CE-003: Estatística II - Turma: K/O, 1^a Prova (01/10/2014)

GRR: ________________ **Nome:** ____ **Turma:** _________

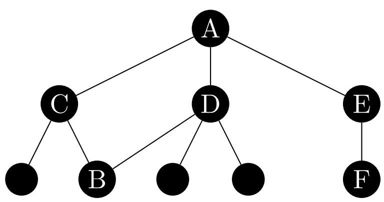
1. Dois experimentos são repetidos diariamente ao longo da semana em diferentes salas de um laboratório até que ao menos um deles tenha *sucesso*. A probabilidade de sucesso de cada experimento é $\mathbf{p}$. Supondo que os experimentos sejam independentes tantos em diferentes salas quanto em diferentes dias, qual a probabilidade que o laboratório consiga o seu primeiro sucesso no dia n?

Solução:

$$
\begin{aligned}
X_1 &: \text{sucesso no experimento da sala 1 em um particular dia} && P[X_1] = p \\
X_2 &: \text{sucesso no experimento da sala 2 em um particular dia} && P[X_2] = p \\
X_t &: \text{sucesso em alguma sala em um particular dia} \\
p_S &= P[X_t] = P[X_1 \cup X_2] = 1 - P[X_1 \cap X_2] \stackrel{ind}{=} 1 - (1-p)^2 \\
N &: \text{número de dias até obter algum sucesso} \\
& n \in 1, 2, 3, 4, \ldots \\
P[N = n] &= p_S(1-p_S)^n = (1-(1-p)^2)(1-(1-(1-p)^2))^n = (1-p)^{2n}(1-(1-p)^2)
\end{aligned}
$$

---

2. Considere o grafo a seguir. Deseja-se avaliar a probabilidade de, partindo de A, chegar em B. Serão dados dois passos e em cada passo seleciona-se aleatoriamente o movimento para um nó conectado ao nó atual.



Solução:

w	(CA)	(CX)	(CB)	(DA)	(DB)	(DX)	(DX)	(EA)	(EF)
P[w]	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$

$$P[(*B)] = P[(CB)] + P[(DB)] = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{36} = 0,194$$

---

3. Uma loja recebe 1000 lâmpadas de baixo custo. A chance de uma lâmpada ser defeituosa é de 0,1%. Seja X o número de lâmpadas defeituosas no lote.

   (a) Que tipo de distribuição de probabilidades X possui? Qual é/são os parâmetros desta distribuição? Quais os possíveis valores de X? E os possíveis valores do(s) parâmetro(s)?

   (b) Qual a probabilidade de que o lote não contenha nenhuma lâmpada defeituosa? E uma defeituosa? E mais que duas defeituosas?

Solução:

(a)

$$
\begin{aligned}
X &\sim \text{Bin}(n = 1000; 0,001)\\
\text{parâmetro :}p\\
x &\in \{0, 1, 2, \ldots 1000\}\\
p &\in [0, 1]
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P[X = 0] &= \binom{1000}{0}(0,001)^0(1 - 0,001)^1000 = 0,368\\
P[X = 1] &= \binom{1000}{1}(0,001)^1(1 - 0,001)^999 = 0,368\\
P[X > 2] &= 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]\} = 0,0802
\end{aligned}
$$

Soluções alternativas por aproximações:

i. $X_P \approx \text{P}(\lambda = n \cdot p = 1)$

$$
\begin{aligned}
P[X_P = 0] &= \frac{e^{-1}1^0}{0!} = 0,368\\
P[X_P = 1] &= \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 0,368\\
P[X_P > 2] &= 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]\} = 0,0803
\end{aligned}
$$

ii. $X_N \approx \text{N}(\mu = n \cdot p = 1; \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 0.999)$ (aproximação ruim neste caso)

$$
\begin{aligned}
P[X = 0] &\approx P[X_N < 0,5] = P[Z < -0,5] = 0,308\\
P[X = 1] &\approx P[0,5 < X_N < 1,5] = P[-0,5 < Z < 0,5] = 0,383\\
P[X > 2] &\approx P[X_N > 1,5] = P[Z > 0,5] = 0,308
\end{aligned}
$$

