

Modelos Dinâmicos Espaciais

Marina Silva Paez

marina@im.ufrj.br

e

Dani Gamerman

dani@im.ufrj.br

<http://dme.ufrj.br/dani>

Departamento de Métodos Estatísticos

Instituto de Matemática - UFRJ

1º Workshop em Estatística Espacial e Métodos Computacionalmente Intensivos

Curitiba, PR, 18 de outubro de 2005

Apresentação:

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Método MCMC

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Método MCMC

Modelos espaciais para dados contínuos

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Método MCMC

Modelos espaciais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição no Rio de Janeiro

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Método MCMC

Modelos espaciais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição no Rio de Janeiro

Modelos dinâmicos

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Método MCMC

Modelos espaciais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição no Rio de Janeiro

Modelos dinâmicos

Modelos espaço-temporais para dados contínuos

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Método MCMC

Modelos espaciais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição no Rio de Janeiro

Modelos dinâmicos

Modelos espaço-temporais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição na Alemanha

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Método MCMC

Modelos espaciais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição no Rio de Janeiro

Modelos dinâmicos

Modelos espaço-temporais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição na Alemanha

Conclusão

Apresentação:

Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Inferência Bayesiana

Método MCMC

Modelos espaciais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição no Rio de Janeiro

Modelos dinâmicos

Modelos espaço-temporais para dados contínuos

Exemplo com dados de poluição na Alemanha

Conclusão

1. Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

1. Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Objetivo: apresentar formas de tratamento de dados coletados no espaço e/ou tempo que apresentam estrutura de correlação nessas dimensões

1. Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Objetivo: apresentar formas de tratamento de dados coletados no espaço e/ou tempo que apresentam estrutura de correlação nessas dimensões

Processos ambientais são em sua maioria contínuos no tempo e no espaço, variando portanto de forma suave em ambas as dimensões.

1. Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Objetivo: apresentar formas de tratamento de dados coletados no espaço e/ou tempo que apresentam estrutura de correlação nessas dimensões

Processos ambientais são em sua maioria contínuos no tempo e no espaço, variando portanto de forma suave em ambas as dimensões.

A percepção da correlação depende da frequência de observação dos dados no tempo e espaço.

1. Introdução ao problema de dados estruturados no espaço-tempo

Objetivo: apresentar formas de tratamento de dados coletados no espaço e/ou tempo que apresentam estrutura de correlação nessas dimensões

Processos ambientais são em sua maioria contínuos no tempo e no espaço, variando portanto de forma suave em ambas as dimensões.

A percepção da correlação depende da frequência de observação dos dados no tempo e espaço.

Em problemas reais, a análise fica limitada às observações feitas desses processos em determinados períodos de tempo e locais no espaço.

Dados espaço-temporais: 3 formas mais usuais

Dados espaço-temporais: 3 formas mais usuais

Processos Pontuais

Dados espaço-temporais: 3 formas mais usuais

Processos Pontuais

Dados de Área

Dados espaço-temporais: 3 formas mais usuais

Processos Pontuais

Dados de Área

Dados Contínuos

Poluição atmosférica no Rio de Janeiro

Poluição atmosférica na Alemanha

Dados espaço-temporais: 3 formas mais usuais

Processos Pontuais

Dados de Área

Dados Contínuos

Poluição atmosférica no Rio de Janeiro

Poluição atmosférica na Alemanha

1.1. Dados Contínuos

1.1. Dados Contínuos

O espaço de observação da variável aleatória de interesse é contínuo no espaço e discreto no tempo.

1.1. Dados Contínuos

O espaço de observação da variável aleatória de interesse é contínuo no espaço e discreto no tempo.

Notação: $Y_t(s)$, para $s \in S \subset R^2$ e $t = 1, \dots, T$

1.1. Dados Contínuos

O espaço de observação da variável aleatória de interesse é contínuo no espaço e discreto no tempo.

Notação: $Y_t(s)$, para $s \in S \subset R^2$ e $t = 1, \dots, T$

Exemplos

1.1. Dados Contínuos

O espaço de observação da variável aleatória de interesse é contínuo no espaço e discreto no tempo.

