Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade

Fernando de Pol Mayer

Laboratório de Estatística e Geoinformação (LEG)
Departamento de Estatística (DEST)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Sumário

Plano de aula

Probabilidades

Já vimos que as probabilidades podem ser definidas de diferentes maneiras:

- Definição **clássica**
- Definição **frequentista**
- Definição subjetiva
- Definição axiomática

Vamos relembrar algumas definições

Um experimento, que ao ser realizado sob as mesmas condições **não** produz os mesmos resultados, é denominado um **experimento aleatório**. Exemplo: lançamento de uma moeda, medir altura, ...

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral** (Ω). Pode conter um número finito ou infinito de pontos. Exemplo: {cara, coroa}, $\mathbb{R}$, ...

Os elementos do espaço amostral (**pontos amostrais**) são denotados por ω. Exemplo: $\omega_1 =$ cara, $\omega_2 =$ coroa.

Todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório, é um **evento**. Exemplo: A = "sair cara", B = "sair face par".

Axiomas de probabilidade

Vamos considerar **probabilidade** como sendo uma função $P(\cdot)$ que associa valores numéricos à um evento A do espaço amostral, e que satisfaz as seguintes condições

i) $P(\Omega) = 1; \; P(\varnothing) = 0$

ii) $0 \leq P(A) \leq 1$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se, e seomente se $A \cap B = \varnothing$

Os axiomas asseguram que as probabilidades podem ser interpretadas como **frequências relativas**.

Variáveis aleatórias

Em probabilidade, uma função X que associa a cada evento do espaço amostral um número real $X(\omega) \in \mathbb{R}$, é denominada uma **variável aleatória** (V.A.)

Uma variável aleatória pode ser classificada como **discreta** ou **contínua**, dependendo do domínio dos valores de X.

Exemplo: o número de alunos em uma sala é uma variável aleatória (discreta), denotada por X (maiúsculo). Uma observação dessa variável é denotada pela respectiva letra minúscula, *e.g.*, $x = 50$ alunos.

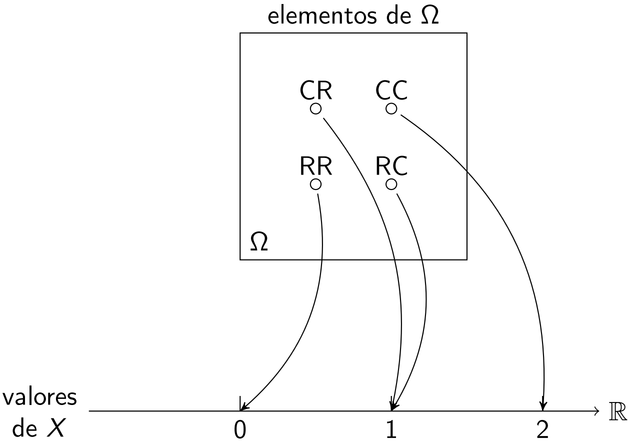
Em geral, denotamos a probabilidade de uma V.A. X assumir determinado valor x como

$$P[X] \quad \text{ou} \quad P[X = x]$$

Variáveis aleatórias

Experimento

Lançamento de duas moedas. X = número de resultados cara (C)



Variáveis aleatórias

Dada a realização de um experimento aleatório qualquer, com um certo espaço de probabilidade, desejamos estudar a **estrutura probabilística** de quantidades associadas à esse experimento.

Note que antes da realização de um experimento, **não sabemos seu resultado**, entretanto seu espaço de probabilidade pode ser previamente estabelecido.

Dessa forma, podemos atribuir probabilidades aos *eventos* desse espaço amostral, dando origem ao conceito de **variável aleatória**.

Distribuições de probabilidade

Existem diversos modelos probabilísticos que procuram descrever vários tipos de variáveis aleatórias: são as **distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias** (discretas ou contínuas).

A distribuição de probabilidades de uma V.A. X é, portanto, uma descrição das probabilidades associadas com os possíveis valores de X. Os valores que X assume determinam o **suporte** (S) da V.A.

- **Variáveis discretas** $\rightarrow$ suporte em um conjunto de valores enumeráveis (finitos ou infinitos)
- **Variáveis contínuas** $\rightarrow$ suporte em um conjunto não enumerável de valores

Distribuições de probabilidade

Denomina-se de **distribuição de probabilidade** de alguma variável aleatória, a **regra** geral que define a

- **função de probabilidade** (fp) (V.A.s discretas), ou a
- **função densidade de probabilidade** (fdp) (V.A.s contínuas)

para a variável de interesse.

Existem muitas distribuições de probabilidade, mas algumas merecem destaque por sua importância prática.

Estas distribuições também são chamadas de **modelos probabilísticos**

Plano de aula

Variáveis aleatórias discretas

Uma V.A. é classificada como discreta se assume somente um conjunto enumerável (finito ou infinito) de valores.

