Estimação pontual e distribuições amostrais

Fernando de Pol Mayer

Laboratório de Estatística e Geoinformação (LEG)
Departamento de Estatística (DEST)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Sumário

Plano de aula

Inferência estatística

Definição (Inferência estatística)

Seja X uma variável aleatória com função densidade (ou de probabilidade) denotada por $f(x, \theta)$, em que θ é um parâmetro desconhecido. Chamamos de **inferência estatística** o problema que consiste em especificar um ou mais valores para θ, baseado em um conjunto de valores X.

A inferência pode ser feita através de duas formas:

- estimativa pontual
- estimativa intervalar

Redução de dados

Um experimentador usa as informações em uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ para se fazer inferências sobre θ.

Normalmente n é grande e fica inviável tirar conclusões baseadas em uma longa **lista** de números.

Por isso, um dos objetivos da inferência estatística é **resumir** as informações de uma amostra, da maneira mais **compacta** possível, mas que ao mesmo tempo seja também **informativa**.

Normalmente esse resumo é feito por meio de **estatísticas**, por exemplo, a média amostral e a variância amostral.

População e amostra

Definição (População)

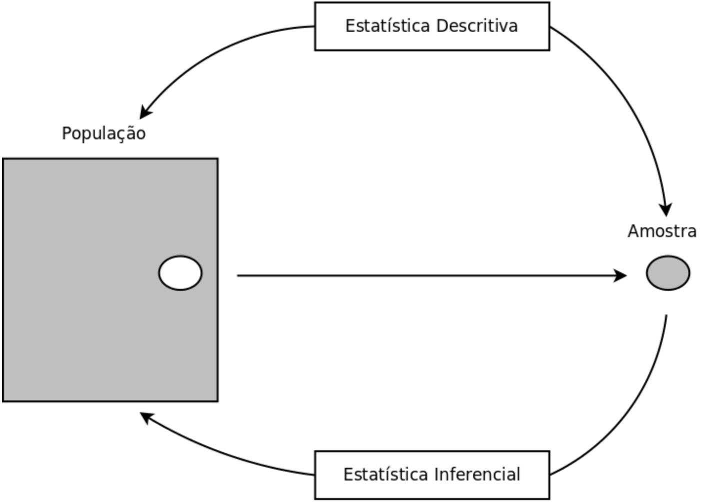
O conjunto de valores de uma característica associada a uma coleção de indivíduos ou objetos de interesse é dito ser uma população.

Definição (Amostra)

Uma sequência $X_1, \ldots, X_n$ de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com função densidade (ou de probabilidade) $f(x, \theta)$ é dita ser uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição de X. Como normalmente $n > 1$, então temos que a fdp ou fp conjunta será

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

População e amostra



Parâmetro e Estatística

População $\rightarrow$ **censo** $\rightarrow$ **parâmetro**

Uma medida numérica que descreve alguma característica da população, usualmente representada por letras gregas: θ, μ, σ, ...

Exemplo: média populacional $= \mu$

População $\rightarrow$ **amostra** $\rightarrow$ **estatística**

Uma medida numérica que descreve alguma característica da amostra, usualmente denotada pela letra grega do respectivo parâmetro com um acento circunflexo: $\hat{\theta}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, ... , ou por letras do alfabeto comum: $\bar{x}$, s, ...

Exemplo: média amostral $= \bar{x}$

Parâmetros

É importante notar que um parâmetro não é restrito aos modelos de probabilidade. Por exemplo:

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$ parâmetros: μ, σ^2

$Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda) \Rightarrow$ parâmetro: λ

$Y = \beta_0 + \beta_1 X \Rightarrow$ parâmetros: β_0, β_1

$L_t = L_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}] \Rightarrow$ parâmetros: L_∞, k, t_0

Definição (Estatística)

Qualquer função da amostra que não depende de parâmetros desconhecidos é denominada uma estatística, denotada por $T(\mathbf{X}) = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Exemplos:

- $T_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
- $T_2(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$
- $T_3(\mathbf{X}) = X_{(1)}$
- $T_4(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

Verificamos que T_1, T_2, T_3 são estatístcas, mas T_4 não.

Como é uma função da amostra, então uma estatística também é uma **variável aleatória** $\rightarrow$ distribuições amostrais

Se podemos utilizar $T(\mathbf{X})$ para extrais toda a informação da amostra, então dizemos que ela é **suficiente** para θ.

