P[X>73]=$ $0,0463$

(c) $10,000 \cdot E[C] = 10.000 \cdot (0,05 \cdot 0,06944 + 0,10 \cdot 0,5139 + 0,12 \cdot 0,3704 + 0,18 \cdot 0,0463) = 10.000 \cdot 0,10764 = 1076,4$

(d) $md : \int_{md}^{78} f(x)dx = 0,5 \longrightarrow md = 61,6$

(e)

$$F(x) = \int_{48}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 48 \\ \frac{1}{180}\left[\frac{(x^2-48^2)}{2} - 48(x-48)\right] & \text{se } 48 \leq x < 60 \\ 0,4 - \frac{1}{270}\left[\frac{(x^2-60^2)}{2} - 78(x-60)\right] & \text{se } 60 \leq x < 78 \\ 1 & \text{se } x > 78 \end{cases}$$

(f) $q_{0,80} : \int_{q_{0,80}}^{78} f(x)dx = 0,20 \longrightarrow q_{0,80} = 67,6$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> ## definindo f(x)
> ddist <- function(x){
+     y <- numeric(length(x))
+     y[x >= 48 & x < 60] <- (x[x >= 48 & x < 60]-48)/180
+     y[x >= 60 & x < 78] <- -(x[x >= 60 & x < 78]-78)/270
+     return(y)
+ }
> ## definindo F(x)
> pdist <- function(x){
+     y <- numeric(length(x))
+     ind <- x >= 48 & x < 60
+     y[ind] <- ((x[ind]^2-48^2)/2 - 48*(x[ind]-48))/180
+     ind <- x >= 60 & x < 78
+     y[ind] <- 0.4 - ((x[ind]^2-60^2)/2 - 78*(x[ind]-60))/270
+     y[x >= 78] <- 1
+     return(y)
+ }
> ## definindo F^{-1}(x)
> qdist <- function(q){
+     uniroot(function(x) pdist(x) - q, interval=c(48,78))$root
+ }
> ## b) Proporções em cada classe
> ## integrando f(x)
> (PrS <- integrate(ddist, 48, 53)$value)

[1] 0,06944

> (PrM <- integrate(ddist, 53, 63)$value)

[1] 0,5139

> (PrL <- integrate(ddist, 63, 73)$value)

[1] 0,3704

> (PrXL <- integrate(ddist, 73, 78)$value)

[1] 0,0463

> ## utilizando F(x)
> (PC <- diff(pdist(c(48,53,63,73,78))))
```

```
[1] 0,06944 0,51389 0,37037 0,04630

> ## c) Valor médio por ovo
> (EC <- drop(crossprod(c(0.05, 0.10, 0.12, 0.18), PC)))

[1] 0,1076

> ## d) mediana
> (md <- qdist(0.5))

[1] 61,57

> ## f) quantil 0,80
> (q80 <- qdist(0.8))

[1] 67,61

> ## Gráficos
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(3.5,3.5,1,1), mgp=c(2,1,0))
> curve(ddist, from=45, to=80, ylab="f(x)")
> segments(c(53,63,73), 0, c(53,63,73), ddist(c(53,63,73)))
> text(c(51, 58, 68, 75), 0.005, c("S","M","L","XL"))
> curve(pdist, from=45, to=80, ylab="F(x)")
> segments(c(53,63,73), 0, c(53,63,73), pdist(c(53,63,73)))
> arrows(c(53,63,73), pdist(c(53,63,73)), 44, pdist(c(53,63,73)), length=0.15)
> segments(44, 0.5,md, 0.5, col=2)
> arrows(md, 0.5, md,0, length=0.15, col=2)
> text(md, 0, "md", pos=1, col=2)
> segments(44, 0.8, q80, 0.8, col=2)
> arrows(q80, 0.8, q80,0, length=0.15, col=2)
> text(q80, 0, expression(q80), pos=1, col=2)
```

---

268. Um grande número de alunos faz uma prova visando avaliar a sua formação e a partir da qual é atribuído a cada um deles um *escore de proficiência* (EP). Os resultados mostram que os EP's podem ser descritos por uma distribuição normal de média 300 e variância 400.

(a) Qual a percentagem de alunos com escores acima de 320?
(b) Qual a percentagem de pessoas com escores entre 250 e 350?
(c) Qual a percentagem de pessoas com escores que não se afastem da média mais do que 50?
(d) Qual valor deve ter 15% dos escores abaixo dele?
(e) Deseja-se dividir os escores em três grupos (alto, médio e baixo) com a mesma proporção de alunos. Quais os valores de corte que dividem as categorias/grupos?
(f) Mantendo-se a mesma média, quanto deveria ser o desvio padrão para que se tenha não mais que 10% dos escores abaixo de 270?
(g) Mantida a variância de 400 quanto deveria ser o escore médio para que se tenha não mais que 10% dos escores abaixo de 270?

X : escores no exame e proficiência

$X \sim N(400, 45^2)$

(a) $P[X > 320] = P[Z > \frac{320-300}{20}] = P[Z > 1] = 0,1587 \longrightarrow 15,87\%$
(b) $P[250 < X < 350] = P[\frac{250-300}{20} < Z < \frac{350-300}{20}] = P[-2,5 < Z < 2,5] = 0,9876 \longrightarrow 98,76\%$

(c) $P[|X-300|<50] = P[250<X<350] = P[\frac{250-300}{20} < Z < \frac{250-300}{20}] = P[2,5<Z<2,5] == 0,9876 \longrightarrow 98,76\%$

(d) $P[X<a] = 0,15 \longrightarrow z = -1,04 = \frac{a-300}{20} \longrightarrow a = 279,3$

(e)

$$P[X<x_1] = 1/3 \longrightarrow z = -0,431 = \frac{x_1 - 300}{20} \longrightarrow x_1 = 291,4$$
$$P[X<x_2] = 2/3 \longrightarrow z = 0,431 = \frac{x_2 - 300}{20} \longrightarrow x_2 = 308,6$$

(f) $P[X<270|\mu=300,\sigma] = 0,10 \longrightarrow z = -1,28 = \frac{270-300}{\sigma} \longrightarrow \sigma = 23,4$

(g) $P[X<270|\mu,\sigma=20] = 0,10 \longrightarrow z = -1,28 = \frac{270-\mu}{20} \longrightarrow \mu = 295,6$

Solução computacional com o programa R:

```
> (ita <- round(pnorm(320, 300, 20, low=F),dig=4))

[1] 0,1587

> (itb <- round(diff(pnorm(c(250, 350), 300, 20)),dig=4))

[1] 0,9876

> (itc <- round(diff(pnorm(c(250, 350), 300, 20)),dig=4))

[1] 0,9876

> (itd <- round(qnorm(0.15, 300, 20), dig=1))

[1] 279,3

> (ite <- round(qnorm(c(1/3,2/3), 300, 20), dig=1))

[1] 291,4 308,6

> (itf <- round((270-300)/qnorm(0.10), dig=1))

[1] 23,4

> (itg <- round(270-qnorm(0.10)*20, dig=1))

[1] 295,6
```

---

269. Um determinado exame tem probabilidade de 0,85 de detectar uma doença quando esta está presente enquanto que um segundo tipo de exame tem probabilidade de 0,70. A doença é considerada detectada se algum dos exames é positivo. Considere que um material com a doença vai ser testado por ambos exames.

(a) Descreva os eventos relevantes com uma notação apropriada.

(b) Forneça o espaço amostral na forma de um conjunto e aponte suas características (finito ou infinito, enumerável ou não enumerável, equiprovável ou não).

(c) Defina em notação o evento "a doença é detectada" e forneça o conjunto que define este evento.

(d) Qual a probabilidade da doença ser detectada?

(e) Qual a suposição feita no cálculo da probabilidade do anterior?

(f) Se três materiais com a doença forem testados com ambos exames, qual a probabilidade de que todos deem (falso) "negativo".

Solução:

(a) **Notação**:

$$\begin{aligned} A &: \text{doença detectada no primeiro exame} \\ B &: \text{doença detectada no segundo exame} \\ D &: \text{a doença é detectada} \\ \overline{D} &: \text{a doença não é detectada} \\ P[A] &= 0,85 \\ P[B] &= 0,70 \end{aligned}$$

(b) $\Omega = \{(AB), (A\overline{B}), (\overline{A}B), (\overline{AB})\}$.
O espaço amostral é *finito*, *enumerável* e *não equiprovável*.

(c) O evento "a doença é detectada" é definido pelo conjunto $D = \{(AB), (A\overline{B}), (\overline{A}B)\}$.

(d) $P[D] = P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = 0,85 + 0,70 - 0,85 \cdot 0,70 = 0,955$

(e) Independência entre os resultados dos dois exames.

(f) Supondo independência entre materiais e exames:
$P[\overline{D}]^3 = (1 - P[D])^3 = (1 - P[A \cup B])^3 = 0,00009113$

---

270. Um material genético de feijão em desenvolvimento foi testado quanto à resistência a duas doenças que afetam comumente a cultura. Os resultados de 100 exames são resumidos na tabela a seguir.

resistência	resistência à doença A	
à doença B	alta	baixa
alta	80	9
baixa	6	5

Denote por A o evento *o material tem alta resistência à doença A* e por B o evento *o material alta resistência à doença B*.

(a) Obtenha: $P[A]$, $P[A \cap B]$, $P[A^c]$, $P[A^c \cap B^c]$, $P[A^c \cup B]$.

(b) Obtenha: $P[A|B]$, $P[B|A]$, $P[A|B^c]$, $P[B^c|A]$, $P[B|A^c]$.

(c) Se um material é selecionado ao acaso qual a probabilidade de ter:
- alta resistência a A e baixa a B?
- alta resistência a B e baixa a A?

(d) os eventos alta resistência a ambas doenças são mutuamente exclusivos? (justifique)

(e) os eventos alta resistência a ambas doenças são independentes? (justifique)

Solução:

```
> m <- matrix(c(80,6,9,5),ncol=2,dimnames=list(c("A","A^c"),c("B","B^c")))
> m