Exemplos:

- Número de caras ao lançar 3 moedas
- Número de chamadas telefônicas que chegam à uma central em 1 hora
- Número de votos recebidos
- Aprovação no vestibular
- Grau de queimadura na pele

Variáveis aleatórias discretas

A **função de probabilidade** (fp) da VA discreta X, que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, é a função que atribui probabilidades a cada um dos possíveis valores: $\{[x_i, p(x_i)], i = 1, 2, \ldots\}$, ou seja,

$$P[X = x_i] = p(x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

com as seguintes propriedades:

i) A probabilidade de cada valor deve estar entre 0 e 1

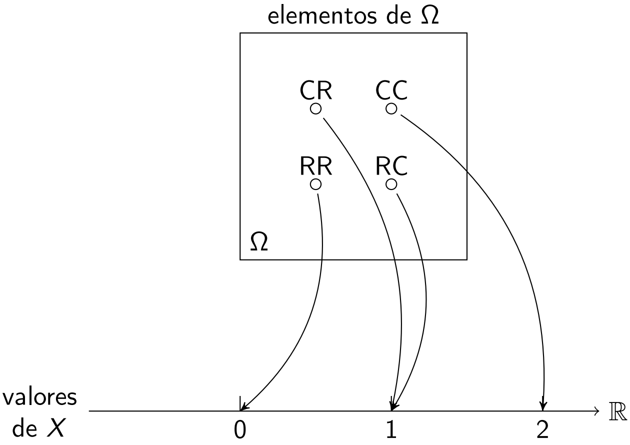
$$0 \leq p(x_i) \leq 1, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots$$

ii) A soma de todas as probabilidades é igual a 1

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

Experimento

Lançamento de duas moedas. X = número de resultados cara (C)



Variáveis aleatórias discretas

Podemos montar uma tabela de distribuição de frequência para a variável aleatória X = número de resultados cara (C)

X	Frequência (f_i)	Frequência relativa (fr_i)
0	1	1/4
1	2	2/4
2	1	1/4
Total	4	1

Assim podemos associar a cada valor de X sua **probabilidade** correspondente, como resultado das **frequências relativas**

$$P[X = 0] = 1/4$$
$$P[X = 1] = 2/4 = 1/2$$
$$P[X = 2] = 1/4$$

Variáveis aleatórias discretas

Dessa forma, a **distribuição de probabilidade** da variável aleatória X = número de resultados cara (C) é a tabela

X	$P[X = x_i] = p(x_i)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4
Total	1

Repare que as propriedades da função de probabilidade estão satisfeitas:

i) As probabilidades $p(x_i)$ estão entre 0 e 1

ii) A soma de todas as probabilidades $p(x_i)$ é 1

Dessa forma, a **distribuição de probabilidade** da variável aleatória X = número de resultados cara (C) é a tabela

X	$P[X = x_i] = p(x_i)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4
Total	1

Repare que as propriedades da função de probabilidade estão satisfeitas:

i) As probabilidades $p(x_i)$ estão entre 0 e 1
ii) A soma de todas as probabilidades $p(x_i)$ é 1

Qual seria a média desta variável aleatória X?

Plano de aula

Esperança

O **valor esperado**, ou **média**, ou **esperança matemática** é uma quantidade utilizada como resumo do comportamento de uma V.A.

A média de uma distribuição de probabilidade é a esperança de sua variável aleatória.

A esperança de uma V.A. X é obtida multiplicando-se cada valor de $X = x_i$, por sua respectiva probabilidade $P[X = x_i]$, e somando os produtos resultantes

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P[X = x_i]$$

A esperança é o valor médio que **esperaríamos** se o experimento continuasse sendo repetido várias vezes.

Esperança

Note que o valor esperado **pondera** os valores assumidos pela V.A. pelas respectivas probabilidades, e não precisa ser um dos valores da variável.

A esperança está sempre compreendida entre os valores extremos da V.A.

A esperança também é importante pois serve como caracterização de diversas distribuições de probabilidade $\rightarrow$ **parâmetro**

Esperança

Exemplo: Determine o valor esperado do número de solicitações de empréstimos aprovados por semana (X)

X	$P[X = x_i]$
0	0,1
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,15
5	0,1
6	0,05
Total	1

Esperança

Exemplo: Determine o valor esperado do número de solicitações de emprétimos aprovados por semana (X)

X	$P[X = x_i]$	$x_i \cdot P[X = x_i]$
0	0,1	0
1	0,1	0,1
2	0,2	0,4
3	0,3	0,9
4	0,15	0,6
5	0,1	0,5
6	0,05	0,3
Total	1	2,8

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{7} x_i \cdot P[X = x_i] \\
&= 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,1 + \cdots + 5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,05 \\
&= 2,8
\end{aligned}
$$

Variância

A variância, como já vimos, dá o grau de dispersão dos valores de uma variável aleatória em relação à sua média ou esperança $\mathrm{E}(X)$. A forma geral para o cálculo é

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P[X = x_i]\end{aligned}$$

No entanto, uma foma mais fácil operacionalmente pode ser deduzida a partir da primeira, e temos

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

onde

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P[X = x_i]$$

Variância

O **desvio-padrão** de uma variável aleatória X será portanto

$$\text{DP}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Assim como a esperança $\text{E}(X)$, a variância $\text{Var}(X)$ também tem importância na caracterização de diversas distribuições de probabilidade.