Definição (Estatística suficiente)

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X, com fdp pu fp $f(x, \theta)$ com $\theta \in \Theta$, dizemos que uma estatística $T(\mathbf{X})$ é suficiente para θ, se a distribuição condicional de $\mathbf{X}$ dado $T(\mathbf{X}) = t$ for independente de θ

$$f_{\mathbf{X}|T(\mathbf{X})}(\mathbf{x}|t) \quad \rightarrow \quad \text{independe de } \theta$$

A definição acima permite verificar se uma estatística é suficiente, mas não como encontrá-la. Dois conceitos fundamentais para encontrar estatísticas (conjuntamente) suficientes são:

- o **critério da fatoração de Neyman**
- o **critério da família exponencial**

Estimador

Definição (Espaço paramétrico)

O conjunto Θ em que θ pode assumir seus valores é chamado de **espaço paramétrico**

Definição (Estimador)

Qualquer estatística que assume valores em Θ é um estimador para θ.

Dessa forma, um **estimador pontual** para θ é qualquer estatística que possa ser usada para estimar esse parâmetro, ou seja,

$$\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$$

Estimador

Observações:

1. Todo estimador é uma estatística, mas nem toda estatística é um estimador.
2. O valor assumido pelo estimador pontual é chamado de **estimativa pontual**,

$$T(\mathbf{X}) = T(X_1, \ldots, X_n) = t$$

ou seja, o estimador é uma **função** da amostra, e a estimativa é o **valor observado** de um estimador (um número) de uma amostra particular.

Plano de aula

Estimação pontual

A ideia geral por trás da estimação pontual é muito simples:

Quando a amostragem é feita a partir de uma população descrita por uma função $f(x, \theta)$, o conhecimento de θ a partir da amostra, gera todo o conhecimento para a população.

Dessa forma, é natural que se procure um método para se achar um **bom** estimador para θ.

Existem algumas propriedades que definem o que é um bom estimador, ou o "**melhor**" estimador entre uma série de candidatos.

Estimação pontual

Localização do problema: Considere $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatóra de uma variável aleatória X com fdp ou fp $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Sejam:

$$\hat{\theta}_1 = T_1(X_1, \ldots, X_n) \qquad \hat{\theta}_2 = T_2(X_1, \ldots, X_n)$$

Qual dos dois estimadores pontuais é **melhor** para θ?

Como não conhecemos θ, não podemos afirmar que $\hat{\theta}_1$ é melhor do que $\hat{\theta}_2$ e vice-versa.

O problema da estimação pontual é então escolher um estimador $\hat{\theta}$ que se aproxime de θ segundo algumas **propriedades**.

Exemplo 1: Considere uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de uma variável aleatória $X \sim \mathrm{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$ e os estimadores pontuais para μ

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$$

Qual dos dois estimadores pode ser considerado como o **melhor** para estimar o verdadeiro valor de μ?

Considere os seguintes pseudo-códigos para um estudo de simulação do comportamento destes dois estimadores:

Estimação pontual

Pseudo-código 1

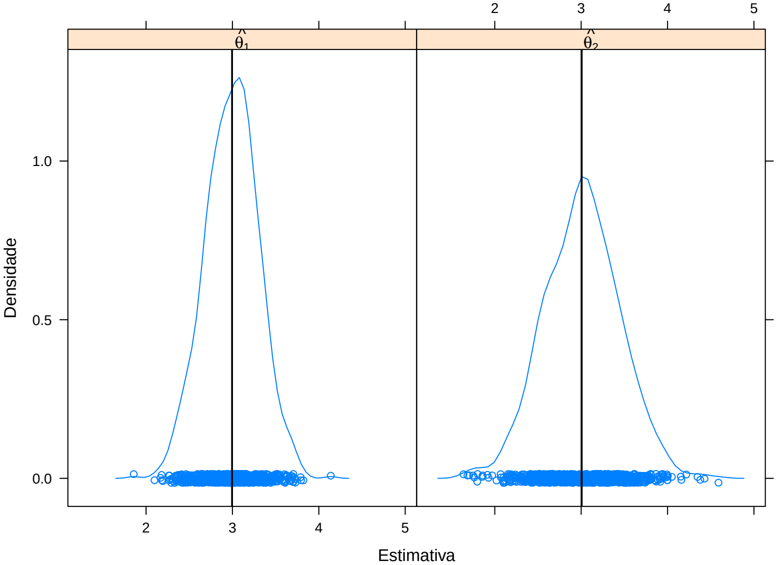
1. Simule uma amostra de tamanho $n = 10$ da distribuição considerada
2. Para essa amostra, calcule a média ($\hat{\theta}_1$) e o ponto médio ($\hat{\theta}_2$)
3. Repita os passos (1) e (2) acima $m = 1000$ vezes
4. Faça um gráfico da densidade das $m = 1000$ estimativas de $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ e verifique seu comportamento verifique