     B B^c
A   80   9
A^c  6   5

> mp <- prop.table(m)
> mp
```

```
       B   B^c
A    0,80 0,09
A^c 0,06 0,05
```

(a)
- $P[A] = 0,86$
- $P[A \cap B] = 0,8$
- $P[A^c] = 0,14$
- $P[A^c \cap B^c] = 0,05$
- $P[A^c \cup B] = P[A^c] + P[B] - P[A^c \cap B] = 0,94$

(b)
- $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = 0,9$
- $P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = 0,93$
- $P[A|B^c] = \frac{P[A \cap B^c]}{P[B^c]} = 0,55$
- $P[B^c|A] = \frac{P[B^c \cap A]}{P[A]} = 0,43$
- $P[B|A^c] = \frac{P[A^c \cap B]}{P[A^c]} = 0,64$

(c)
- $P[B \cap A^c]$ =0,06
- $P[A \cap B^c]$ =0,09

(d) Não, pois $P[A \cap B] \neq 0$, isto é, os eventos ter alta resistência a ambas doenças possuem intersecção, por isso não são mutuamente exclusivos. No contexto do exemplo, isto significa, por exemplo, que é possível ter resistência a ambas doenças ao mesmo tempo.

(e) $P[A \cap B] \neq P[A] \cdot P[B]$, isto é, o produto das marginais difere dos valores observados, por isso sabemos que os eventos não são independentes. No contexto do exemplo, as chances de ter resistência a uma doença são diferentes quando se tem ou não resistência à outra. Dizendo de outra forma, a probabilidade *marginal* (em todo universo) de se ter uma das doenças é diferente da *condicional* (no subgrupo que tem a outra doença), i.e. $P[A] \neq P[A|B]$.

```
> addmargins(mp)

       B   B^c  Sum
A    0,80 0,09 0,89
A^c 0,06 0,05 0,11
Sum 0,86 0,14 1,00

> outer(rowSums(mp), colSums(mp), "*")

        B     B^c
A    0,7654 0,1246
A^c 0,0946 0,0154

> ## note tb a ordem entre os termos!
> #outer(apply(m/sum(m),2,sum),apply(m/sum(m),1,sum),"*")
```

---

271. Em um lote estão misturadas 20 sementes de uma determinada cultivar (A) de uva com 5 de outra (B). Não é possível distinguir facilmente as sementes, o que só pode ser feito em um exame detalhado. Considere as diferentes possibilidades abaixo e calcule as probabilidades solicitadas.

(a) Se forem retiradas ao acaso de uma só vez quatro sementes para inspeção, qual a probabilidade de obter ao menos uma de B?

(b) Se forem retiradas ao acaso e inspecionadas as sementes uma a uma, retornando a semente retirada ao lote, qual a probabilidade de que sejam retiradas três ou mais de A antes de se retirar a primeira de B ?

(c) Finalmente, considere que as sementes serão retiradas ao acaso e inspecionadas uma a uma, retornando a semente retirada ao lote antes da próxima retirada e serã feitas exatamente quatro retiradas, Qual a probabilidade de obter ao menos uma de B?

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
&X : \text{Número sementes do tipo } B \text{ entre quatro retiradas}\\
&x \in \{0,1,2,3,4\}\\
&X \sim \mathrm{HG(N = 25, K = 5, n = 4)}\\
P[X = x] &= \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} == \frac{\binom{5}{x}\binom{25-5}{4-x}}{\binom{25}{n}}\\
P[X \geq 1] &= P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{20}{4}}{\binom{24}{4}} = 0,617
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&X : \text{Número de sementes retiradas de } A \text{ até retirar a primeira de } B\\
&X \sim \mathrm{G(p = 5/25 = 0,2)}\\
&x \in \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}\\
P[X = x] &= (1-p)^x \cdot p = (0,8)^x 0,2\\
P[X \geq 3] &= P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] + \ldots = 1 - P[X < 3] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]\} =\\
&= 1 - \{(0,8)^0 0,2 + (0,8)^1 0,2 + (0,8)^2 0,2\} = 0,422
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
&X : \text{Número sementes do tipo } B \text{ entre quatro retiradas (com reposição)}\\
&x \in \{0,1,2,3,4\}\\
&X \sim \mathrm{B(n = 4, p = 0,20)}\\
P[X = x] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{4}{x} 0,2^x 0,8^{4-x}\\
P[X \geq 1] &= P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{4}{0} 0,2^0 0,8^4 = 0,59
\end{aligned}$$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> (pa <- phyper(0, m=5, n=20, k=4, lower=F))

[1] 0,617

> (pb <- pgeom(2, p=0.25, lower=F))

[1] 0,4219

> (pc <- pbinom(0, size=4, prob=0.2, lower=F))

[1] 0,5904
```

---

272. Registros mostram que em determinado bairro são registradas, em média, 1,7 violações de residências por dia. Assuma uma distribuição de probabilidades possivelmente adequada e calcule as probabilidades de que hajam

(a) três ou mais ocorrências em um dia;

(b) nenhuma ocorrência em um dia;

(c) entre uma e quatro ocorrências em um dia.