Quando se conhece a esperança e a variância de um modelo, ele fica totalmente caracterizado, ou seja, sabemos seu formato geral

Exemplo: Calcule a variância e o desvio-padrão para o número de solicitações de emprétimos aprovados por semana (X)

X	$P[X = x_i]$	$x_i \cdot P[X = x_i]$	X^2	$x_i^2 \cdot P[X = x_i]$
0	0,1	0	0	0
1	0,1	0,1	1	0,1
2	0,2	0,4	4	0,8
3	0,3	0,9	9	2,7
4	0,15	0,6	16	2,4
5	0,1	0,5	25	2,5
6	0,05	0,3	36	1,8
Total	1	2,8		10,3

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \textstyle\sum_{i=1}^{7} x_i \cdot P[X = x_i] = 2,8 \\
\mathrm{E}(X^2) &= \textstyle\sum_{i=1}^{7} x_i^2 \cdot P[X = x_i] = 10,3 \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= 10,3 - 2,8^2 \\
&= 2,46
\end{aligned}
$$

Exercício: A tabela abaixo apresenta as estimativas de retorno para dois investimentos (A e B), em R$ 1.000,00, sob três condições econômicas com diferentes probabilidades

Condição	Probabilidade	Investimento A	Investimento B
Recessão	0,25	200	-100
Estável	0,45	50	100
Expansão	0,3	-100	250

a) Calcule a esperança para cada um dos investimentos, para verificar qual investimento maximiza o lucro

b) Calcule o desvio-padrão para cada um dos investimentos, para verificar qual investimento minimiza o risco

Propriedades de esperança e variância

Dada a VA discreta X e a respectiva função de probabilidade $P[X = x_i]$, a esperança da função $h(X)$ é dada por

$$E[h(X)] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \cdot P[X = x_i]$$

Com isso, pode ser demonstrado que a esperança e a variância possuem as seguintes propriedades:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Sendo a e b constantes.

Plano de aula

Distribuições discretas de probabilidade

Os modelos de probabilidade são utilizados para descrever vários fenômenos ou situações que encontramos na natureza, ou experimentos por nós construídos.

Esses modelos são expressos por uma família de **distribuições de probabilidade** que dependem de um ou mais **parâmetros**.

O modelo deve representar, na medida do possível, a complexidade que envolve o mundo real da população em estudo.

Lembrando que uma V.A. fica completamente caracterizada pela sua **função de probabilidade** e seus parâmetros.

Modelo Bernoulli

Definição: Uma variável aleatória X segue o modelo Bernoulli se assume apenas os valores 0 ("fracasso") ou 1 ("sucesso"). Sua função de probabilidade é dada por

$$P[X = x] = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1$$

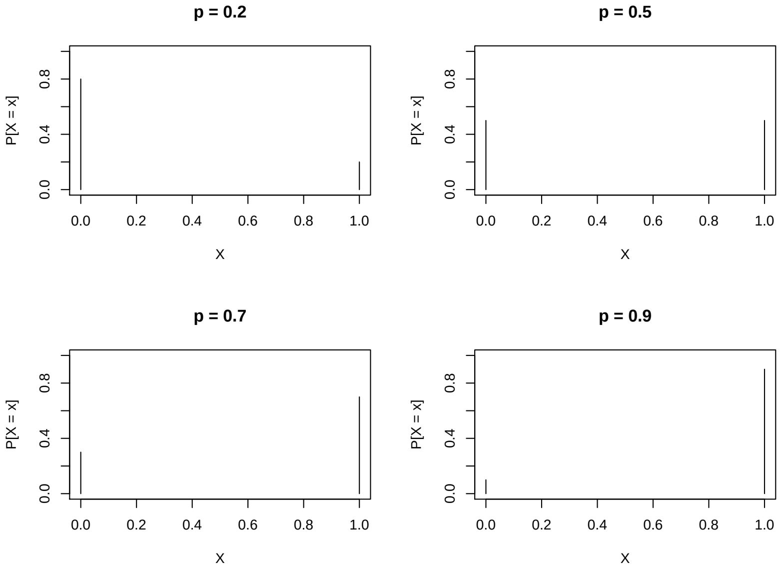
onde o parâmetro $0 \leq p \leq 1$ é a probabilidade de sucesso.

Notação: $X \sim \text{Ber}(p)$

Esperança e variância: $\text{E}(X) = p$ e $\text{Var}(X) = p(1-p)$

Exemplo: lançamento de uma moeda, sexo de um bebê, resultado de um teste de germinação, ...