Pseudo-código 2

1. Simule amostras de tamanhos (n) 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 da distribuição considerada
2. Para cada amsotra de tamanho n, calcule a média ($\hat{\theta}_1$) e o ponto médio ($\hat{\theta}_2$)
3. Repita os passos (1) e (2) acima $m = 100$ vezes
4. Faça um gráfico das $m = 100$ estimativas de $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ para cada tamanho de amostra n e verifique seu comportamento

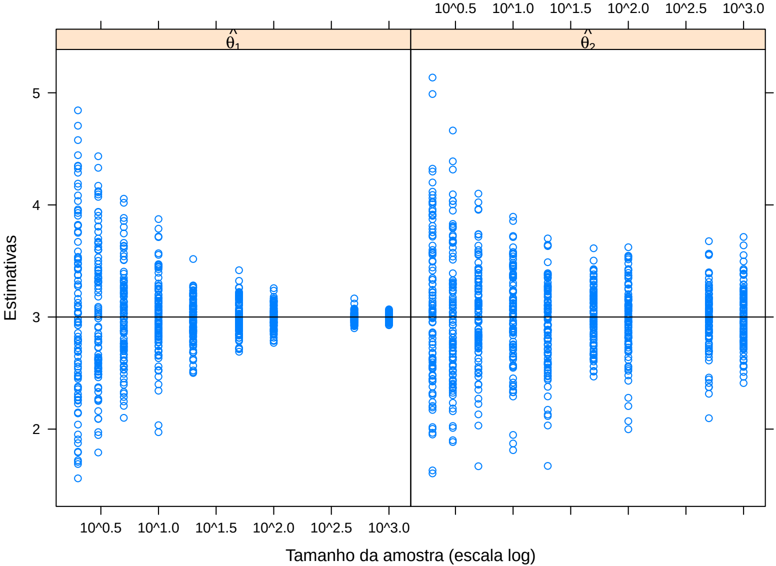
Estimação pontual

Pseudo-código 1 - $X \sim N(3, 1)$



Estimação pontual

Pseudo-código 2 - $X \sim \mathrm{N}(3, 1)$



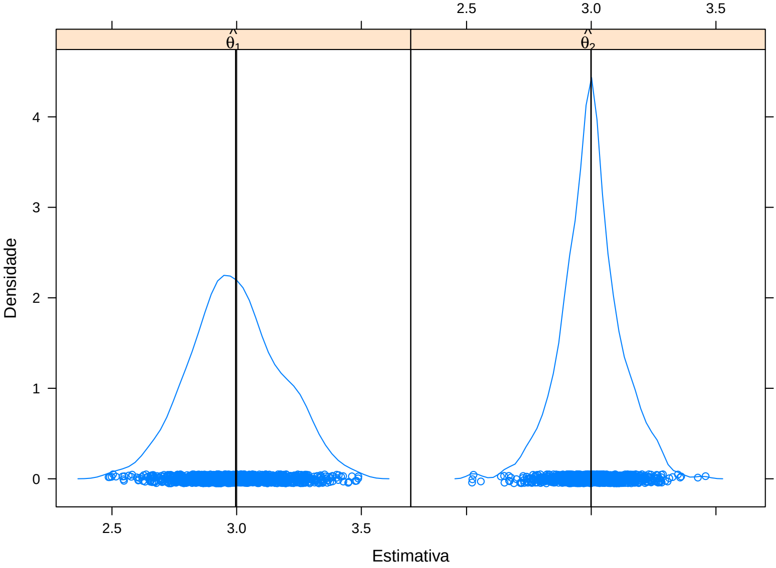
Exemplo 2: Considere uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de uma variável aleatória $Y \sim \mathrm{U}(\min = 2, \max = 4)$ (distribuição uniforme no intervalo [2,4]) e os estimadores pontuais para μ

