CE-003: Estatística II - Turma: K/O, 1^a Prova (24/09/2018)

GRR: ______________ **Nome:** ____ **Turma:** _______

1. Considera-se que em uma epidemia de gripe 60% das pessoas se infectam com o vírus. Uma vacina é eficiente para 80% dos indivíduos expostos a uma epidemia. Uma pessoa não vacinada tem 90% de chance de ter gripe. Duas pessoas, uma vacinada e outra não viajam separadamente para uma região epidêmica, sem ter contato com as mesmas pessoas ou se encontrarem. Qual a probabilidade de que ao menos uma delas tenha a gripe?

   Solução:

$$
\begin{aligned}
P(I) = 0,60 \ \ ; \ \ P(\bar{G}|V) = 0,8 \ \ ; \ \ P(G|\bar{V}) = 0.90 \\
P(\text{ao menos 1 com gripe}) &= P_1(I \cap G|V) + P_2(I \cap G|\bar{V}) - P_1(I \cap G|V) \cdot P_2(I \cap G|\bar{V}) = \\
&= 0,6 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,9 - (0,6 \cdot 0,2) \cdot (0,6 \cdot 0,9) = 0,5952
\end{aligned}
$$

---

2. Em um sistema de transmissão de dados, existe uma probabilidade igual a 0,05 de um lote de dados ser transmitido erroneamente. Foram transmitidos 20 lotes de dados para realização de um teste de confiabilidade do sistema.

   (a) Qual o modelo de probabilidade adequado para o problema? Justifique.

   (b) Qual a probabilidade de haver erro na transmissão?

   (c) Qual a probabilidade de que haja erro em exatamente 2 dos 20 lotes de dados?

   (d) Qual o número esperado de erros em transmissões de 20 dados?

   Solução:

   (a) Binomial: 20 ensaios de Bernoulli, assumidos como independentes, com probabilidade de "sucesso"(transmissão com erro) constante

$$
\begin{aligned}
&X : \text{Número de lotes transmitidos com erro} \\
&X \sim \text{Bin}(n = 20, p = 0,05)
\end{aligned}
$$

   (b) $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - 0,358 = 0,642$

   (c) $P[X = 2] = \binom{20}{2} 0,05^2 (1 - 0,05)^{20-2} = 0,189$

   (d) $\text{E}[X] = n.p = 20(0,05) = 1$

   Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> (la <- pbinom(0, size=20, prob=0.05, lower=FALSE))

[1] 0,6415

> (lb <- dbinom(2, size=20, prob=0.05))

[1] 0,1887
```

---

3. O tempo de vida de um regulador de voltagem de automóvel tem distribuição exponencial com tempo médio de vida de 6 anos.

   (a) qual a probabilidade de que o regulador dure menos que 5 anos?

   (b) qual a probabilidade de que o regulador dure mais que 10 anos?

   (c) qual o tempo dentro do qual a probabilidade do regulador falhar é de 0,80?

   (d) Voce compra um automóvel que tem 5 anos, com um regulador de voltagem em funcionamento, e planeja mantê-lo por mais 5 anos. Qual a probabilidade de que o regulador falhe durante o período que voce pretende manter o automóvel?

Solução:

$$\begin{aligned}X &: \text{tempo de vida}\\ X &\sim \text{Exp}(\lambda = 1/6)\\ \text{E}[X] &= 6\\ f(x) &= (1/6)\text{e}^{-x/6}\\ F(x) &= \int_0^x f(x)\text{d}x = 1 - \text{e}^{-x/6}\end{aligned}$$

(a) $P[X < 5] = \int_0^5 f(x)\text{d}x = F(x) = 0,565$

(b) $P[X > 10] = \int_{10}^{+\infty} f(x)\text{d}x = 1 - F(10) = 0,189$

(c) $P[X < x] = \int_0^x f(x)\text{d}x = F(x) = 1 - \text{e}^{-x/6} = 0,8 \rightarrow x = -6\log(1-0,8) = 9,66$

(d) $P[X < 10|X > 5] =$ [1] $P[X < 5] = \int_0^5 f(x)\text{d}x = F(x) = 0,565$

Soluções computacionais com o programa **R**:

```
> (au1 <- pexp(5, rate=1/6))

[1] 0,5654

> (au2 <- pexp(10, rate=1/6, low=F))

[1] 0,1889

> (au3 <- qexp(0.8, rate=1/6))

[1] 9,657

> (au4 <- pexp(5, rate=1/6))