Modelo Bernoulli



Modelo Bernoulli

Exemplo: No lançamento de uma moeda, considere cara como o evento de sucesso. Qual a probabilidade de sair cara, sendo que $p = 1/2$?

$$X = \begin{cases} 1, & \text{cara} \\ 0, & \text{coroa} \end{cases}$$

Temos que

X	$P[X = x]$	$p = 1/2$
0	$1 - p$	$1/2$
1	p	$1/2$

Modelo binomial

Definição: Seja um experimento realizado dentro das seguintes condições:

i) São realizados n "ensaios" de Bernoulli independentes

ii) Cada ensaio só pode ter dois resultados possíveis: "sucesso" ou "fracasso"

iii) A probabilidade p de sucesso em cada ensaio é constante

Vamos associar a V.A. X o número de sucessos em n ensaios de Bernoulli. Portanto X poderá assumir os valores $0, 1, \ldots, n$.

Modelo binomial

Vamos determinar a distribuição de probabilidade de X, através da probabilidade de um número genérico x de sucessos.

Suponha que ocorram sucessos (1) apenas nas x primeiras provas, e fracassos (0) nas $n - x$ provas restantes

$$\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{x}, \underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{n-x}$$

Como as provas são independentes, a probabilidade de ocorrência de x sucessos em n tentativas é uma extensão do modelo de Bernoulli para n ensaios, ou seja,

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdots p}_{x} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p)}_{n-x} = p^x (1-p)^{n-x}$$

Modelo binomial

Porém, o evento: "x sucessos em n provas" pode ocorrer de diferentes maneiras (ordens) distintas, todas com a mesma probabilidade.

Como o número de ordens é o número de combinações de n elementos tomados x a x, então a probabilidade de ocorrerem x sucessos em n provas de Bernoulli será então a distribuição binomial, dada por

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

onde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

é o **coeficiente binomial**, que dá o número total de combinações possíveis de n elementos, com x sucessos.

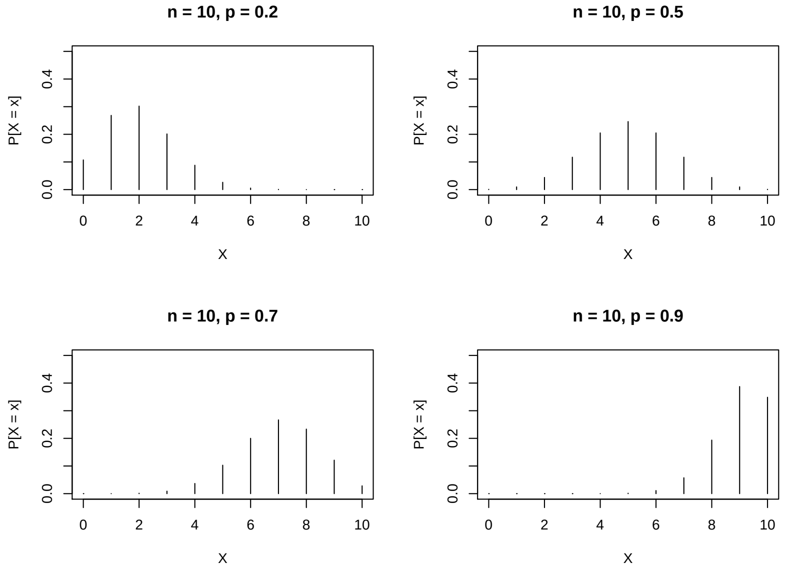
Modelo binomial

Notação: $X \sim \text{bin}(n, p)$

Esperança e variância: $\text{E}(X) = np$ e $\text{Var}(X) = np(1-p)$

Exemplo: número de caras no lançamento de 20 moedas, número de meninos entre 10 bebês, número de sementes germinadas em 100 sementes, . . .

Modelo binomial



Modelo binomial

Exemplo: Determine a probabilidade de ocorrer exatamente duas caras no lançamento de três moeda.

Experimento binomial:

- tentativas independentes
- dois resultados possíveis: cara (sucesso), coroa (fracasso)
- probabilidade de sair cara é constante

Modelo binomial

Exemplo: Determine a probabilidade de ocorrer exatamente duas caras no lançamento de três moeda.

Experimento binomial:

- tentativas independentes
- dois resultados possíveis: cara (sucesso), coroa (fracasso)
- probabilidade de sair cara é constante

Exemplo: Suponha que no exemplo anterior fossem lançadas 10 moedas, qual a probabilidade de ocorrerem exatamente duas caras?

Exemplos

1. Numa empresa, 40% dos contratos são pagos em dia. Qual a probabilidade de que, entre 12 contratos, três ou menos sejam pagos em dia?
2. Numa criação de coelhos, 40% são machos. Qual a probabilidade de que nasçam pelo menos 2 coelhos machos num dia em que nasceram 20 coelhos?

