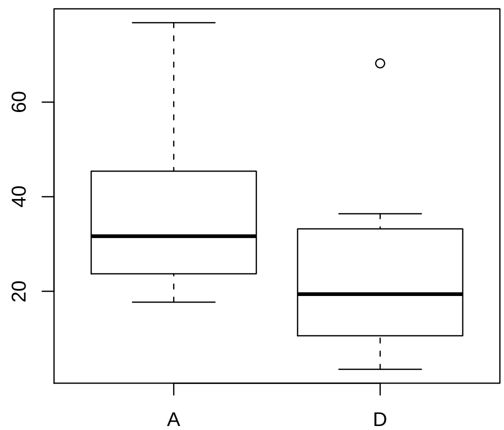
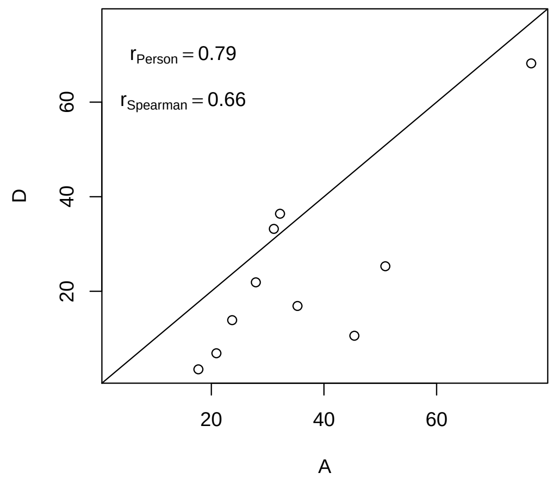
CE-003: Estatística II - Turma: AMB, 1^a Prova (04/06/2013)

GRR: _______________ **Nome:** ____ **Turma:** ___

1. Foram feitas medidas de um certo poluente em 10 pontos de uma bacia hidrográfica, antes (A) e depois (D) de um programa de controle de efluentes nas indústrias locais. Os gráficos a seguir resumem os dados.





   (a) Descreva e compare as distribuições dos dados de cada instante (antes e depois do programa).

   (b) Forneça valores aproximados para a mediana, amplitude e amplitude interquartílica de cada instante.

   (c) Discuta, baseando-se nos dados, a eficácia do programa.

   (d) Interprete e discuta o gráfico da direita.

2. Um site de vendas pela internet registra 40% dos acessos do estado do PR, 50% de outros estados e 10% do exterior. 20% dos acessos do PR resultam em uma compra, enquanto que os percentuais para outros estados e exterior são de 10% e 30%, respectivamente.

   (a) Qual a probabilidade de um acesso resultar em compra?

   (b) Se foi feita uma compra, qual a probabilidade de ela não ter sido do exterior?

Solução:
Eventos:

$$PR: \text{acesso do PR}, \quad OE: \text{acesso de outros estados}, \quad EX: \text{acesso do exterior}$$

$$C: \text{compra}$$

Probabilidades informadas:

$$P[PR] = 0,40 \quad P[OE] = 0,50 \quad P[EX] = 0,10$$

$$P[C|PR] = 0,20 \quad P[C|OE] = 0,10 \quad P[C|EX] = 0,30$$

(a) $P[C] = P[PR \cap C] + P[OE \cap C] + P[EX \cap C] = P[PR] \cdot P[C|PR] + P[OE] \cdot P[C|OE] + P[EX] \cdot P[C|EX] = (0,40)(0,20) + (0,50)(0,10) + (0,10)(0,30) = 0.16$

(b) $P[\overline{EX}|C] = 1 - P[EX|C] = 1 - \frac{P[EX \cap C]}{P[C]} = 1 - \frac{P[EX] \cdot P[C|EX]}{P[C]} = 1 - \frac{(0,10)(0,30)}{(0,40)(0,20)+(0,50)(0,10)+(0,10)(0,30)} = 0.8125$

3. Dois jogadores vão disputar as finais de um torneio e o campeão será o que vencer três partidas. Baseado no restrospecto dos resultados estima-se que a cada partida as probabilidades de vitória dos jogadores são 0,4 e 0,6. Calcule e/ou responda os itens a seguir.

   (a) Qual a probabilidade de haver mais que três jogos?
   (b) Quais as chances de cada jogador vencer o torneio?
   (c) Qual a probabilidade do jogador com menor chance vencer o torneio caso perca as duas primeiras partidas?
   (d) Qual a probabilidade do jogador com maior chance vencer caso tenha tido apenas uma vitória nas três primeiras partidas?
   (e) Qual(ais) as suposições feitas nos cálculos acima?