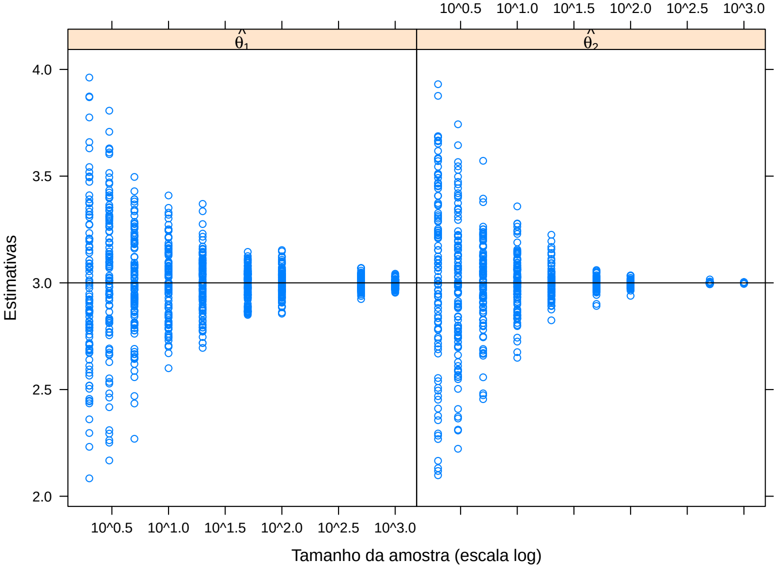
$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$$

Qual dos dois estimadores pode ser considerado como o **melhor** para estimar a média de Y?

Estimação pontual

Pseudo-código 1 - $Y \sim \mathrm{U}(2, 4)$




$\hat{\theta}_1$
$\hat{\theta}_2$
Estimativas
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
10^0.5
10^1.0
10^1.5
10^2.0
10^2.5
10^3.0
Tamanho da amostra (escala log)

Plano de aula

Propriedades dos estimadores

De modo geral, um "**bom**" estimador deve ser

1. Não viciado
2. Consistente
3. Eficiente

Definição (Erro quadrático médio (EQM))

O Erro Quadrático Médio (EQM) de um estimador $\hat{\theta}$ de $\hat{\theta}$ é dados por

$$\begin{aligned} \mathrm{EQM}[\hat{\theta}] &= \mathrm{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\ &= \mathrm{Var}[\hat{\theta}] + \mathrm{B}[\hat{\theta}]^2 \end{aligned}$$

onde

$$\mathrm{B}[\hat{\theta}] = \mathrm{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

é denominado de **vício** do estimador $\hat{\theta}$. Portanto, dizemos que um estimador é **não viciado** para θ quando

$$\mathrm{B}[\hat{\theta}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

Definição (Estimador não viciado)

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$, uma amostra aleatória de uma variável aleatória com fdp ou fp $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$, dizemos que o estimador $\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$ é não viciado para θ se

$$\mathrm{E}[\hat{\theta}] = \mathrm{E}[T(\mathbf{X})] = \theta \qquad \forall\, \theta \in \Theta$$

Um estimador $\hat{\theta}$ é dito **assintoticamente não viciado** se

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

Ou seja, para grandes amostras, $\hat{\theta}$ passa a ser imparcial.

Definição (Estimador consistente)

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$, uma amostra aleatória de uma variável aleatória com fdp ou fp $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$, o estimador $\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$ é consistente para θ se satisfaz simultaneamente

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Var}[\hat{\theta}] = 0$$

Definição (Eficiência relativa)

Sejam $\hat{\theta}_1 = T_1(\mathbf{X})$ e $\hat{\theta}_2 = T_2(\mathbf{X})$ dois estimadores pontuais **não viciados** para θ. A eficiência relativa de $\hat{\theta}_1$ em relação a $\hat{\theta}_2$ é

$$\text{ER}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \frac{\text{Var}[\hat{\theta}_1]}{\text{Var}[\hat{\theta}_2]}$$

Se:

- $\text{ER}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] > 1 \Rightarrow \hat{\theta}_2$ é mais eficiente
- $\text{ER}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] < 1 \Rightarrow \hat{\theta}_1$ é mais eficiente

Propriedades dos estimadores

Exemplo: média amostral $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ como estimador da média populacional μ:

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Portanto $\bar{X}$ é um estimador **não viciado** e **consistente** para μ.