Modelo binomial

Esperança e variância

Como vimos, a esperança e a variância de uma V.A. X que possui distribuição binomial, são dadas por

$$\mathrm{E}(X) = np \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Portanto, conhecendo os parâmetros n e p, podemos agora utilizar estas definições para calcular a esperança e a variância de uma V.A. X binomial, sem a necessidade de realizar os cálculos pelas equações gerais de esperança e variância.

Modelo binomial

Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 70%. Um grupo de 20 indivíduos vacinados é observado e testes são realizados para verificar se a imunização foi efetiva.

Seja a V.A. $X =$ número de indivíduos imunizados. Calcule o número esperado de indivíduos imunizados, e o desvio padrão.

Modelo Poisson

Definição: Seja um experimento realizado nas seguintes condições:

i) As ocorrências são independentes
ii) As ocorrências são aleatórias
iii) A variável aleatória X é o número de ocorrências de um evento **ao longo de algum intervalo** (de tempo ou espaço)

Vamos associar a V.A. X o número de ocorrências em um intervalo. Portanto X poderá assumir os valores $0, 1, \ldots,$ (sem limite superior).

Modelo Poisson

Considere então agora que o fenômeno de interesse é observado em um intervalo **contínuo** (tempo, espaço, ...), de tamanho t.

O número de eventos que ocorrem no intervalo fixo $[0, t)$ é uma variável aleatória X ("número de sucessos").

Podemos então inicialmente tentar aproximar esses eventos à um ensaio de Bernoulli, criando n subintervalos muito pequenos, de forma que este processo satisfaça as seguintes condições:

Modelo Poisson

i) Em um período de tempo muito curto, somente 1 ou 0 eventos podem ocorrer (dois ou mais eventos são impossíveis)

ii) O valor esperado de sucessos, np, é constante para qualquer tamanho de intervalo. Chamaremos essa constante de $\lambda = np$. Dessa forma, a probabilidade de sucesso de um evento será $p = \lambda/n$.

iii) Cada subintervalo é um ensaio de Bernoulli independente.

Um experimento que satisfaça estas condições é chamado de **processo de Poisson**.

Modelo Poisson

Note que se estas condições forem satisfeitas, se continuarmos aumentando o número de subintervalos (n), então a probabilidade p deverá diminuir para que $\lambda = np$ permaneça constante.

Dessa forma, estamos interessados em determinar a distribuição da VA $X \sim \text{bin}(n, p = \lambda/n)$ no limite quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
P[X = x] &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}
\end{aligned}
$$

Modelo Poisson

Dessa forma, pode-se mostrar que

$$
\begin{aligned}
P[X = x] &= \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\
&\cong \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}
\end{aligned}
$$

Que é chamado **modelo de Poisson** com parâmetro λ, e

$$
\mathrm{E}(X) = \lambda = \mathrm{Var}(X)
$$

Modelo Poisson

Nesse caso, λ é o número esperado de sucessos em uma unidade de tempo específica.

Frequentemente estamos interessados no valor esperado ou na probabilidade em um intervalo contínuo t qualquer. Nesse caso, a esperança e a variância serão

$$\mathrm{E}(X) = \lambda t = \mu$$
$$\mathrm{Var}(X) = \lambda t$$

Portanto, o modelo Poisson mais geral pode ser definido como a seguir:

Modelo Poisson

Uma V.A. X segue o modelo de Poisson se surge a partir de um processo de Poisson, e sua **função de probabilidade** for dada por

$$P[X = x] = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, \ldots$$

onde

$$\mu = \lambda \cdot t$$

O parâmetro μ indica a taxa de ocorrência (λ) por unidade de medida (t), ou seja,

$$\lambda = \text{taxa de ocorrência} \quad \text{e} \quad t = \text{intervalo de tempo ou espaço}$$

Modelo Poisson

A distribuição de Poisson é utilizada para descrever a probabilidade do **número de ocorrências** em um **intervalo contínuo** (de tempo ou espaço).

No caso da distribuição binomial, a variável de interesse era o número de sucessos em um **intervalo discreto** (n ensaios de Bernoulli).

A unidade de medida (tempo ou espaço) é uma variável contínua, mas a variável aleatória, o **número de ocorrências**, é discreta.

Modelo Poisson

A distribuição de Poisson difere da distribuição binomial em dois aspectos fundamentais:

1. A distribuição binomial é afetada pelo tamanho n da amostra, e pela probabilidade p de sucesso. A distribuição de Poisson é afetada apenas pela média μ.
2. Na distribuição binomial, os valores possíveis da V.A. X são $0, 1, \ldots, n$. Na distribuição de Poisson, a V.A. X tem valores possíveis $0, 1, \ldots$, sem nenhum limite superior.