Solução:
Eventos e probabilidades:

$$A: \text{jogador A ganha o jogo} \quad B: \text{jogador B ganha o jogo}$$

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,6$$

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(A, A, A),\\ &(B, A, A, A), (A, B, A, A), (A, A, B, A),\\ &(B, B, A, A, A), (B, A, B, A, A), (B, A, A, B, A), (A, B, B, A, A), (A, B, A, B, A), (A, A, B, B, A)\\ &(A, A, B, B, B), (A, B, A, B, B), (A, B, B, A, B), (B, A, A, B, B), (B, A, B, A, B), (B, B, A, A, B)\\ &(A, B, B, B), (B, A, B, B), (B, B, A, B)\\ &(B, B, B)\}\end{aligned}$$

Entretanto o espaço amostral e probabilidades podem ser resumidas na tabela a seguir em que nA é o número de vitórias de A e nB é o número de vitórias de B.

nA	3	3	3	2	1	0
nB	0	1	2	3	3	3
Pr	$p_{3,0} = (0,4)^3$	$p_{3,1} = 3 \cdot 0,4^3 0,6^1$	$p_{3,2} = 6 \cdot 0,4^3 0,6^2$	$p_{2,3} = 6 \cdot 0,4^2 0,6^3$	$p_{1,3} = 3 \cdot 0,4^1 0,6^3$	$p_{0,3} = 0,6^3$

(a) $P(nA + nB > 3) = p_{3,1} + p_{3,2} + p_{2,3} + p_{1,3} = 1 - p_{4,0} - p_{0,4} = 1 - (0,4)^3 - (0,6)^3 = 0.72$

(b)

$$P(\text{A vencer}) = P(nA = 3) = p_{3,0} + p_{3,1} + p_{3,2} = 0.3174$$
$$P(\text{B vencer}) = P(nB = 3) = 1 - P(nA = 3) = 0.6826$$

(c)

$$P[nA = 3|(B, B, *)] = ?$$
$$\Omega_1 = \{(B, B, A, A, A), (B, B, A, A, B), (B, B, A, B), (B, B, B)\}$$
$$P[nA = 3|(B, B, *)] = \frac{(0,4)^3(0,6)^2}{(0,4)^3(0,6)^2 + (0,4)^2(0,6)^3 + (0,4)^1(0,6)^3 + (0,6)^3} = 0.064$$

Alternativamente pode-se pensar que se A perdeu as duas primeiras precisa ganhar as três próximas partidas e portanto,

$$P[nA = 3|(B, B, *)] = (0,4)^3 = 0.064$$

(d)

$$\begin{aligned}\Omega_2 = \{&(B, A, A, A), (A, B, A, A), (A, A, B, A), (B, A, A, B, A), (A, B, A, B, A),\\ &(A, A, B, B, A), (A, A, B, B, B), (A, B, A, B, B), (B, A, A, B, B)\}\end{aligned}$$

$$P = \frac{3(0,4)^2(0,6)^3}{3(0,4)^3(0,6)^1 + 3(0,4)^3(0,6)^2 + 3(0,4)^2(0,6)^3} = 0.36$$

Alternativamente pode-se pensar que B se perdeu as duas primeiras precisa ganhar as duas próximas partidas e portanto,

$$P[nB = 3|\text{ganhou 1 das 3 primeiras}] = (0,6)^2 = 0.36$$

(e)

---

4. Em um programa da regeneração são plantadas 10 mudas de uma determinada espécie em cada uma das unidades de manejo. A probabilidade de que qualquer muda complete dois anos de idade é de 0,4. Fazendo suposições necessárias, responda os itens a seguir.

   (a) Qual a probabilidade de uma unidade ter alguma planta com dois anos?

   (b) Quantas mudas deveriam plantadas para que a probabilidade de alguma planta completar dois anos seja superior a 0,99 ?

   (c) Qual deveria ser a probabilidade de cada muda completar dois anos para que a probabilidade da unidade ter alguma muda fosse superior a 0,95?

   (d) Descreva e discuta as suposições feitas para resolver o problema indicando situações em que elas poderiam ser inválidas.

Solução:

$$\begin{array}{rl} \text{Evento } P_i: & \text{a i-ésima planta completa 2 anos} \quad P[P_i] = 0,40 = P[P] \longrightarrow P[\overline{P}_i] = 0,60 = P[\overline{P}] \\ \text{Evento } C: & \text{a unidade tem ao menos 1 planta após 2 anos} \end{array}$$

(a) $P[C] = 1 - P[\overline{C}] = 1 - P[\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \ldots \cap \overline{P}_{10}] = 1 - \prod_{i=1}^{10} P[\overline{P}_i] = 1 - P[\overline{P}]^{10} = 1 - 0,60^{10} = 0.994$

(b) $P[C] > 0,99 \longrightarrow 1 - 0,60^n > 0,99 \longrightarrow 0,60^n < 0,01 \longrightarrow n \geq \frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}6)} = 10$

(c) $P[C] > 0,95 \longrightarrow 1 - P[\overline{P}]^{10} > 0,95 \longrightarrow P[\overline{P}]^{10} < 0,05 \longrightarrow P[\overline{P}] < (0,05)^{1/10} = 0.74 \longrightarrow P[P] = 0.26$

(d)