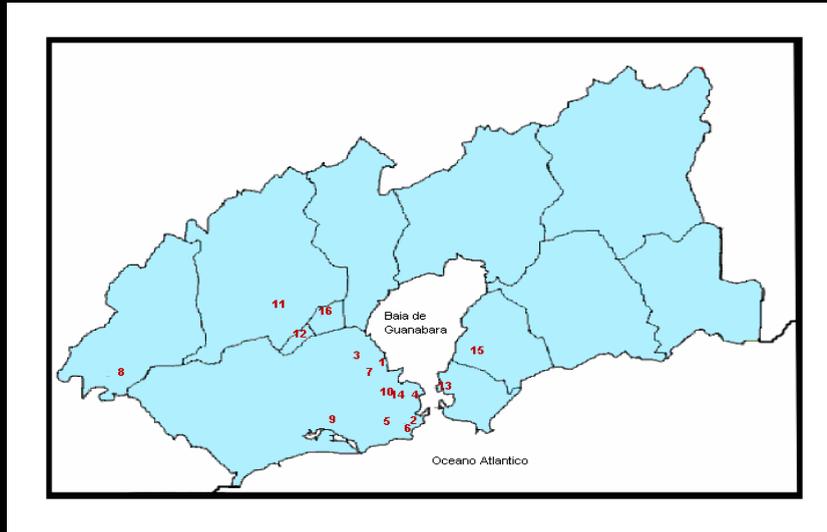
Notação: $Y_t(s)$, para $s \in S \subset R^2$ e $t = 1, \dots, T$

Exemplos

- Exemplo 1: Poluição atmosférica no Rio de Janeiro
- Exemplo 2: Poluição atmosférica na Alemanha

✚ Poluição atmosférica no Rio de Janeiro

✠ Poluição atmosférica no Rio de Janeiro



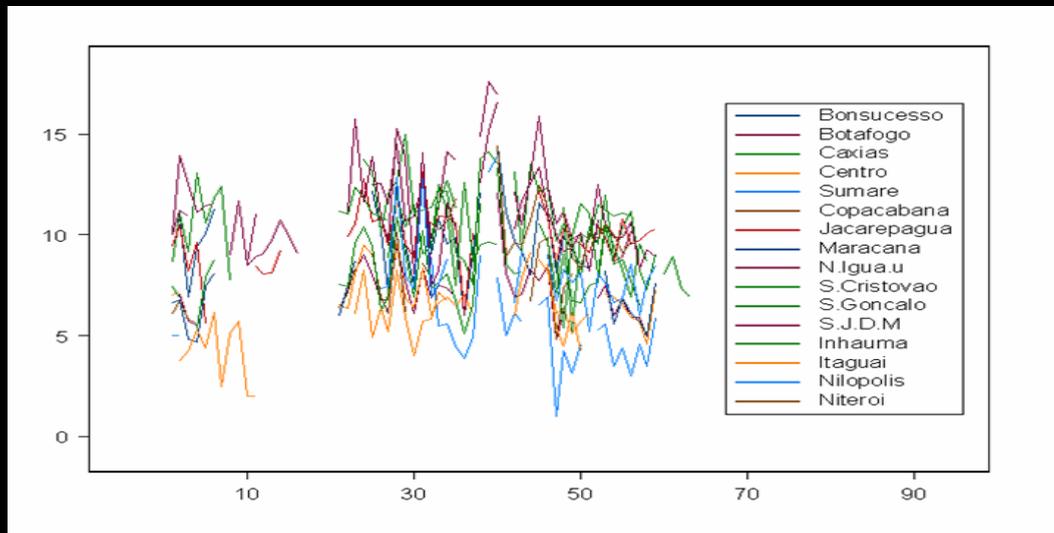
índice	estação	índice	estação
1	Bonsucesso	9	Jacarepaguá
2	Botafogo	10	Maracanã
3	Caxias	11	Nova Iguaçu
4	Centro	12	Nilópolis
5	Sumaré	13	Niterói
6	Copacabana	14	São Cristóvão
7	Inhaúma	15	São Gonçalo
8	Itaguaí	16	São João de Meriti