Solução:

$$\begin{aligned}
&X : \text{Número diário de violações} \\
&x \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \\
&X \sim \mathrm{P}(\lambda = 1,7) \\
P[X = x] = &\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-1.7}1.7^x}{x!}
\end{aligned}$$

(a) $P[X \geq 3] = P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] \ldots = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]\} = 1 - \{\frac{e^{-1.7}1.7^0}{0!} + \frac{e^{-1.7}1.7^1}{1!} + \frac{e^{-1.7}1.7^2}{2!}\} = 1 - e^{-1.7}\{1 + 1.7^1 + \frac{1.7^2}{2!}\} = 0,243$

(b) $P[X = 0] = \frac{e^{-1.7}1.7^0}{0!} = 0,183$

(c) $P[1 \leq X \leq 4] = P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] \ldots == \{\frac{e^{-1.7}1.7^1}{1!} + \frac{e^{-1.7}1.7^2}{2} + \frac{e^{-1.7}1.7^3}{3!} + \frac{e^{-1.7}1.7^4}{4!}\} = 1 - e^{-1.7}\{1.7^1 + \frac{1.7^2}{2} + \frac{1.7^3}{6} + \frac{1.7^4}{24}\} = 0,788$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> (pa <- ppois(2, lam=1.7, lower=F))

[1] 0,2428

> (pb <- dpois(0, lam=1.7))

[1] 0,1827

> (pc <- diff(ppois(c(0,4), lam=1.7)))

[1] 0,7877
```

---

273. Uma função de densidade de probabilidade (f.d.p.) tem a expressão:

$$f(x) = \begin{cases} -0,025x + 0,2 & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ 0,1 & \text{se } 4 < x \leq 8 \\ 0 & \text{para outros valores de x} \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p. válida.

(b) Calcule $P[X < 3]$

(c) Calcule $P[X > 7]$

(d) Calcule $P[X < 6,5]$

(e) Calcule $P[X > 2]$

(f) Calcule $P[3 < X < 7]$

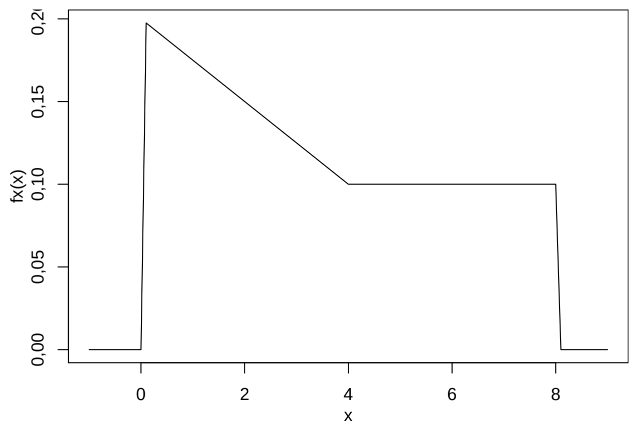
(g) Calcule $P[X < 7 | X > 4]$

(h) Obtenha a tal que $P[X < a] = 0,80$

(i) Obtenha a mediana de X

(j) Estime uma valor (aproximado) para a média ($E[X]$). Este valor deve ser menor, maior ou igual à mediana? Justifique.

(k) Obtenha os quartis da distribuição de X



Solução:

(a) i. Pelo gráfico da função é possível verificar que $f(x) \geq 0 \; \forall x$,

ii. A área sob a função deve ser igual a 1. Isto pode ser verificado geometricamente:

$$A = \frac{(0,2 + 0,1) \cdot 4}{2} + 0,1 \cdot 4 = 0,6 + 0,4 = 1.$$

Alternativamente pode-se integrar a função no intervalo e verificar que

$$\int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = 1$$

(b) $P[X < 3] = 0,4875$

(c) $P[X > 7] = 0,1$

(d) $P[X < 6,5] = 0,85$

(e) $P[X > 2] = 0,65$

(f) $P[3 < X < 7] = 0,4125$

(g) $P[X < 7|X > 4] = 0,75$

(h) $P[X < a] = 0,80 \longrightarrow a = 6$

(i) $md(X) = 3,1$

(j) $E[X] = 3,47$. Maior que a mediana pois a distribuição é assimétrica (com maior cauda à direita)

(k) $Q_1(X) = 1,37$ e $Q_3(X) = 5,5$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> fx <- function(x){
+     y <- numeric(length(x))
+     y[x > 0 & x <= 4] <- -0.025*x[x > 0 & x <= 4] + 0.2
+     y[x > 4 & x <= 8] <- 0.1
+     return(y)
+ }
> (ita <- integrate(fx, 0, 8)$value)

[1] 1

> (itb <- integrate(fx, 0, 3)$value)

[1] 0,4875

> (itc <- integrate(fx, 7, 8)$value)

[1] 0,1
```

```
> (itd <- integrate(fx, 0, 6.5)$value)

[1] 0,85

> (ite <- integrate(fx, 2, 8)$value)

[1] 0,65

> (itf <- integrate(fx, 3, 7)$value)

[1] 0,4125

> (itg <- integrate(fx, 4, 7)$value/integrate(fx, 4, 8)$value)

[1] 0,75

> Qx <- function(x, quantil) (integrate(fx, 0, x)$value - quantil)^2
> (q80 <- optimize(Qx, c(0,8), quantil=0.80)$min)

[1] 6

> (md <- optimize(Qx, c(0,8), quantil=0.5)$min)

[1] 3,101

> Ex.f <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 8, x*fx(x), 0)
> (Ex <- integrate(Ex.f, 0, 8)$value)

[1] 3,467

> (q1 <- optimize(Qx, c(0,8), quantil=0.25)$min)

[1] 1,367

> (q3 <- optimize(Qx, c(0,8), quantil=0.75)$min)

[1] 5,5
```

---

274. Uma *playlist* vai ser montada com três músicas selecionadas a partir de uma lista de quatro músicas do(a) artista A, outra lista de três de B e outra de duas de C. A sequência de músicas na *playlist* é montada ao acaso porém não repete músicas e tem uma de cada artista sempre na sequência de A, B e C nesta ordem..

