CE-003: Estatística II, 2^a Prova - 2^o semestre 2011 (23/11/2011)

1. Um time de futebol tem probabilidade 0,70 de vitórias sempre que joga. Se o time atuar 4 vezes determine a probabilidade de que vença:

   (a) todas as 4 partidas.
   (b) exatamente 2 partidas.
   (c) pelo menos uma partida.
   (d) no máximo 3 partidas.
   (e) mais da metade das partidas.

   Solução:

$$X : \text{número de vitórias em 4 partidas}$$
$$X \sim B(n = 4, p = 0.7)$$
$$P[X = x] = \binom{4}{x} 0,7^x (0.3)^{n-x}$$

   (a) $P[X = 4] = 0,2401$
   (b) $P[X = 2] = 0,2646$
   (c) $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 0,9919$
   (d) $P[X \leq 3] = 0,7599$
   (e) $P[X > 2] = P[X = 3] + P[X = 4] = 0,4116 + 0,2401 = 0,6517$

---

2. Considere agora que o time tem probabilidade 0,7 de vitória, 0,25 de empate e 0,05 de perder quando joga em casa e 0,5 de vitória, 0,3 de empate e 0,2 de derrota quando joga fora. O time ganha 3 pontos quando vence, 1 quando empata e não marca pontos quando perde. Se vai jogar uma partida em casa e uma fora, qual a probabilidade de:

   (a) não marcar pontos,
   (b) marcar 4 pontos,
   (c) marcar 6 pontos.
   (d) qual o número esperado de pontos marcados em um par de partidas sendo uma em casa e outra fora. Como este resultado deve ser interpretado?

   Solução:

$$V_i : \text{vitória} \;\; E_i : \text{empate} \;\; D_i : \text{derrota(na i-ésima partida)}$$
$$P[V_1] = 0,7 \;\; P[E_1] = 0,25 \;\; P[D_1] = 0,05$$
$$P[V_2] = 0,5 \;\; P[E_2] = 0,3 \;\; P[D_1] = 0,2$$
$$Y : \text{número de pontos em duas partidas}$$

y	0	1	2	3	4	6
P[Y=y]	$P[D_1 \cap D_2]$	$P[D_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap D_2]$	$P[E_1 \cap E_2]$	$P[V_1 \cap D_2] + P[D_1 \cap V_2]$	$P[V_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap V_2]$	$P[V_1 \cap$

   Suposição: resultados são independentes

   (a) $P[Y = 0] = P[D_1 \cap D_2] = P[D_1] \cdot P[D_2] = 0,05 \cdot 0,2 = 0,01$
   (b) $P[Y = 4] = P[V_1 \cap E_2] + P[E_1 \cap V_2] = P[V_1] \cdot P[E_2] = P[E_1] \cdot P[V_2] = 0,7 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,335$
   (c) $P[Y = 6] = P[V_1 \cap V_2] = P[V_1] \cdot P[V_2] = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$
   (d) $\text{E}[Y] = \sum y \cdot P[Y = y] = 0 \cdot P[Y = 0] + 1 \cdot P[Y = 1] + 2 \cdot P[Y = 2] + 3 \cdot P[Y = 3] + 4 \cdot P[Y = 4] + 6 \cdot P[Y = 6] = 4,15$

---

3. Certo tipo de fusível tem duração de vida que segue uma distribuição (f.d.p.) exponencial com tempo médio de vida de 100 horas. Cada peça tem um custo de 10,0 unidades monetárias (u.m.) e se durar menos de 20 horas, existe um custo adicional de 8,0 u.m..

   (a) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 150 horas?
   (b) Qual é a probabilidade de uma durar entre 50 e 120 horas?
   (c) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 250 horas sabendo que já durou mais que 100 horas?
   (d) Determinar o custo esperado de um lote de 10.000 peças.

Solução:

$$X : \text{duração}$$
$$X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/100)$$
$$f(x) = (1/100)\exp\{-x/100\}\ I_{(0,\infty)}(x)$$

(a) $P[X > 150] = \int_{150}^{\infty} f(x)dx = 1 - F(150) = 0,2231$

(b) $P[50 < X < 120] = \int_{50}^{120} f(x)dx = F(120) - F(50) = 0,3053$

(c) $P[X > 250|X > 100] = \frac{P[X>250 \cap X>100]}{P[X>100]} = \ldots = P[X > 150] = 0,2231$

(d) Y : custo por peça

y	10	18
P[Y=y]	$P[X \geq 20] = 0,8187$	$P[X < 20] = 0,1813$

Custo $= 10.000 \cdot E[Y] = 10.000 \cdot (10 \cdot P[Y = 10] + 18 \cdot P[Y = 18]) = 114501,54$

---

4. Um vendedor de automóveis sabe que o número de carros vendidos por dia em sua loja comporta-se como uma variável de Poisson cuja média é 2,2 nos dias de bom tempo, e de 0,9 nos dias chuvosos. Se em 65% dos dias faz bom tempo, qual é a probabilidade de que:

(a) não seja vendido nenhum automóvel em um certo dia.

(b) em certo dia do ano sejam vendidos pelo menos três automóveis.

