CE-003: Estatística II, 2^a Prova - 2^o semestre 2011 (24/11/2011)

1. Acredita-se que numa certa população, 20% de seus habitantes sofrem de algum tipo de alergia e são classificados como alérgicos para fins de saúde pública. Sendo alérgico, a probabilidade de ter reação a um certo antibiótico é 0,5. Para os não alérgicos essa probabilidade é de apenas 0,05. Uma pessoa dessa população teve reação ao ingerir o antibótico, qual a probabilidade de:
a) ser do grupo não alérgico? b) ser do grupo alérgico?

Solução

$$A : \text{alergia} \quad \bar{A} : \text{não alergia} \quad R : \text{reação} \quad \bar{R} : \text{não reação}$$
$$P[A] = 0,20 \quad P[R|A] = 0,5 \quad P[R|\bar{A}] = 0,05$$
$$a) P[\bar{A}|R] = \frac{P[\bar{A} \cap R]}{P[R]} = \frac{P[R|\bar{A}] \cdot P[\bar{A}]}{P[R|\bar{A}] \cdot P[\bar{A}] + P[R|A] \cdot P[A]} = \frac{0,05 \cdot 0.80}{0,05 \cdot 0.80 + 0,5 \cdot 0.20} = 0,2857$$
$$b) P[A|R] = 1 - P[\bar{A}|R] = 0,7143$$

---

2. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x) = \kappa\, x^2\, I_{[-1,1]}(x)$.
   (a) Determine o valor da constante κ.
   (b) Calcule $P(|X| > 1/2)$.
   (c) Ache o valor de A tal que $F(A) = P(X \leq A) = 1/4$.
   (d) Calcular $E(X)$.

Solução

(a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1 \longrightarrow \kappa = 3/2$

(b) $P(|X| > 1/2) = P(X < -1/2) + P(X > 1/2) = \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx + \int_{1/2}^{-1} f(x)dx = 0,875$

(c) $\int_{-1}^{A} f(x)dx = 1/4 \longrightarrow A = -1/\sqrt[3]{2} = -0,7937$

(d) $E(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot f(x)dx = \int_{-1}^{1} (3/2)x^3 dx = 0$

---

3. Laminas de metal apresentam defeitos no cromado, segundo uma distribuição de Poisson, com uma média de 0,8 defeito por m^2. Essas laminas são usadas para construção de janelas para uma instalação industrial cuja dimensões são de 150×200 cm.
   (a) Qual o número esperado de falhas por janela?
   (b) Qual a probabilidade de uma janela não apresentar defeito?
   (c) Sabendo que uma janela tem defeito(s) qual a probabilidade de ter mais que um defeito?
   (d) Em um grupo 10 dessas janelas qual é a probabilidade de que no máximo 2 delas não tenha nenhum defeito?
   (e) Em 500 lotes de 3 janelas, quantos espera-se que não apresentem nenhuma janela com defeito?

Solução

$$X : \text{defeitos por } m^2$$
$$X \sim P(\lambda_X = 0,8)$$
$$Y : \text{defeitos por janela}$$
$$Y \sim P(\lambda_Y = 0,8 \cdot 1,5 \cdot 2 = 2,4)$$

(a) $E(Y) = \lambda_Y = 2,4$

(b) $P[Y = 0] = \frac{e^{-2,4} 2,4^0}{0!} = 0,0907$

(c) $P[X > 1 | X \neq 0] = \frac{P[X>1]}{P[X \geq 1]} = \frac{1 - P[X=0] - P[X=1]}{1 - P[X=0]} = 0,7606$

(d)

$$\begin{aligned}
&Z: \text{número de janelas sem defeito em um grupo de 10}\\
&Z \sim B(n = 10, p = 0,0907)\\
P[Z \leq 2] &= P[Z = 0] + P[Z = 1] + P[Z = 2] = 0,9449
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
&W: \text{número de janelas sem defeito em um grupo de 3}\\
&W \sim B(n = 3, p = 0,0907)\\
500 \cdot P[W \geq 1] &= 500 \cdot (1 - P[W = 0]) = 124
\end{aligned}$$

---

4. Um time de futebol tem probabilidade 0,70 de vitórias sempre que joga. Se o time atuar 4 vezes determine a probabilidade de que vença:

   (a) todas as 4 partidas.
   (b) exatamente 2 partidas.
   (c) pelo menos uma partida.
   (d) no máximo 3 partidas.
   (e) mais da metade das partidas.