    (a) Explique se e por que a composição da *playlist* pode ser considerada um experimento aleatório.
    (b) Forneça o espaço amostral.
    (c) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.
    (d) Considere o evento "a *playlist* inicia com a segunda música do(a) artista A". Qual o conjunto que define este evento e qual a sua probabilidade de ocorrência?
    (e) Considere o evento "a *playlist* não contém as primeiras músicas das listas de nenhum dos(as) artistas". Qual o conjunto que define este evento e qua a sua probabilidade de ocorrência?
    (f) Qual seria a probabilidade de ocorrência de ambos eventos definidos no itens eventos anteriores?
    (g) E qual seria a probabilidade de ocorrência de algum deles?
    (h) Quantas *playlists* seria possíveis se a ordem dos(as) artistas também fosse tomada ao acaso?
    (i) Quantas *playlists* seriam possíveis se fosse permitido o sorteio de mais de uma música do mesmo artista, porém ainda sem repetição de música?
    (j) Neste caso, qual seria a probabilidade da *playlist* não conter uma música do artista A?

Solução:
Notação:

$$\begin{aligned}A1, A2, A3 \text{ e } A4 &: \text{ músicas do(a) artista } A\\ B1, B2, \text{ e } B3 &: \text{ músicas do(a) artista } B\\ C1 \text{ e } C2 &: \text{ músicas do(a) artista } C\end{aligned}$$

(a) Sim, pelo fato da ordem dos artistas e músicas de cada um ser escolhada ao acaso.

(b) $\Omega_1 = \{(A1, B1, C1), (A1, B1, C2), (A1, B2, C1), (A1, B2, C2), (A1, B3, C1), (A1, B3, C2),$
$(A2, B1, C1), (A2, B1, C2), (A2, B2, C1), (A2, B2, C2), (A2, B3, C1), (A2, B3, C2),$
$(A3, B1, C1), (A3, B1, C2), (A3, B2, C1), (A3, B2, C2), (A3, B3, C1), (A3, B3, C2),$
$(A4, B1, C1), (A4, B1, C2), (A4, B2, C1), (A4, B2, C2), (A4, B3, C1), (A4, B3, C2)\}$
$n(\Omega_1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

(c) Finito, enumerável e equiprovável. (Justificativa)

(d) $E_1 = \{(A2, B1, C1), (A2, B1, C2), (A2, B2, C1), (A2, B2, C2), (A2, B3, C1), (A2, B3, C2)\}$
$P[E_1] = n(E_1)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$

(e) $E_2 = \{(A2, B2, C2), (A2, B3, C2), (A3, B2, C2), (A3, B3, C2), (A4, B2, C2), (A4, B3, C2)\}$
$P[E_2] = n(E_2)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$

(f) $P[E_1 \cap E_2] = 2/24 = 0,0833$

(g) $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2] - P[E_1 \cap E_2] = 10/24 = 0,417$

(h) $n(\Omega_2) = 24 * 6 = 144$

(i) $n(\Omega_3) = 9 * 8 * 7 = 504$

(j) $P[\overline{A}|\Omega_3] = (5 * 4)/504 = 0,0397$

---

275. Três algorítmos diferentes vão ser testados para a classificação do diagnóstico baseado em exames e imagens. Cada algorítmo pode acertar o diagnóstico da presença de certa doença e sabe-se que até o momento as taxas de acerto são de 85, 90 e 70%. Uma imagem/exames de um paciente com a doença é fornecida aos três algorítmos e avalia-se o acerto de cada um deles.

(a) Forneça o espaço amostral.

(b) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.

(c) Defina dois eventos e forneça suas probabilidades.

(d) Qual a probabilidade de que A acerte o diagnóstico ou que apenas um algorítmo acerte?

(e) Qual a probabilidade de que A tenha acertado o diagnóstico sabendo que apenas um algorítmo acertou?

(f) Qual a probabilidade de que nem A nem B acertem o diagnóstico?

(g) Qual a probabilidade da doença ser detectada?

(h) Qual a probabilidade de B acertar o diagnóstico sabendo que a doença foi detectada?

(i) Defina uma variável aleatória sobre este espaço amostral e indique seus possíveis valores.

(j) Obtenha a distribuição de probabilidades da variável aleatória.