[1] 0,5654
```

---

4. Seja uma função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} \ , & 0 \le x < 3 \ ; \\ \frac{1}{9}(6-x) \ , & 3 \le x < 6 \ ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida;

(b) calcule $P[X > 2]$

(c) calcule $P[X > 4,5]$

(d) calcule $P[X < 2|X > 1]$

Solução:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\text{d}x = \begin{cases} \frac{x^2}{18} \ , & 0 \le x < 3 \ ; \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(x-3) - \frac{1}{18}(x^2-9) \ , & 3 \le x < 6 \ ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) $f(x) \ge 0 \forall x e \int_0^6 f(x)dx = \frac{6\cdot(1/3)}{2} = 1$

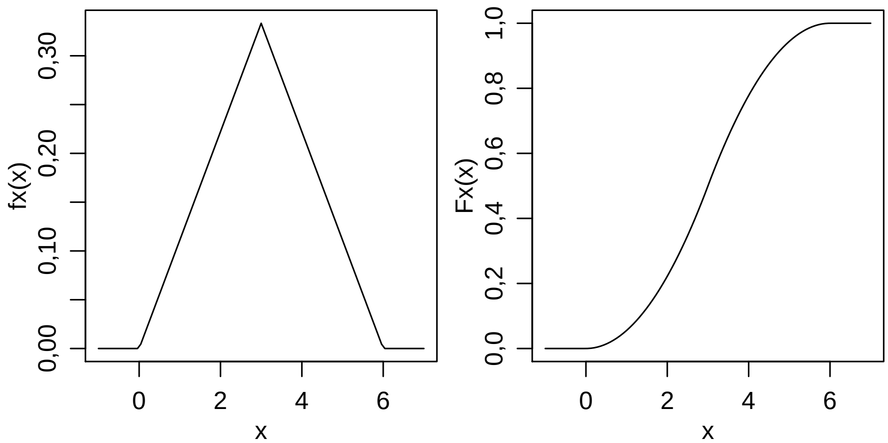
(b) $P[X > 2] = \int_2^6 f(x)dx = 1 - \int_0^2 f(x)dx = 1 - F(2) = 1 - \frac{2.(2/9)}{2} = 0,78$

(c) $P[X > 4,5] = \int_{4,5}^6 f(x)dx = \frac{1,5.((6-4,5)/9)}{2} = 1 - F(4,5) = 0,12$

(d) $P[X < 2|X > 1] = \frac{P[1<X<2]}{P[X>1]} = \frac{\int_1^2 f(x)dx}{\int_1^6 f(x)dx} = \frac{0,17}{0,94} = \frac{F(2)-F(1)}{1-F(1)} = 0,18$

Soluções computacionais com o programa **R**:

[1] propriedade da falta de memória da distribuição exponencial




```
> fx <- function(x){
+   y <- numeric(length(x))
+   y <- ifelse(x>=0 & x<3, x/9, y)
+   y <- ifelse(x>=3 & x<=6, (6-x)/9, y)
+   y
+   }
> Fx <- function(x){
+   y <- ifelse(x < 0, 0, 1)
+   y <- ifelse(x>=0 & x<3, (x^2)/18, y)
+   y <- ifelse(x>=3 & x<6, 0.5 + (2/3)*(x-3) - (1/18)*(x^2 - 9), y)
+   y
+   }
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(3,3,.2,.2), mgp=c(1.8, 0.8, 0))
> x <- seq(-1, 7, length=201)
> curve(fx, from=-1, to=7, type="l")
> curve(Fx, from=-1, to=7, type="l")
> (ita <- integrate(fx,0,6)[[1]])

[1] 1

> (ita <- Fx(6))

[1] 1

> (itb <- 1-integrate(fx,0,2)[[1]])

[1] 0,7778

> (itb <- 1-Fx(2))

[1] 0,7778

> (itc <- integrate(fx,4.5,6)[[1]])

[1] 0,125

> (itc <- Fx(6) - Fx(4.5))

[1] 0,125

> (itd <- integrate(fx,1,2)[[1]]/integrate(fx,1,6)[[1]])

[1] 0,1765

> (itd <- (Fx(2) - Fx(1))/(1-Fx(1)))

[1] 0,1765
```

---

5. O tempo de reação de um motorista a um estímulo visual tem distribuição normal com média de 0,4 segundos e desvio padrão de 0,05 segundos?

(a) Qual a probabilidade que submetido a um estímulo o tempo de reação seja superior a 0,5 segundos?

(b) Qual a probabilidade que a reação esteja entre 0,4 e 0,5 segundos?

(c) Qual o tempo de reação que é excedido em 90% das vezes?

(d) Entre quais valores ao redor do tempo médio espera-se encontrar o tempo de reação em 50% dos casos?

Solução:

$$X : \text{tempo de reação}$$
$$X \sim \mathrm{N}(0,4; 0.05^2)$$

(a) $P[X > 0,5] = P[Z > \frac{0,5-0,4}{0.05}] = 0,0228$

(b) $P[0,4 < X < 0,5] = P[\frac{0,4-0,4}{0.05} < Z < \frac{0,5-0,4}{0.05}] = P[0 < Z < 2] = 0,4772$

(c)

$$\begin{aligned} P[X > c] &= 0.90 \\ P[Z > \frac{c-0,4}{0,05}] &= 0.90 \\ z = -1,282 &= \frac{c-0,4}{0,05} \\ c &= 0,34 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P[d_1 < X < d_2] = P[|X-\mu| < d] &= 0.50 \\ d &= 0,674 \cdot 0,05 = 0,034 \\ d_1 &= 0,4 - d = 0,366 \\ d_2 &= 0,4 + d = 0,434 \\ &(0,366, 0,434) \end{aligned}$$
