

# Exercícios: experimentos fatoriais

CE074 - Controle de Processos Industriais

2017/2

1. O que são experimentos fatoriais? Quais as vantagens de se utilizar estes experimentos?
2. Como se analisa um experimento fatorial (descreva os passos).
3. Quais são as formas de restrição ou reparametrizações adotadas (no geral) em modelos de análise de variância? Por que isso é necessário?
4. Por que é mais comum utilizar a restrição do tipo soma zero na análise de experimentos fatoriais?
5. O que é o princípio da marginalidade e porque ele é importante?
6. Considere o seguinte modelo para um experimento com apenas um fator

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

onde  $y_{ij}$  denota uma observação com o  $i$ -ésimo tratamento e a  $j$ -ésima repetição,  $\mu$  é a média geral,  $\tau_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento, e  $\epsilon_{ij}$  o erro aleatório.

- a. Escreva esse modelo na forma matricial
- b. Usando a restrição de zerar o primeiro nível, mostre que a solução de mínimos quadrados  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$  é

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1j} \\ \bar{y}_{2j} - \bar{y}_{1j} \end{bmatrix}$$

Qual a interpretação desse resultado?

- c. Usando a restrição soma zero, mostre que a solução de mínimos quadrados é

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{y}_{1j} - \bar{y}_{2j} \end{bmatrix}$$

Qual a interpretação desse resultado?

7. Considere o seguinte modelo para um experimento com dois fatores e sem repetição

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

onde  $y_{ij}$  denota uma observação com o  $i$ -ésimo nível do fator A e o  $j$ -ésimo nível do fator B,  $\mu$  é a média geral,  $\alpha_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo nível do fator A,  $\beta_j$  é o efeito do  $j$ -ésimo nível do fator B,  $\gamma_{ij}$  é o efeito da interação do  $i$ -ésimo nível do fator A com o  $j$ -ésimo nível do fator B, e  $\epsilon_{ij}$  o erro aleatório.

- a. Escreva esse modelo na forma matricial
- b. Usando a restrição de zerar o primeiro nível, mostre que a solução de mínimos quadrados  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$  é

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} - y_{11} \\ y_{12} - y_{11} \\ y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22} \end{bmatrix}$$

Qual a interpretação desse resultado?

c. Usando a restrição soma zero, mostre que a solução de mínimos quadrados é

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{y}_{1j} - \bar{y}_{2j} \\ \bar{y}_{i1} - \bar{y}_{i2} \\ \bar{y}_{ii} - \bar{y}_{ij} \end{bmatrix}$$

Qual a interpretação desse resultado?

d. Usando o esquema de sinais, faça a representação geométrica do experimento. Considere o vetor de respostas como

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ ab \end{bmatrix}$$

Mostre que a solução de mínimos quadrados nesse caso pode ser escrita como

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} \\ \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} \\ \bar{y}_{AB+} - \bar{y}_{AB-} \end{bmatrix}$$

e. Qual a diferença, em termos de interpretação, entre os resultados das letras (c) e (d)? Por que isso acontece?

8. Considere o seguinte modelo para um experimento com dois fatores e com duas repetições ( $k = 1, 2$ )

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2$$

onde  $y_{ijk}$  denota uma observação com o  $i$ -ésimo nível do fator A, o  $j$ -ésimo nível do fator B e a  $k$ -ésima repetição,  $\mu$  é a média geral,  $\alpha_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo nível do fator A,  $\beta_j$  é o efeito do  $j$ -ésimo nível do fator B,  $\gamma_{ij}$  é o efeito da interação do  $i$ -ésimo nível do fator A com o  $j$ -ésimo nível do fator B, e  $\epsilon_{ijk}$  é o erro aleatório.

a. Escreva esse modelo na forma matricial

b. Usando a restrição de zerar o primeiro nível, mostre que a solução de mínimos quadrados  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$  é

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{y}_{11k} \\ \bar{y}_{21k} - \bar{y}_{11k} \\ \bar{y}_{12k} - \bar{y}_{11k} \\ \bar{y}_{11k} - \bar{y}_{12k} - \bar{y}_{21k} + \bar{y}_{22k} \end{bmatrix}$$

Qual a interpretação desse resultado?

c. Usando a restrição soma zero, mostre que a solução de mínimos quadrados é

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{y}_{1jk} - \bar{y}_{2jk} \\ \bar{y}_{i1k} - \bar{y}_{i2k} \\ \bar{y}_{iik} - \bar{y}_{ijk} \end{bmatrix}$$

Qual a interpretação desse resultado?

9. Quando utilizamos a restrição soma zero, porque as estimativas dos parâmetros (o vetor  $\hat{\beta}$ ) são sempre divididas por 2?

10. O que são os contrastes e os efeitos em experimentos fatoriais?