Solução:
Notação:

$$A: \text{ o algorítmo A acerta o diagnóstico }; \overline{A} :: \text{ o algorítmo A erra o diagnóstico}$$
$$P[A] = 0,85 \quad P[\overline{A}] = 0,15$$
$$B: \text{ o algorítmo B acerta o diagnóstico }; \overline{B} :: \text{ o algorítmo B erra o diagnóstico}$$
$$P[B] = 0,90 \quad P[\overline{B}] = 0,10$$
$$C: \text{ o algorítmo C acerta o diagnóstico }; \overline{C} :: \text{ o algorítmo C erra o diagnóstico}$$
$$P[C] = 0,70 \quad P[\overline{C}] = 0,30$$

(a) $\Omega = \{(A,B,C),(\overline{A},B,C),(A,\overline{B},C),(A,B,\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},C),(\overline{A},B,\overline{C}),(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\}$

(b) Finito, enumerável e não equiprovável. (Justificativa)

(c)

$$E_1: \text{ A acerta o diagnóstico } = \{(A,B,C),(A,\overline{B},C),(A,B,\overline{C}),(A,\overline{B},\overline{C})\}$$
$$P[E_1] = 0,85\cdot 0,90\cdot 0,70 + 0,85\cdot 0,10\cdot 0,70 + 0,85\cdot 0,90\cdot 0,30 + 0,85\cdot 0,10\cdot 0,30 = 0,85$$
$$E_2: \text{ B erra o diagnóstico } = \{(A,\overline{B},C),(\overline{A},\overline{B},C),(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\}$$
$$P[E_2] = 0,85\cdot 0,10\cdot 0,70 + 0,15\cdot 0,10\cdot 0,70 + 0,85\cdot 0,10\cdot 0,30 + 0,15\cdot 0,10\cdot 0,30 = 0,304$$

(d)

$$E_3: \text{ apenas um algorítmo acerta o diagnóstico } = \{(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},B,\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},C)\}$$
$$P[E_3] = 0,85\cdot 0,10\cdot 0,30 + 0,15\cdot 0,90\cdot 0,30 + 0,15\cdot 0,10\cdot 0,70 = 0,0765$$
$$E_1\cap E_3 = \{(A,\overline{B},\overline{C})\}; \quad P[E_1\cap E_3] = 0,85\cdot 0,10\cdot 0,30 = 0,0255$$
$$P[E_1\cup E_3] = P[E_1] + P[E_3] - P[E_1\cap E_3] = 0,85 + 0,0765 - 0,0255 = 0,901$$

(e) $P[E_1|E_3] = \frac{P[E_1\cap E_3]}{P[E_3]} = \frac{0,0255}{0,0765} = 0,333$

(f)

$$E_4: \text{ nem A nem B acertam o diagnóstico } = \{(\overline{A},\overline{B},C),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\}$$
$$P[E_4] = 0,15\cdot 0,10\cdot 0,70 + 0,15\cdot 0,10\cdot 0,30 = 0,015$$
$$\text{note que: } P[\overline{A}]\cdot P[\overline{B}] = 0,15\cdot 0,10 = 0,015(independentes)$$

(g)

$$E_5: \text{ da doença ser detectada}$$
$$P[E_5] = 1 - P[\overline{E}_5] = 1 - 0,15\cdot 0,10\cdot 0,30 = 0,996$$

(h)

$$P[B] = 1 - P[E_2]$$
$$B\cap E_5 = \{(A,B,C),(\overline{A},B,C),(A,B,\overline{C}),(\overline{A},B,\overline{C})\}$$
$$P[B\cap E_5] = 0,85\cdot 0,90\cdot 0.70 + 0,15\cdot 0,90\cdot 0.70 + 0,85\cdot 0,90\cdot 0.30 + 0,15\cdot 0,90\cdot 0.30 = 0,9$$
$$P[B|E_5] = \frac{P[B\cap E_5]}{P[E_5]} = \frac{0,9}{0,996} = 0,904$$

(i)

$$X: \text{ número de algorítmos que acertam o diagnóstico}$$
$$x \in \{0,1,2,3\}$$

(j)

x	0	1	2	3
P[X=x]	0,0045	0,0765	0,383	0,535

---

276. A localização de ocorrências em um trecho de 25 km de rodovia é considerada ser uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} K & \text{se } 0 < x \leq 15 \\ -\frac{K}{10}(x-25) & \text{se } 15 < x \leq 25 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 25 \end{cases}$$

(a) Encontre o valor de K.

(b) Qual a probabilidade de ocorrer uma ocorrência nos primeiros 10 km?

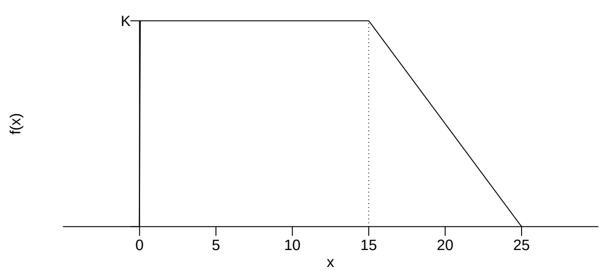
(c) Se sabe-se que uma ocorrência ocorreu antes do km 20, qual a probabilidade de que tenha sido antes do km 10?

(d) Qual a probabilidade de uma ocorrência ter ocorrido entre os km 12 e 22 ?

(e) Se uma central de apoio for colocada no km 0, qual a distãncia que espera-se percorrer para atender 100 ocorrências?