Modelo Poisson

Notação: $X \sim \text{Pois}(\mu)$

Esperança e variância: $\text{E}(X) = \mu = \text{Var}(X)$

Exemplos

- carros que passam por um cruzamento por minuto, durante uma certa hora do dia
- erros tipográficos por página, em um material impresso
- defeitos por unidade (m, m^2, m^3, ...) por peça fabricada
- colônias de bactérias numa dada cultura, em uma plaqueta de microscópio
- mortes por ataque do coração por ano, em uma cidade

Modelo Poisson

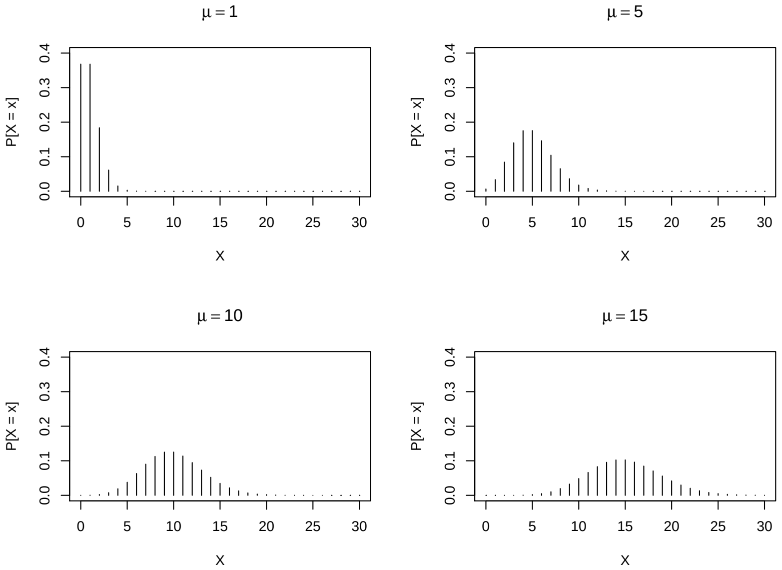
Exemplo: suponha que em um determinado processo de fabricação de tecidos ocorra, em média, uma falha a cada 400 metros. Portanto

$$\lambda = \frac{1}{400} = 0,0025 \, \frac{\text{falhas}}{\text{metro}}$$

Suponha que queremos estudar o número de falhas que aparecerão em 1000 metros de tecido (t). Esse número será uma V.A. X com distribuição de Poisson, e o número médio de falhas será então

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mu \\ &= \lambda \cdot t \\ &= 0,0025 \cdot 1000 \\ &= 2,5 \, \text{falhas}/1000 \text{ m} \end{aligned}$$

Modelo Poisson



Exemplo: As chamadas telefônicas chegam a uma delegacia de polícia à uma taxa de 8 chamadas por hora, em dias úteis.

a) Quantas chamadas de emergência são esperadas em um período de 15 minutos?

b) Qual a probabilidade de nenhuma chamada em um período de 15 minutos?

c) Qual a probabilidade de ocorrer pelo menos duas chamadas no período de 15 minutos?

d) Qual a probabilidade de ocorrer exatamente duas chamadas em 20 minutos?

Modelo Poisson

Exemplo: Suponha que 150 erros de impressão são distribuídos aleatoriamente em um livro de 200 páginas. Encontre a probabilidade de que em 2 páginas contenham:

a) nenhum erro de impressão
b) três erros de impressão
c) um ou mais erros de impressão

Plano de aula

Variáveis aleatórias contínuas

Uma V.A. é classificada como contínua se assume valores em qualquer intervalo dos números reais, ou seja, um conjunto de valores não enumerável. Dessa forma, não é possível atribuir probabilidades para um ponto específico, apenas para intervalos da reta.

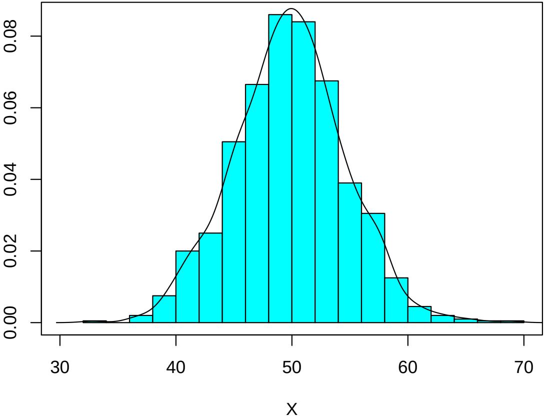
Exemplos:

- Peso de animais
- Tempo de falha de um equipamento eletrônico
- Altura da maré em uma hora específica
- Salinidade da água do mar
- Retorno financeiro de um investimento

Variáveis aleatórias contínuas

Não podemos atribuir probabilidades à valores específicos, pois há uma quantidade **não enumerável** (infinita) de valores em um ponto.

Atribuimos probabilidades à intervalos de valores, por meio de uma **função**. Portanto, as probabilidades são representadas por áreas.