Propriedades dos estimadores

Exemplo: variância amostral $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ como estimador da variância populacional σ^2:

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

Portanto $\hat{\sigma}^2$ é um estimador **viciado** para σ^2. (Embora seja um estimador **assintoticamente** não viciado).

Para eliminar esse vício, podemos definir então um novo estimador: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, e

$$E(s^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \sigma^2$$

que é então um estimador **não viciado** para σ^2.

Propriedades dos estimadores

O **erro padrão** de um estimador dá uma ideia da **precisão** da estimativa.

Definição (Erro padrão de um estimador)

O erro padrão (EP) de um estimador é o seu desvio-padrão (raíz quadrada da variância), ou seja,

$$\text{EP}(\hat{\theta}) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}$$

Exemplo: Sabemos que a distribuição de $\bar{X}$ tem média μ e variância σ^2/n. Então o erro padrão de $\bar{X}$ é

$$\text{EP}(\bar{X}) = \sqrt{\text{Var}(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Plano de aula

Erros amostrais

Erros amostrais

Diferença entre o resultado da amostra e o verdadeiro valor da população. Ocorre pois as amostras são **aleatórias**!
Exemplo: a diferença entre a média amostral $\bar{X}$ e a média populacional μ

$$e = \bar{X} - \mu$$

é chamada de *erro amostral da média*.

Erros não amostrais

Ocorre quando os dados amostrais são coletados **incorretamente**, devido a uma *amostra tendenciosa*, instrumento de medida defeituoso, anotações erradas, ...

Erros amostrais

Erros amostrais

Diferença entre o resultado da amostra e o verdadeiro valor da população. Ocorre pois as amostras são **aleatórias**!
Exemplo: a diferença entre a média amostral $\bar{X}$ e a média populacional μ

$$e = \bar{X} - \mu$$

é chamada de *erro amostral da média*.

Erros não amostrais

Ocorre quando os dados amostrais são coletados **incorretamente**, devido a uma *amostra tendenciosa*, instrumento de medida defeituoso, anotações erradas, ...

Atenção!

Os erros não amostrais não devem existir, ou devem ser minimizados

Erros amostrais

Não importa quão bem a amostra seja coletada, os **erros amostrais** sempre irão ocorrer

Cada vez que uma amostra aleatória for retirada de uma população, um resultado diferente será observado

Selecione uma amostra de tamanho $n = 5$ das idades dos estudantes de uma sala: `22 21 24 23 20 22 21 25 24 24 23 19 25 24 23 23 20 21 23 20 23 22 23 23 25 25 20 23 24 20`

Repita 5 vezes (tente ser o mais aleatório possível!), calcule a média de cada amostra, e compare com a média populacional $\mu = 22,5$

Um exemplo

Amostra	$\bar{x}$	$e = \bar{x} - \mu$
23 23 23 24 23	23.2	0.7
24 22 20 20 20	21.2	-1.3
21 20 19 22 25	21.4	-1.1
22 23 25 20 22	22.4	-0.1
21 20 22 24 20	21.4	-1.1

- O que isso nos diz a respeito das médias amostrais?
- O que isso nos diz a respeito da variabilidade das médias amostrais?
- E se fizemos uma "<u>média das médias</u>" de todas as amostras?

Plano de aula

Distribuições amostrais

Suponha que vamos retirar uma amostra de $n = 100$ indivíduos de uma população

Se selecionarmos aleatoriamente um indivíduo desta população, ele terá apenas um valor, x_1, de todos os possíveis valores da variável aleatória X_1

Da mesma forma, um segundo indivíduo amostrado aleatoriamente terá o valor x_2 da variável aleatória X_2, e assim sucessivamente até o centésimo indivíduo amostrado com valor x_{100} da variável aleatória X_{100}

Distribuições amostrais

De maneira geral, uma amostra de tamaho n será descrita pelos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ das variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n \Rightarrow$ **Amostra Aleatória**

No caso de uma Amostragem Aleatória Simples (AAS) **com reposição**, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ serão variáveis aleatórias **independentes e identicamentes distribuídas** (iid) com função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade (fdp) $f(x)$

Isto significa que quando observamos cada amostra x_i de uma população indexada por um parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ (um escalar ou um vetor), então cada observação possui fp ou fdp dada por $f(x, \boldsymbol{\theta})$