Solução:

A função $f(x)$ tem a forma conforme a seguinte figura:



(a) Para que $f(x)$ seja uma f.d.p. a área sob a figura deve ser 1, ou seja, $\int_0^{25} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
Solução geométrica:

$$b_r \cdot h_r + \frac{b_t \cdot h_t}{2} = 1$$
$$15 \cdot K + \frac{10 \cdot K}{2} = 1$$
$$K = \frac{1}{20} = 0,05$$

Solução por integração:

$$\int_0^{25} f(x)\mathrm{d}x = 1$$
$$\int_0^{15} f(x)\mathrm{d}x + \int_{15}^{25} f(x)\mathrm{d}x = 1$$
$$K \cdot (15-0) - \frac{K}{10}\left(25 \cdot (25-15) - \frac{25^2 - 15^2}{2}\right) = 1$$
$$K = \frac{1}{20} = 0,05$$

(b) $P[X \leq 10]$
Solução geométrica:

$$P[X \leq 10] = b_r \cdot h_r = 10 \cdot 0,05 = 0,5 = 1/2$$

Solução por integração:

$$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 0,05 \cdot (15-0) = 0,5 = 1/2$$

(c)

$$P[X \leq 10 | X \leq 20] = \frac{P[(X \leq 10(\cap(X \leq 20])}{P[X \leq 20]} = \frac{P[X \leq 10]}{P[X \leq 20]}$$

é mais conveniente calcular: $P[X \leq 20] = 1 - P[X > 20]$

Solução geométrica:

$$P[X > 20] = \frac{b_t \cdot h_t}{2} = \frac{(25-20) \cdot f(20)}{2} = 0,9375 = 15/16$$

Solução por integração:

$$P[X > 20] = \int_{20}^{25} f(x)\mathrm{d}x = 0,005 \left(25(25-20) - \frac{25^2 - 20^2}{2}\right) = 0,9375 = 15/16$$

Portanto,

$$P[X \leq 10 | X \leq 20] = \frac{1}{0,9375} = 0,5333 = 8/15$$

(d) $P[12 \leq X \leq 22]$
Solução geométrica:

$$P[12 \leq X \leq 22] = b_r \cdot h_r + \frac{b_t \cdot h_t}{2} = (15-12) \cdot K + \frac{f(15) \cdot f(22)}{2} = 0,3775 = 6550/17351$$

Solução por integração:

$$\int_{12}^{22} f(x)\mathrm{d}x = \int_{12}^{15} f(x)\mathrm{d}x + \int_{15}^{22} f(x)\mathrm{d}x = 0,05(15-12) - 0,005\left(25 \cdot (22-15) - \frac{22^2 - 15^2}{2}\right) = 0,3775 = 6550/1735$$

(e) $100 \cdot E[X] = 100 \cdot \int_0^{25} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = 1021$

Solução computacional:

```
> fx <- function(x){
+     y <- numeric(length(x))
+     y[x > 0 & x <= 15]  <- 0.05
+     y[x > 15 & x <= 25]  <- -0.005 * (x[x > 15 & x <= 25] - 25)
+     return(y)
+ }
> ## (a)
> (qa <- integrate(fx, 0, 25)$value)

[1] 1

> ## (b)
> (qb <- integrate(fx, 0, 10)$value)

[1] 0,5

> ## (c)
> (p20 <- integrate(fx, 0, 20)$value)
```

```
[1] 0,9375

> (qc <- integrate(fx, 0, 10)$value/integrate(fx, 0, 20)$value)

[1] 0,5333

> ## (d)
> (qd <- integrate(fx, 12, 22)$value)

[1] 0,3775

> ## (e)
>  Ex.f <- function(x){ x * fx(x)}
> (EX <- integrate(Ex.f, 0, 25)$value)

[1] 10,21
```

---

277. Seja uma função de densidade de probabilidades $f(x) = 0,2 - 0,02x\ I_{0,10}(x)$.

(a) Esboce um gráfico da função.
(b) Mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidades (f.d.p.) válida.
(c) Obtenha a expressão de $F(x)$ e seu gráfico.
(d) Obtenha o valor médio $E[X]$ e a variância $\text{Var}[X]$
Obtenha as probabilidades:
(e) $P[X > 2]$,
(f) $P[X < 7]$,
(g) $P[X > 5]$,
(h) $P[X > E[X]]$,
(i) $P[X > 2|X < 7]$,
(j) $P[3 < X < 8]$.
(k) Obtenha os quantis 0,15, 0,25, 0,50, 0,60, 0,75 e 0,90,

Solução:

(a) Ver Figura (esquerda)
(b) Mostrar que:

$$(i) f(x) \geq 1 \forall x$$
$$(ii) \int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

(c) Ver Figura (direita)

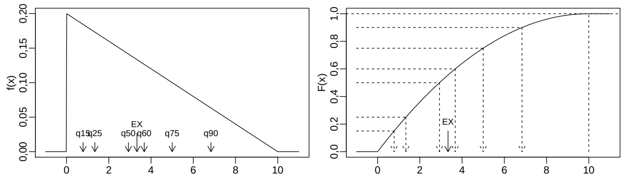


Figura 8: Função de densidade de probabilidade e acumulada com valores da esperança e quantis indicados.