---

4. O escore de um estudante em um determinado exame é expresso por um número entre 0 e 1. Suponha que um estudante é aprovado se obter um escore de pelo menos 0,55. Suponha ainda que o resultado pode ser modelado por uma variável aleatória com função de densidade de probabilidades dada por:

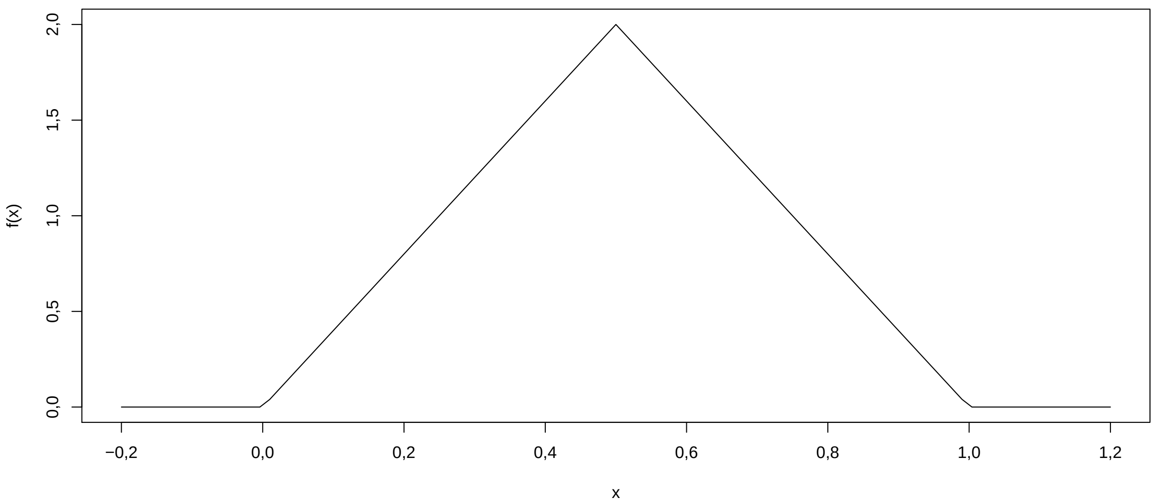
$$
f(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 < x < 1/2\\ 4 - 4x & \text{se } 1/2 < x < 1\\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

(a) Qual a probabilidade que um estudante não seja aprovado no exame?

(b) Qual o escore que será obtido com 80% de chance, ou seja, qual o percentil 80 da distribuição?

(c) Se um estudante foi aprovado, qual a probabilidade de que seu escore tenha sido superior a 0,80?

Solução:



(a) $P[X < 0,55] = 1 - P[X > 0,55] = 1 - \frac{(1-0,55)(4-4*0,55)}{2} = 0,595$

(b) $P[X < q_{0,80}] = 0,80 \rightarrow \frac{(1-q_{0,80})(4-4q_{0,80})}{2} = 0,80 \rightarrow q_{0,80} = 0,684$

(c) $P[X > 0,80|X > 0,55] = \frac{P[X>0,80]}{P[X>0,55]} = \frac{(1-0,80)(4-4*0,55)/2}{(1-0,55)(4-4*0,55/2} = 0,198$

---

5. Considere que um grande grupo (I) de pessoas vai fazer uma determinada prova. Supõe-se que as *notas* seguem uma distribuição normal de média 450 e variância 144. Chama-se de *escores* $(Z = (X - \mu)/\sigma$ as notas padronizadas para uma distribuição normal padrão (média zero e variância unitária)

   (a) Qual a proporção esperada de candidatos com nota superior a 470?

   (b) Qual a proporção esperada de candidados com notas entre 430 e 460?

   (c) Qual a proporção esperada de candidados que se distanciem mais do que 1,5 desvios padrões da média?

   (d) Se forem classificados para uma próxima etapa 20% dos candidatos com as maiores notas, qual será a nota de corte para classificação para próxima etapa.

   (e) Se dividirmos os candidatos em três faixas: A : os 60% com menores notas, B : 30% de notas intermediárias e C : 10% com as maiores notas. Quais os escores que definem os grupos?

   (f) Quais valores correspondem aos quartis da distribuição das notas?

   (g) São considerados candidatos excepcionais aqueles com escore acima de 2,5. A qual nota corresponde tal escore?