Variáveis aleatórias contínuas

A **função densidade de probabilidade** (fdp) atribui probabilidades à intervalos de valores do tipo $[a, b]$, e é definida por

$$P[a < x < b] = \int_a^b f(x)dx$$

com as seguintes propriedades

i) É uma função não negativa

$$f(x) \geq 0$$

ii) A área total sob a curva deve ser igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Observações:

1. $P[X = x] = 0$, portanto:

   $$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X < b]$$

2. Qualquer função $f(\cdot)$ que seja não negativa e cuja área total sob a curva seja igual à unidade caracterizará uma VA contínua.
3. $f(x)$ *não* representa a probabilidade de ocorrência de algum evento, A área sobb curva entre dois pontos é que fornecerá a probabilidade.

Exemplo

Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1,5x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1. Verifique se essa função é uma fdp.
2. Calcule:
    1. $P[X > 0]$
    2. $P[X > 0,5]$
    3. $P[-0,5 \leq X \leq 0,5]$
    4. $P[X < -2]$
    5. $P[X < 0,5]$
    6. $P[X < 0 \cup X > 0,5]$

Plano de aula

Esperança

A esperança de uma V.A. contínua tem o mesmo sentido e interpretação da esperança de uma V.A. discreta: é a **média** ou **valor esperado** da V.A.

A esperança de uma V.A. contínua é obtida através da integral do produto de x com a função $f(x)$, no intervalo definido pelo suporte da V.A. De maneira geral,

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Variância

A variância, como já vimos, dá o grau de dispersão dos valores de uma variável aleatória em relação à sua média ou esperança $\mathrm{E}(X)$. A forma geral para o cálculo em V.A.s contínuas é

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mathrm{E}(X)]^2 \cdot f(x)dx\end{aligned}$$

No entanto, assim como para V.A.s discretas, uma foma mais fácil operacionalmente pode ser deduzida a partir da primeira, e temos

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

onde

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Exemplo

Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1,5x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1. Calcule a esperança, a variância, e o desvio-padrão.

Plano de aula

Distribuições contínuas de probabilidade

Existem diversos modelos contínuos de probabilidade. Alguns deles:

- Uniforme
- Exponencial
- Gama

Um dos modelos mais importantes, tanto do ponto de vista teórico quanto prático, é o **modelo normal**.

Este modelo, também chamado de **modelo de Gauss**, foi estabelecido por volta de 1733 pelo matemático francês Abraham De Moivre, e serve para explicar inúmeros fenômenos naturais, físicos, psicológicos, sociológicos, ...

A distribuição normal é extremamente importante em Estatística pois serve de fundamento para muitas técnicas de **inferência** e **aproximações**.

Modelo normal

Definição: Dizemos que uma V.A. X segue o modelo normal se sua fdp é a seguinte

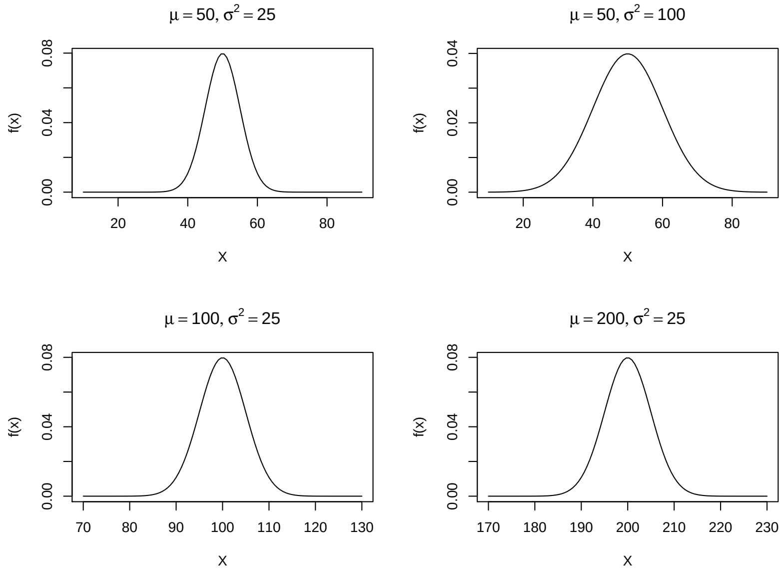
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < \infty$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ é a média da população, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ é o desvio-padrão populacional.

Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Esperança e variância: $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

Modelo normal



Características da curva normal:

- É **simétrica** em relação à μ
- O ponto máximo (moda) de $f(x)$ é o ponto $x = \mu$
- Os pontos de inflexão da função são $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$
- A área total sob a curva é 1 ou 100%
- A curva é **assintótica** em relação ao eixo x

Modelo normal

Para qualquer VA normal X, valem as seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
&P[X > \mu] = P[X < \mu] \\
&P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \approxeq 0,6827 \\
&P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approxeq 0,9545 \\
&P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] \approxeq 0,9973
\end{aligned}
$$

Portanto, 6σ é frequentemente referida como a **largura** de uma distribuição normal.