(d)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_0^{10} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \ldots = 3,33 \\
\mathrm{Var}[X] &= \int_0^{10} (x - \mathrm{E}[X])^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \int_0^{10} x \cdot f(x)\mathrm{d}x - (E[X])^2 = \ldots = 16,7 - (3,33)^2 = 5,56
\end{aligned}
$$

(e) $P[X > 2] = 1 - F(2) = 1 - (0,2 \cdot 2 - 0,01 \cdot 2^2) = 0,64$

(f) $P[X < 7] = F(7) = 0,2 \cdot 7 - 0,01 \cdot 7^2 = 0,91$

(g) $P[X > 5] = 1 - F(5) = 1 - (0,2 \cdot 5 - 0,01 \cdot 5^2) = 0,25,$

(h) $P[X > E[X]] = 1 - F(10/3) = 1 - (0,2 \cdot 10/3 - 0,01 \cdot (10/3)^2) = 0,444$

(i) $P[X > 2|X < 7] = \frac{P[2<X<7]}{P[X<7]} = \frac{F(7)-F(2)}{F(7)} = 0,604$

(j) $P[3 < X < 8] = F(8) - F(3) = 0,45$

(k) Para qualquer quantil q_p, $F(q) = p$, ou seja, $q = F^{-1}(p)$, portanto para a $f(x)$ dada o quantil é a raiz da equação $0,2q_p - 0,01q_p^2 = p$ que estiver no intervalo $(0,10)$ no qual a função está definida.

$$
\begin{aligned}
q_{0,15} &= 0,78 \\
q_{0,25} &= 1,34 \\
q_{0,50} &= 2,93 \\
q_{0,60} &= 3,68 \\
q_{0,75} &= 5 \\
q_{0,90} &= 6,84
\end{aligned}
$$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> fx <- function(x){
+     y <- ifelse(x>0 & x<10, 0.2 - 0.02*x, 0)
+     return(y)
+ }
> Fx <- function(x){
+     y <- numeric(length(x))
+     I1 <- (x > 0 & x < 10)
+     y[I1]  <- 0.2*x[I1] - 0.01*(x[I1])^2
+     y[x>10]  <- 1
+     return(y)
+ }
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(2.5,2.5,0.5, 0.5), mgp=c(1.5,0.5,0))
> xs <- seq(-1, 11, length=501)
> #
> plot(xs, fx(xs), type="l", xlab="x", ylab="f(x)")
> arrows(EX, fx(EX)/5, EX, 0, length=0.1)
> text(EX, fx(EX)/5, "EX" , pos=3,cex=0.8)
> x0 <- c(q15, q25, q50, q60, q75, q90)
> arrows(x0, fx(EX)/10, x0, 0, length=0.1)
> text(x0, fx(EX)/10, c("q15", "q25", "q50", "q60", "q75", "q90") , pos=3,cex=0.8)
> #
> plot(xs, Fx(xs), type="l", xlab="x", ylab="F(x)")
> segments(10,0,10,1, lty=2)
> abline(h=1, lty=2)
> y0 <- c(0.15, 0.25, 0.50, 0.60, 0.75, 0.90)
```

```
> segments(-1, y0, x0, Fx(x0), lty=2)
> arrows(x0, Fx(x0), x0, 0, length=0.1, lty=2)
> text(x0, 0, c("q15", "q25", "q50", "q60", "q75", "q90") , pos=1, cex=0.8)
> arrows(EX, 0.15, EX, 0, length=0.1)
> text(EX, 0.15, "EX" , pos=3, cex=0.8)
> Ex.f <- function(x){ x * fx(x)}
> (EX <- integrate(Ex.f, 0, 10)$value)

[1] 3,333

> Ex2.f <- function(x){ x^2 * fx(x)}
> (EX2 <- integrate(Ex2.f, 0, 10)$value)

[1] 16,67

> (VarX <- EX2 - (EX)^2)

[1] 5,556

> (sdX <- sqrt(VarX))

[1] 2,357

> 1 - Fx(2)

[1] 0,64

> Fx(7)

[1] 0,91

> 1 - Fx(5)

[1] 0,25

> 1 - Fx(EX)

[1] 0,4444

> (Fx(7)-Fx(2))/Fx(7)

[1] 0,6044

> Fx(8)-Fx(3)

[1] 0,45

> q15 <- Re(polyroot(c(-0.15, 0.2, -0.01))); (q15 <- q15[q15 > 0 & q15 < 10])

[1] 0,7805

> q25 <- Re(polyroot(c(-0.25, 0.2, -0.01))); (q25 <- q25[q25 > 0 & q25 < 10])

[1] 1,34

> q50 <- Re(polyroot(c(-0.50, 0.2, -0.01))); (q50 <- q50[q50 > 0 & q50 < 10])

[1] 2,929
```

```
> q60 <- Re(polyroot(c(-0.60, 0.2, -0.01))); (q60 <- q60[q60 > 0 & q60 < 10])
[1] 3,675
> q75 <- Re(polyroot(c(-0.75, 0.2, -0.01))); (q75 <- q75[q75 > 0 & q75 < 10])
[1] 5
> q90 <- Re(polyroot(c(-0.90, 0.2, -0.01))); (q90 <- q90[q90 > 0 & q90 < 10])
[1] 6,838
```