   Um outro grupo (II) fez uma prova equivalente em um outro dia. Para este outro grupo a média foi de 462 e a variância de 81. Os candidados dos dois grupos serão classificados usando os escores.

   (h) Entre um candidato do grupo I com nota 470 e um do grupo II com nota 485, qual estaria melhor classificado?

   (i) Quais seriam as notas para classificar os candidatos do grupo II nas faixas A, B e C?

   (j) Se fosse adotada uma única nota de corte de 475, qual seria o percentual de classificados de cada grupo?

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{nota no grupo I} & X &\sim \text{N}(450, 12) \\ Z = \frac{X - 450}{12} &: \text{escore} & Z &\sim \text{N}(0, 1) \\ Y &: \text{nota no grupo II} & Y &\sim \text{N}(462, 9) \end{aligned}$$

(a) $P[X > 470] = P[Z > \frac{470-450}{12}] = P[Z > 1,667] = 0,0478$

(b) $P[430 < X < 460] = P[\frac{430-450}{12} < Z < \frac{460-450}{12}] = P[-1,667 < Z < 0,8333] = 0,75$

(c) $P[|Z| > 1,5] = P[Z < -1,5] + P[Z > 1,5] = 0,134$

(d)

$$
\begin{aligned}
P[X > x_D] &= 0,20 \\
z &= 0,8416 \\
z &= \frac{x_D - 450}{12} \\
x_D &= 460,1
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
P[Z < z_1] = 0,60 &\longrightarrow z_1 = 0,2533 \quad (x_1 = 453) \\
P[Z < z_2] = 0,90 &\longrightarrow 1,282 \quad (x_2 = 465,4)
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
Q_1 &: \\
P[X < Q_1] &= 0,25 \\
z_1 &= -0,6745 \\
z_1 &= \frac{Q_1 - 450}{12} \\
Q_1 &= 441,9 \\
Q_2 &: \\
P[X < Q_2] &= 0,50 \\
Q_2 &= 450 \\
Q_3 &: \\
P[X < Q_3] &= 0,75 \\
z_3 &= 0,6745 \\
z_3 &= \frac{Q_3 - 450}{12} \\
Q_3 &= 458,1
\end{aligned}
$$

(g) $z = \frac{x_G - 450}{12} = 2,5 \longrightarrow x_G = 480$

(h)

$$
\begin{aligned}
z_I &= \frac{470 - 450}{12} = 1,67 \\
z_{II} &= \frac{482 - 462}{9} = 2,56
\end{aligned}
$$

(i)

$$
\begin{aligned}
P[Z < z_1] = 0,60 &\longrightarrow z_1 = 0,2533 \quad (y_1 = 464,3) \\
P[Z < z_2] = 0,90 &\longrightarrow 1,282 \quad (y_2 = 473,5)
\end{aligned}
$$

(j)

$$
\begin{aligned}
\text{Grupo I} : P[X > 475] = P[Z > \frac{475 - 450}{12}] = P[X > 2,083] = 0,0186 \\
\text{Grupo II} : P[X > 475] = P[Z > \frac{475 - 462}{9}] = P[X > 1,444] = 0,0743
\end{aligned}
$$

Solução computacional (com o R)

```
> (qA <- pnorm(470, m=450, sd=12, low=F))

[1] 0,04779

> (qB <- diff(pnorm(c(430,460), m=450, sd=12)))

[1] 0,7499

> (qC <- 2*pnorm(-1.5))
```

```
[1] 0,1336

> (qD <- qnorm(0.80, m=450, sd=12))

[1] 460,1

> (qE <- qnorm(c(0.60,0.90)))

[1] 0,2533 1,2816

> (qEn <- qnorm(c(0.60,0.90), m=450, sd=12))

[1] 453,0 465,4

> (qF <- qnorm(c(0.25,0.50,0.75), m=450, sd=12))

[1] 441,9 450,0 458,1

> (qG <- 450 + 2.5 * 12)

[1] 480

> (qH <- c((470-450)/12,(485-462)/9))

[1] 1,667 2,556

> (qI <- qnorm(c(0.60,0.90), m=462, sd=9))

[1] 464,3 473,5

> (qJ <- c(pnorm(475, m=450, sd=12, low=F), pnorm(475, m=462, sd=9, low=F)))

[1] 0,01861 0,07431
```