Solução:

$$\begin{aligned}
&X: \text{número de vitórias em 4 partidas}\\
&X \sim B(n = 4, p = 0.7)\\
P[X = x] &= \binom{4}{x} 0,7^x (0.3)^{n-x}
\end{aligned}$$

(a) $P[X = 4] = 0,2401$
(b) $P[X = 2] = 0,2646$
(c) $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 0,9919$
(d) $P[X \leq 3] = 0,7599$
(e) $P[X > 2] = P[X = 3] + P[X = 4] = 0,4116 + 0,2401 = 0,6517$

---

5. Em uma fábrica, a máquina A produz por dia o triplo de peças que a máquina B e, a máquina C o quádruplo da máquina A. Sabe-se que 6% das peças fabricadas pela máquina A tendem a ser defeituosas, 4% das peças produzidas pela máquina B tendem a ser defeituosas, enquanto 8% de peças defeituosas da máquina C. A produção diária de todas as máquinas é misturada. Extraída uma amostra aleatória (com reposição) de 20 peças, qual é a probabilidade de que essa amostra contenha:

   (a) No máximo duas peças defeituosas?
   (b) Entre três e cinco peças defeituosas?
   (c) Se uma peça é defeituosa, qual a probabilidade de ter vindo da máquina A?

Solução

$$\begin{aligned}
P[A] = 3/16 \quad &; \quad P[B] = 1/16 \quad ; \quad P[C] = 12/16\\
P[D|A] = 0,06 \quad &; \quad P[D|B] = 0,04 \quad ; \quad P[D|C] = 0,08\\
pD = P[D] &= P[D \cap A] + P[D \cap B] + P[D \cap C] = P[D|A]P[A] + P[D|B]P[B] + P[D|C]P[C] = 0,07375\\
&X: \text{número de defeituosas em 20 peças}\\
&X \sim B(n = 20, p = 0,07375)
\end{aligned}$$

(a) $P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 1$
(b) $P[3 \leq X \leq 5] = P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = 0$
(c) $P[A|D] = \frac{P[D|A]P[A]}{P[D]} = \frac{(0,06)(3/16)}{0,07375} = 0,1525$

---

6. Um exame de múltipla escolha consiste em 10 questões, cada uma com cinco possibilidades de escolha. A aprovação exige no mínimo 50%. Qual a chance de aprovação, se:

   (a) O candidato comparece ao exame sem saber absolutamente nada, apelando apenas para o palpite.

   (b) O candidato tem um conhecimento parcial do conteúdo, suficiente para poder eliminar três escolhas, devendo então apenas entre as duas escolhas restantes.

Solução:

$$X : \text{número de questões certas}$$

(a)

$$X \sim B(n = 10, p = 0,2)$$
$$P[X \geq 5] = P[X = 5] + P[X = 6] + \ldots + P[X = 10] = 0,0328$$

(b)

$$X \sim B(n = 10, p = 0,5)$$
$$P[X \geq 5] = P[X = 5] + P[X = 6] + \ldots + P[X = 10] = 0,623$$

---

7. O Departamento de Matemática é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída, sorteando-se, ao acaso, três membros do departamento.

   (a) Qual a probabilidade a comissão ser formada somente por homens?

   (b) Qual a probabilidade a comissão ser formada por pelo menos duas mulheres?

   (c) O valor esperado e variância do número de mulheres na comissão.

   (d) A função de distribuição acumulada.

Solução:

$$X : \text{número de homens na comissão}$$
$$X \sim HG(N = 35, n = 3, r = 21)$$
$$P[X = x] = \frac{\binom{21}{x}\binom{14}{3-x}}{\binom{35}{3}}$$

(a) $P[X = 3] = \frac{\binom{21}{3}\binom{14}{3-3}}{\binom{35}{3}} = 0,2032$

(b) $P[X \leq 1] = P[X = 0] + P[X = 1] = 0,3476$

(c) $3 - E[X] = 1,2$

(d) $F[X] = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{21}{k}\binom{14}{3-k}}{\binom{35}{3}}$