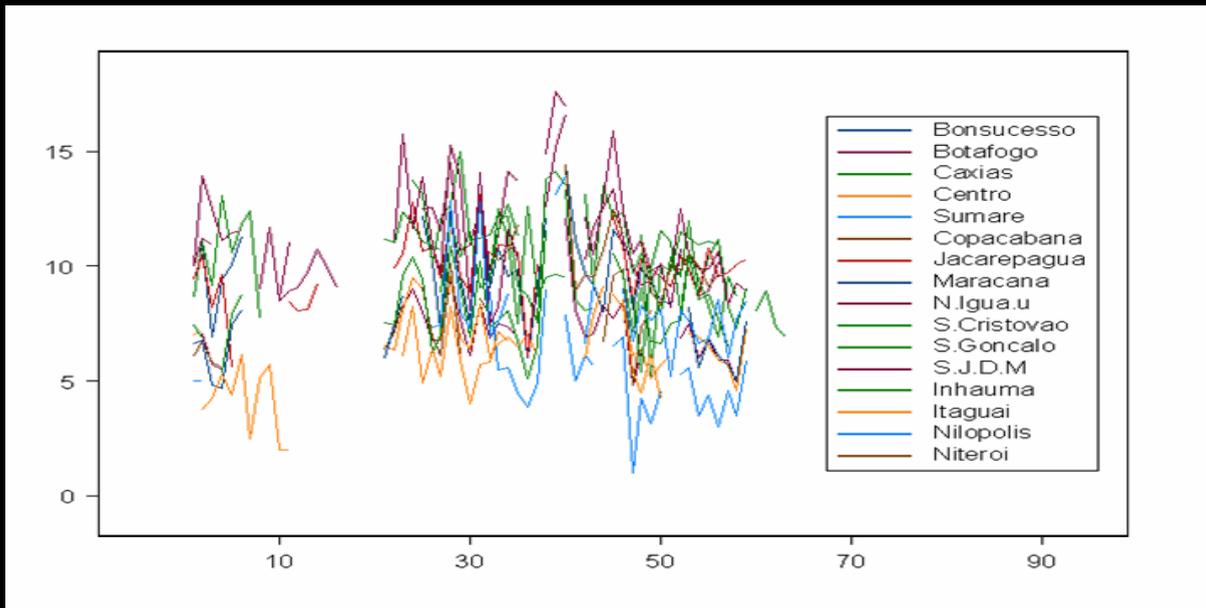
- resposta : medições de partículas inaláveis com diâmetro menor que $10\mu\text{g}/\text{m}^2$ (PM₁₀)

- resposta : medições de partículas inaláveis com diâmetro menor que $10\mu g/m^2$ (PM₁₀)
- observações feitas a cada 6 dias no ano de 1999, em 16 postos de monitoramento

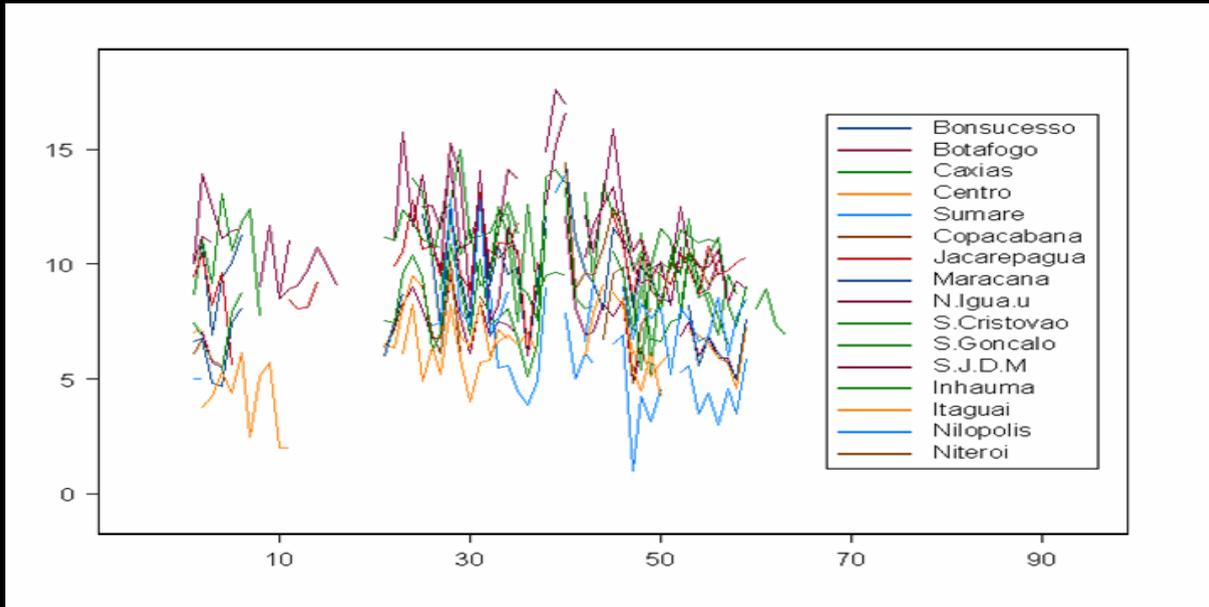
- resposta : medições de partículas inaláveis com diâmetro menor que $10\mu g/m^2$ (PM₁₀)
- observações feitas a cada 6 dias no ano de 1999, em 16 postos de monitoramento
- Devido à precariedade do sistema de monitoramento, no entanto, obteve-se uma grande quantidade de dados omissos

