

1. Em um experimento fatorial 2^2 simples (sem repetição), temos o seguinte modelo

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ij}$$

onde μ é a média geral do experimento, α_i é o efeito do i -ésimo nível do fator A, β_j é o efeito do j -ésimo nível do fator B, γ_{ij} é o efeito da interação entre A e B, e ϵ_{ij} é o erro aleatório. Nesse caso particular de um experimento 2^2 , temos $i = 1, \dots, a$, e $j = 1, \dots, b$, onde $a = b = 2$. Com isso:

(a) (1.0) Escreva esse modelo (sem nenhum tipo de restrição ou reparametrização) em notação matricial, ou seja,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (1)$$

Use \mathbf{y} na seguinte ordem: $\mathbf{y} = [y_{11}, y_{21}, y_{12}, y_{22}]'$.

(b) (1.0) Sabemos que o modelo como definido acima não é estimável. Explique por quê. Use a restrição do tipo soma zero, e reescreva esse modelo na forma matricial como em (1).

(c) (1.5) Através do modelo especificado no item anterior (com a restrição do tipo soma zero), use a solução de mínimos quadrados

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

para mostrar que a estimativa dos efeitos de um fatorial 2^2 é simplesmente a diferença média entre médias dos níveis dos fatores, ou seja,

$$\mu = \bar{y}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\bar{y}_{1j} - \bar{y}_{2j}}{2}, \quad \hat{\beta} = \frac{\bar{y}_{i1} - \bar{y}_{i2}}{2}, \quad \hat{\gamma} = \frac{\bar{y}_{ii} - \bar{y}_{ij}}{2}.$$

2. Um experimento foi realizado em uma planta de fabricação de semicondutores, como um esforço para aumentar o rendimento. Cinco fatores, cada um com dois níveis, foram estudados. Os fatores (e níveis) foram A = abertura (pequena, grande), B = tempo de exposição (20% abaixo do valor nominal, 20% acima do valor nominal), C = tempo de desenvolvimento (30 s e 45 s), D = dimensão da máscara (pequena, grande), E = tempo de ataque químico (14,5 min., 15,5 min.). Também foram realizadas quatro réplicas adicionais no ponto central (0, 0, 0, 0, 0) deste experimento, sendo assim foi realizado um experimento $2^5 + 5$. Com isso, responda:

(a) (1,0) Nos experimentos fatoriais 2^k existe uma preocupação constante sobre a validade da relação funcional assumida entre o valor esperado da resposta medida e os níveis dos fatores. Qual relação é assumida? Qual a ideia básica ao correr pontos centrais nesses experimentos? O que podemos verificar com a adição de pontos centrais?

3. Você foi contratado(a) como consultor(a) por uma empresa para avaliar o resultado de um experimento que já foi realizado. Os pesquisadores da empresa apresentam os resultados obtidos conforme a tabela abaixo.

Fator		Repetição			Total
A	B	i	ii	iii	
-	-	28	25	27	80
+	-	36	32	32	100
-	+	18	19	23	60
+	+	31	30	29	90

O objetivo deles era avaliar qual a melhor combinação de concentração de reagente (A) e quantidade de catalisador (B) que produz o maior volume de uma substância química, obtida através de uma reação. Usando o R, eles conseguiram obter o quadro de Análise de Variância, que também foi apresentado à você:

Analysis of Variance Table

Response: y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	208.333	208.333	53.1915	8.444e-05
B	1	75.000	75.000	19.1489	0.002362
A:B	1	8.333	8.333	2.1277	0.182776
Residuals	8	31.333	3.917		

No entanto, eles não possuem conhecimento estatístico suficiente para interpretar o resultado da ANOVA e não sabem como avaliar os efeitos de cada fator. Por isso, você foi contratado, e eles precisam das seguintes informações:

- (0.5) Escreva em notação apropriada o modelo associado ao experimento, e represente geometricamente os resultados.
- (1.5) Usando a tabela da ANOVA, obtenha os contrastes para os fatores principais e a interação. Calcule os efeitos e os coeficientes dos efeitos para cada termo do modelo. Construa uma tabela com os coeficientes dos efeitos, o erro-padrão dos coeficientes, e o valor de t correspondente, para testar as hipóteses de que cada coeficiente é igual a zero. Coloque na primeira linha da tabela a média geral do experimento, seu erro-padrão e valor de t . (**Observação:** o contraste associado ao fator B é negativo).
- (1.5) Com essa tabela, indique quais termos são importantes (confirmando ou não os resultados da ANOVA), e interprete o resultado em termos dos efeitos calculados. Ou seja, quais efeitos são importantes, e como eles podem ser interpretados (use $|t_{8;0,05}| = 2,31$ como referência).
- (1.0) Usando apenas os fatores que você avaliou como importantes, faça a predição para as quatro combinações dos dois fatores do experimento. Conclua sua análise recomendando à empresa a combinação de concentração de reagente e quantidade de catalisador que produzirá o maior volume da substância química.

$$SQ = \frac{\text{contr}^2}{r2^k} \quad \text{efeito} = \frac{\text{contraste}}{r2^{k-1}} \quad \hat{\beta} = \text{coef.} = \frac{\text{efeito}}{2} \quad EP(\hat{\beta}) = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{r2^k}} \quad t = \frac{\hat{\beta}}{EP(\hat{\beta})}$$