Distribuições amostrais

Se somente uma observação X é feita, então as probabilidades referentes a X podem ser calculadas diretamente utilizando $f(x, \boldsymbol{\theta})$

No entanto, na maioria das vezes temos $n > 1$ observações de X. Como vimos que as variáveis X_i são iid, temos que a fp ou fdp conjunta será

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \boldsymbol{\theta}) = f(x_1, \boldsymbol{\theta}) \cdot f(x_2, \boldsymbol{\theta}) \cdots f(x_n, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta})$$

Onde o mesmo valor do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ é utilizado em cada um dos termos no produto

Distribuições amostrais

Exemplo: distribuição conjunta da Bernoulli(π)

Para uma observação, temos que a fp da Bernoulli(π) é

$$f(x, \pi) = \pi^x (1-\pi)^{1-x} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$$

Para uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \pi) &= \prod_{i=1}^{n} \pi^{x_i} (1-\pi)^{1-x_i} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \\ &= \pi^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\pi)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x_i) \end{aligned}$$

Distribuições amostrais

Quando uma amostra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é obtida, geralmente estamos interessados em um resumo destes valores, que pode ser expresso matematicamente pela estatística $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

A função $T(\cdot)$ pode ser um valor real ou um vetor. Dessa forma, $Y = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **é também uma variável aleatória** (ou vetor aleatório). Se Y é uma VA, *então ela possui uma distribuição de probabilidade*.

Uma vez que a amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tem uma estrutura probabilística simples (porque X_i são iid), Y é particularmente tratável. Uma vez que a distribuição de Y é derivada desta estrutura, vamos denominá-la de **distribuição amostral** de Y.

Distribuições amostrais

Definição (Distribuição amostral)

A distribuição de probabilidade de uma estatística $Y = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é denominada de **distribuição amostral** de Y. Assim, uma estatística também é uma variável aleatória, pois seus valores mudam conforme a amostra aleatória

Exemplo: duas estatísticas comumente utilizadas para o resumo de uma amostra aleatória são a **média amostral**

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

e a **proporção amostral**

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Plano de aula

Distribuição amostral da média

Para estudarmos a distribuição amostral da estatística $\bar{X}$, considere uma população identificada pela VA X, com parâmetros

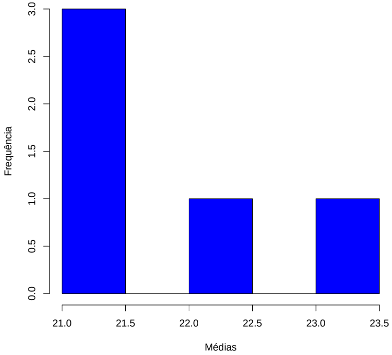
$$\mathrm{E}(X) = \mu = \text{média} \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \text{variância}$$

supostamente conhecidos. Em seguida, realizamos os seguintes passos:

1. Retiramos m amostras aleatórias (AAS com reposição) de tamanho n dessa população
2. Para cada uma das m amostras, calculamos a média amostral $\bar{x}$
3. Verificamos a distribuição das m médias amostrais e estudamos suas propriedades

Voltando ao exemplo . . .

Amostra	$\bar{x}$	$\epsilon = \bar{x} - \mu$
23 23 23 24 23	23.2	0.7
24 22 20 20 20	21.2	-1.3
21 20 19 22 25	21.4	-1.1
22 23 25 20 22	22.4	-0.1
21 20 22 24 20	21.4	-1.1



Voltando ao exemplo ...

Do exemplo anterior, temos que $\mu = 22,5$, e $\sigma^2 = 3,09$

Para esta tabela, com $m = 5$ e $n = 5$:

- A média das médias é $\mu_{\bar{X}} = 21,9$
- A variância das médias é $\sigma^2_{\bar{X}} = 0,732$

Distribuição amostral da média

E se pudessemos retirar **todas** as amostras **com reposição** de tamanho $n = 5$ dessa população???

Teriamos que fazer $N^n = 20^5 = 3.200.000$ amostragens!

Para $n = 10 \Rightarrow N^n = 20^{10} = 1,024 \times 10^{13}$

Para $n = 15 \Rightarrow N^n = 20^{15} = 3,2768 \times 10^{19}$

O computador pode fazer isso, e o resultado é (para $n = 15$)

- $\mu_{\bar{X}} = 22,5$
- $\sigma^2_{\bar{X}} \approx 0,2 = \sigma^2/n \approx 3,09/15$

Conclusão:

- A média de **todas** as médias é igual à média da população!
- A variância das médias é menor porque a variabilidade entre as médias é menor!