Métodos mais avançados de integração podem ser utilizados para mostrar que a área sob a função densidade de probabilidade normal de $-\infty < x < \infty$ é igual a 1.

Modelo normal

Para obter uma probabilidade do modelo normal, devemos calcular a área entre os pontos a e b, ou seja,

$$P[a < X < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

No entanto, a função da distribuição normal não possui forma fechada, portanto o cálculo de probabilidades não pode ser feito diretamente pela integral, apenas por aproximações numéricas.

Para contornar esse problema, os valores de probabilidade são obtidos para uma distribuição normal padrão (Z) com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \text{N}(0, 1)$$

que é o escore Z (número de desvios-padrões da média μ). A vantagem é que podemos fazer uma única tabela com as integrais aproximadas de Z, ao invés de uma tabela para cada par (μ, σ^2).

Modelo normal

Se $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, então sua fdp é

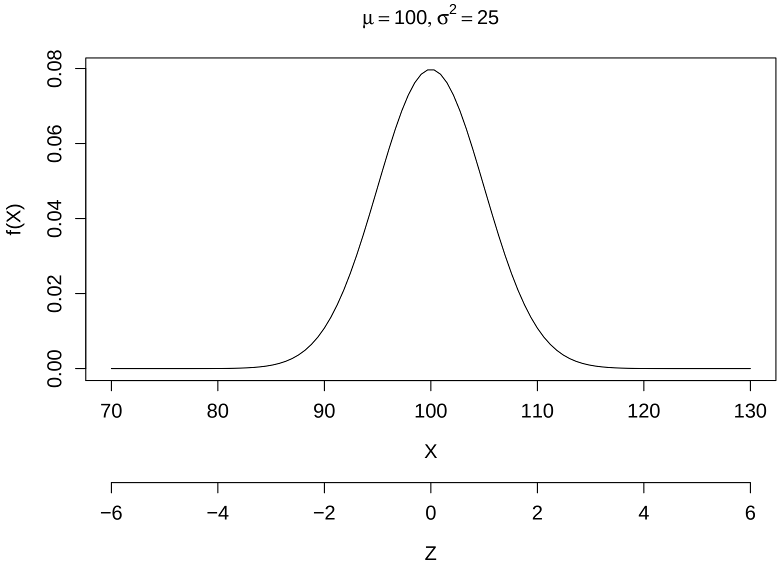
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z)^2\right]$$

Para se obter a probabilidade de Z estar entre a e b,

$$P[a < Z < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z)^2\right] dz$$

As integrais (áreas) para valores de Z entre 0,00 e 3,99 estão na tabela. Portanto, para qualquer valor de X entre a e b, podemos calcular a probabilidade correspondente através da transformação,

$$P[a < X < b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$


$\mu = 100, \sigma^2 = 25$
f(X)
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
70
80
90
100
110
120
130
X
−6
−4
−2
0
2
4
6
Z

Exemplo de uso da tabela:

Calcule as probabilidades (áreas):

- $P(0 < Z < 2)$
- $P(Z > 2)$
- $P(Z < -2)$
- $P(2,0 < Z < 2,5)$
- $P(-2,61 < Z < 2,43)$
- $P(Z > -1,63)$

Exemplos

1. Suponha que a média populacional do coeficiente de inteligência (QI) seja 100, com desvio-padrão 15. Qual a probabilidade de selecionarmos uma pessoa ao acaso, e ela ter QI entre 90 e 115?
2. Seja $X \sim \mathrm{N}(30, 16)$. Qual a probabilidade de obtermos um valor maior ou igual a 38?

Modelo normal

Exemplo: A duração de um pneu de automóvel, em quilômetros rodados, apresenta distribuição normal com média 70000 km, e desvio-padrão de 10000 km. Com isso:

(a) Qual a probabilidade de um pneu escolhido ao acaso durar mais de 85000 km?

(b) Qual a probabilidade de um pneu durar entre 68500 km e 75000 km?

(c) Qual a probabilidade de um pneu durar entre 55000 km e 65000 km?

(d) O fabricante deseja fixar uma garantia de quilometragem, de tal forma que, se a duração de um pneu for inferior à da garantia, o pneu será trocado. De quanto deve ser essa garantia para que somente 1% dos pneus sejam trocados?

(e) De acordo com o item anterior, a probabilidade de que um pneu seja trocado é de 1%. Se o fabricante vende 5000 pneus por mês, quantos pneus deve trocar?

Plano de aula

Exercícios

- Montgomery, DC; Runger, GC. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2012.
    - Cap. 3: 14–17, 21, 26–28, 47–51, 60, 78, 79, 85–87, 90, 98, 129–132, 135, 141, 142.
    - Cap. 4: 2, 4, 5, 7, 27–30, 33, 53, 55, 61, 69, 70, 75.

Plano de aula

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2006. [Cap. 6]
- Magalhães, MN; Lima, ACP. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 2008. [Cap. 3]
- Montgomery, DC; Runger, GC. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2012. [Cap. 3 e 4]