- resposta : medições de partículas inaláveis com diâmetro menor que $10\mu g/m^2$ (PM₁₀)
- observações feitas a cada 6 dias no ano de 1999, em 16 postos de monitoramento
- Devido à precariedade do sistema de monitoramento, no entanto, obteve-se uma grande quantidade de dados omissos



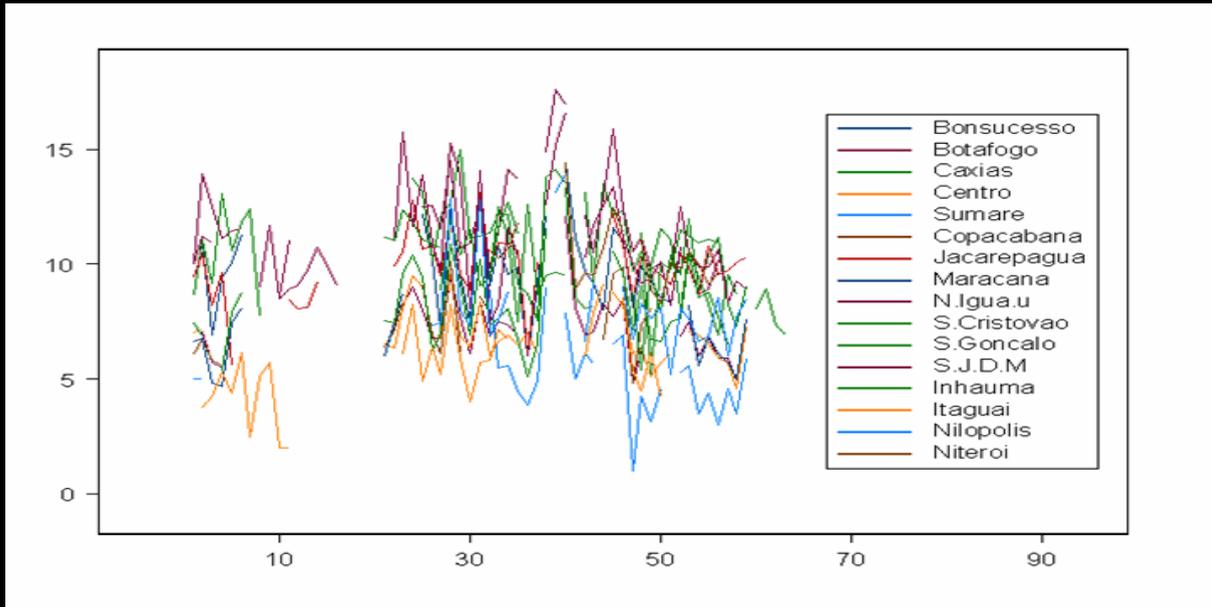


Concentração de partículas inaláveis ao longo do tempo.



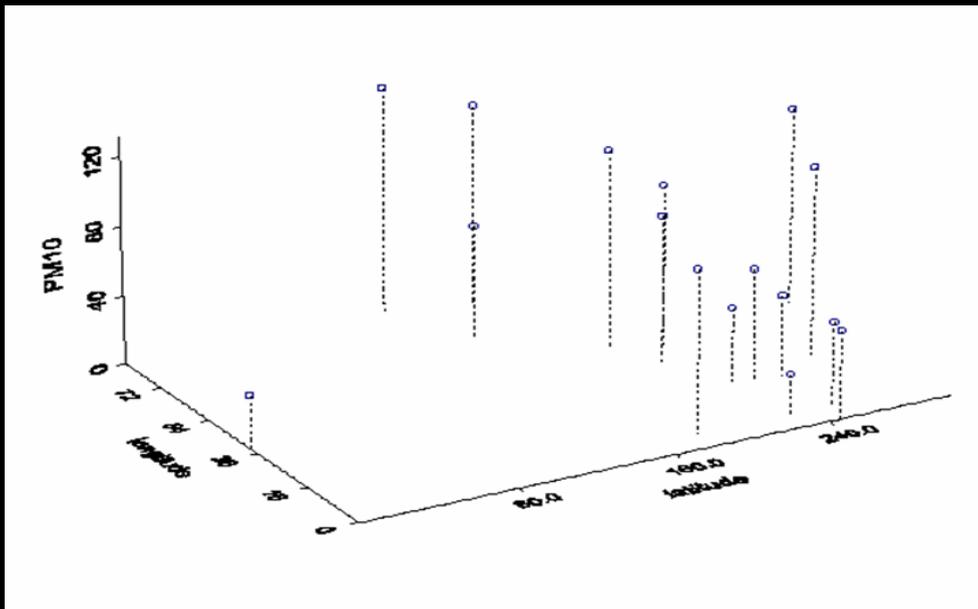
Concentração de partículas inaláveis ao longo do tempo.