Voltando ao exemplo . . .

Veja a figura `dist_amostral_idades.pdf`

- O primeiro gráfico é a distribuição da população original
- O segundo gráfico é a distribuição de 1000 médias, calculadas a partir de 1000 amostras de tamanho 5 ($m = 1000$ e $n = 5$)
- Os demais gráficos mostram a distribuição amostral de 1000 médias calculadas com amostras de tamanho $n = 10$ e $n = 15$
- Repare que:
    - A distribuição das 1000 médias se torna cada vez mais próxima de uma normal, conforme o tamanho da amostra aumenta
    - A variabilidade da distribuição amostral das médias diminui conforme o tamanho da amostra aumenta
    - A distribuição amostral tende a se concentrar cada vez mais em torno da média populacional verdadeira

Distribuição amostral da média

Através do estudo da distribuição da média amostral chegamos em um dos resultados mais importantes da inferência estatística

Teorema (Distribuição amostral da média)

- $\text{E}(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$
- $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2/n$

Portanto, se

$$X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{então} \quad \bar{X} \sim \text{N}(\mu_{\bar{X}}, \sigma^2_{\bar{x}})$$

mas, como

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \quad \text{e} \quad \sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2/n$$

então, a **distribuição amostral** da média amostral $\bar{X}$ é

$$\bar{X} \sim \text{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Distribuição amostral da média

Teorema (Teorema Central do Limite (TCL))

Para amostras aleatórias simples $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, retiradas de uma população normal com média μ e variância σ^2, a distribuição amostral da média $\bar{X}$, terá forma dada por

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

no limite quando $n \to \infty$, que é a ditribuição normal padrão: $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

- Se a população for normal, então $\bar{X}$ terá distribuição *exata* normal.
- A rapidez da convergência para a normal depende da distribuição da população da qual as amostras foram geradas

Este teorema nos mostra que, para amostras suficientemente grandes ($n > 30$), **a média amostral $\bar{X}$ converge para o verdadeiro valor da média populacional** μ (é um **estimador não viesado** de μ)

Além disso, a variância das médias amostrais $\sigma^2_{\bar{X}}$ tende a diminuir conforme $n \to \infty$ (é um estimador **consistente**)

Estes resultados sugerem que, quando o tamanho da amostra aumenta,

independente do formato da distribuição da população original,

a distribuição amostral de $\bar{X}$ aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal, um resultado fundamental na teoria de probabilidade conhecido como **Teorema Central do Limite**

Distribuição amostral da média

Exemplo computacional $\rightarrow$ veja a figura `dist_amostrais.pdf`

Distribuição amostral da média

Em palavras, o teorema garante que que para n grande, a distribuição da média amostral, devidamente padronizada, **se comporta segundo um modelo normal** com média 0 e variância 1.

Pelo teorema, temos que quanto maior o tamanho da amostra, **melhor é a aproximação**.

Estudos envolvendo simulações mostram que, em muitos casos, **valores de n ao redor de 30** fornecem aproximações bastante boas para as aplicações práticas.

Distribuição amostral da média

Quando calculamos a probabilidade de um valor estar em um determinado intervalo de valores, podemos usar o modelo Normal, como vimos anteriormente.

No entanto, quando temos uma **amostra**, e queremos calcular probabilidades associadas à **média amostral** (a probabilidade da média amostral estar em um determinado intervalo de valores), precisamos necessariamente usar os resultados do TCL.

Já vimos que o **erro amostral da média** é dado pela diferença entre $\bar{X}$ e μ, ou seja,

$$e = \bar{X} - \mu$$

Dessa forma, se

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

então a distribuição de e também será normal padrão, pois

$$\frac{e\sqrt{n}}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

Esse resultado será fundamental na construção de estimativas intervalares.

Usando o TCL

Exemplo: Uma máquina de empacotamento que abastece pacotes de feijão apresenta distribuição normal com média de 500 g e desvio-padrão de 22 g. De acordo com as normas de defesa do consumidor, os pacotes de feijão não podem ter peso inferior a 2% do estabelecido na embalagem.

a) Determine a probabilidade de **um pacote** selecionado aleatoriamente ter a peso inferior a 490 g.

b) Determine a proabilidade de **20 pacotes** selecionados aleatoriamente terem peso médio inferior a 490 g.

c) Como podemos interpretar os resultados dos itens anteriores? O que é mais indicado para se tomar uma decisão sobre o funcionamento da máquina: selecionar um pacote ou uma amostra?