Solução:

$$X : \text{tempo bom}$$
$$X \sim Ber(p = 0.65)$$
$$Y : \text{número de automóveis vendidos}$$
$$Y|(X = 0) \sim P(\lambda = 0,9) \quad Y|(X = 1) \sim P(\lambda = 2,2)$$

(a) $P[Y = 0] = P[Y = 0|X = 0] \cdot P[X = 0] + P[Y = 0|X = 1] \cdot P[X = 1] = \frac{e^{-0,9}0,9^0}{0!} \cdot 0.35 + \frac{e^{-2,2}2,2^0}{0!} \cdot 0.65 = 0,2143$

(b)

$$\begin{aligned}
P[Y \geq 3] &= 1 - (P[Y = 0] + P[Y = 1] + P[Y = 2]) \\
&= 1 - (P[Y = 0|X = 0] \cdot P[X = 0] + P[Y = 0|X = 1] \cdot P[X = 1] + \\
&\quad + P[Y = 1|X = 0] \cdot P[X = 0] + P[Y = 1|X = 1] \cdot P[X = 1] + \\
&\quad + P[Y = 2|X = 0] \cdot P[X = 0] + P[Y = 2|X = 1] \cdot P[X = 1]) \\
&= 1 - \left(\frac{e^{-0,9}0,9^0}{0!} \cdot 0.35 + \frac{e^{-2,2}2,2^0}{0!} \cdot 0.65 + \right. \\
&\quad + \frac{e^{-0,9}0,9^1}{1!} \cdot 0.35 + \frac{e^{-2,2}2,2^1}{1!} \cdot 0.65 + \\
&\quad \left. + \frac{e^{-0,9}0,9^2}{2!} \cdot 0.35 + \frac{e^{-2,2}2,2^2}{2!} \cdot 0.65 \right) \\
&= 1 - (0,2143 + 0,2865 + 0,2319) = 0,7328
\end{aligned}$$

---

5. Sabe-se que com determinado tratamento alcança 60% de curas para certa doença quando o mesmo é administrado a pacientes em condições bem definidas. Se tratamento for aplicado a 20 pacientes nessas condições, qual é probabilidade de que:

(a) Ocorram no máximo 5 curas?

(b) Ocorram no mínimo 9 e no máximo 11 curas ?

(c) Qual é o número esperado de curas? E qual a variância?

Solução:

$$X : \text{número de curas em 20 pacientes}$$
$$X \sim B(n = 20, p = 0.6)$$
$$P[X = x] = \binom{20}{x}(0.6)^x(0.4)^{20-x}$$

(a) $P[X \leq 5] = 0,0016$

(b) $P[9 \leq X \leq 11] = P[X = 9] + P[X = 10] + P[X = 11] = 0,3479$

(c)

$$\mathrm{E}[X] = n \cdot p = 20 \cdot 0.6 = 12$$
$$\mathrm{V}[X] = n \cdot p \cdot (1 - p) = 20 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 4.8$$

---

6. O tempo de duração(em anos) de certo microprocessador, é considerado uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade $f(x) = e^{-\frac{x-k}{10}} \mathrm{I}_{[2,\infty]}(\mathrm{x})$.

   (a) Determine a constante k para que $f(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.

   (b) Determine e interprete $E(X)$ e $Var(X)$;

   (c) Qual é a probabilidade de um microprocessador dure mais de 5 anos em uma escolha aleatória?

   (d) Determine a função de distribuição acumulada da variável tempo de vida.

   (e) Se um microprocessador já está em funcionamento por 7 anos, qual é a probabilidade que dure outros 2 anos?

Solução:

(a) $\int_2^\infty f(x)dx = 1 \longrightarrow k = 2 - 10\log(10)$

(b) $E(X) = 12$ e $Var(X) = 100$

(c) $P[X > 5] = \int_5^\infty f(x)dx = 0,7408$

(d) $F(x) = \int_2^x f(x)dx = 10\left(\exp\{-(2-k)/10\} - \exp\{-(x-k)/10\}\right)$

(e) $P[X > 9|X > 7] = \frac{P[X>9]}{P[X>7]} = P[X > 4] = 0,8187$

```
> fx <- function(x){k=2-10*log(10); return(exp(-(x-k)/10))}
> integrate(fx, 2, Inf)

1 with absolute error < 0,00011

> Ex <- function(x){k=2-10*log(10); return(x*exp(-(x-k)/10))}
> integrate(Ex, 2, Inf)

12 with absolute error < 6,5e-05

> Vx <- function(x){k=2-10*log(10); return((x-12)^2*exp(-(x-k)/10))}
> integrate(Vx, 2, Inf)

100 with absolute error < 1e-05

> (P5 <-  integrate(fx, 5, Inf))

0,7408182 with absolute error < 8,5e-05

> Fx <- function(x){k=2-10*log(10); return(10*(exp(-(2-k)/10) - exp(-(x-k)/10)))}
> 1 - Fx(5)

[1] 0,7408182

> (1-Fx(9))/(1-Fx(7))

[1] 0,8187308

> 1-Fx(4)

[1] 0,8187308
```