Usando o TCL

Exemplo: Uma pesquisa com 12000 estudantes mostrou que a média de horas de estudo por semana foi de 7,3 horas, com desvio-padrão de 4,2 horas. **O tempo de estudo não apresenta distribuição normal**. Com isso calcule:

a) A probabilidade de que **um** estudante exceda 8 horas de estudo por semana.

b) Dada uma amostra de 45 estudantes, a probabilidade de que o **tempo médio** de estudo exceda 8 horas por semana.

c) Dada uma amostra de 45 estudantes, a probabilidade de que o **tempo médio** de estudo seja igual ou superior a 7 horas por semana.

Plano de aula

Distribuição amostral da proporção

Muitas vezes, o interesse é conhecer uma **proporção**, e não a média de uma população.

Suponha que uma amostra de tamanho n foi obtida de uma população, e que $x \leq n$ observações nessa amostra pertençam a uma classe de interesse (ex.: pessoas do sexo masculino).

Dessa forma, a proporção amostral

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{número de sucessos}}{\text{total de tentativas}}$$

é o "melhor estimador" para a proporção populacional p.

Note que n e p são os parâmetros de uma **distribuição binomial**.

Distribuição amostral da proporção

Exemplo: em 5 lançamentos de uma moeda considere que o evento "cara" (C) seja o sucesso ("sucesso" = 1; "fracasso" = 0). Um possível resultado seria o conjunto {C, C, R, R, C}. A proporção amostral seria

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{número de sucessos}}{\text{total de tentativas}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Exemplo: em uma amostra de 2500 eleitores de uma cidade, 1784 deles eram favoráveis à reeleição do atual prefeito. A proporção amostral é então

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{número de sucessos}}{\text{total de tentativas}} = \frac{1784}{2500} = 0,7136$$

Distribuição amostral de uma proporção

A distribuição amostral de uma **proporção** é a distribuição das proporções de todas as possíveis amostras de tamanho n retiradas de uma população

Ver figura `dist_amostral_proporcoes.pdf`:

- Uma moeda é lançada $n = 10$ vezes, e a proporção de caras é registrada
- Esse processo é repetido $m = 10, 30, 100, 1000, 10000$ vezes

Com isso, concluimos que:

- A média das proporções para $m \to \infty$ tende para a verdadeira proporção populacional $p = 0,5$
- A **distribuição amostral** das proporções segue aproximadamente uma **distribuição normal**

Distribuição amostral de uma proporção

Através do estudo da distribuição amostral da proporção, chegamos aos seguintes resultados

- $\mathrm{E}(\hat{p}) = \mu_{\hat{p}} = p$
- $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \sigma^2_{\hat{p}} = \frac{p(1-p)}{n}$

Ou seja, $\hat{p}$ é um estimador **não viciado** e **consistente** para p.

Assim, a **distribuição amostral** de $\hat{p}$ será

$$\hat{p} \sim \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Distribuição amostral de uma proporção

Note que o **erro padrão** de $\hat{p}$ será

$$\text{EP}(\hat{p}) = \sqrt{\text{Var}(\hat{p})} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Assim, usando o TCL, podemos mostrar que a quantidade

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \text{N}(0, 1)$$

segue uma distribuição **normal padrão** com média 0 e variância 1.

Quando não conhecemos p, usamos $\hat{p} = x/n$ como estimativa para calcular o erro padrão.

A normal como aproximação da binomial

Sob determinadas condições, podemos usar a distribuição normal como aproximação da distribuição binomial.

Se X for uma VA binomial com parâmetros n e p, então

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

será uma VA **normal padrão**, $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$, desde que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- $np \geq 5$
- $n(1-p) \geq 5$

Dessa forma, podemos calcular probabilidades para uma VA binomial, aproximadas por uma distribuição normal com média $\mu = np$ e desvio-padrão $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Plano de aula

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2006. [Cap. 10]
- Magalhães, MN; Lima, ACP. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 2008. [Cap. 7]
- Montgomery, DC; Runger, GC. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2012. [Cap. 7]