- Podemos observar correlação entre as séries ao longo do tempo

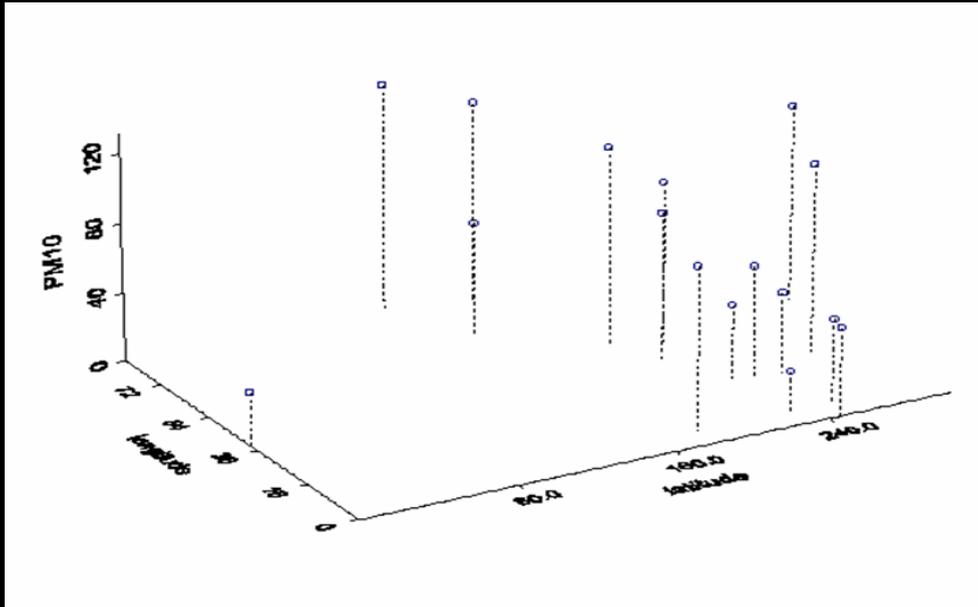


Concentração de partículas inaláveis ao longo do tempo.

- Podemos observar correlação entre as séries ao longo do tempo
- Dependência temporal dentro de cada série



Média da concentração de partículas inaláveis por estação de monitoramento.



Média da concentração de partículas inaláveis por estação de monitoramento.

Podemos observar uma estrutura espacial nas médias por estação

Variáveis explicativas:

Variáveis explicativas:

- Temperatura máxima diária

Variáveis explicativas:

- Temperatura máxima diária
- Indicadores do dia da semana

Variáveis explicativas:

- Temperatura máxima diária
- Indicadores do dia da semana

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) propõem um modelo para tratar esses dados, supondo que o efeito da temperatura máxima diária varia no espaço.

✚ Poluição atmosférica na Alemanha

✚ Poluição atmosférica na Alemanha

- duas variáveis resposta : SO_2 e NO_2

✚ Poluição atmosférica na Alemanha

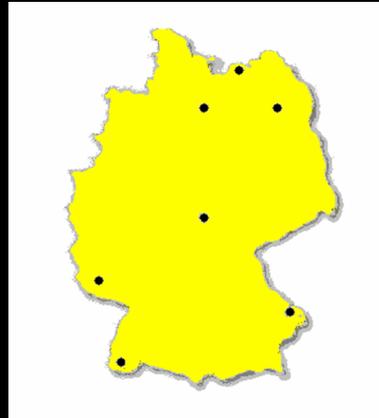
- duas variáveis resposta : SO_2 e NO_2
- 7 estações de monitoramento

✚ Poluição atmosférica na Alemanha

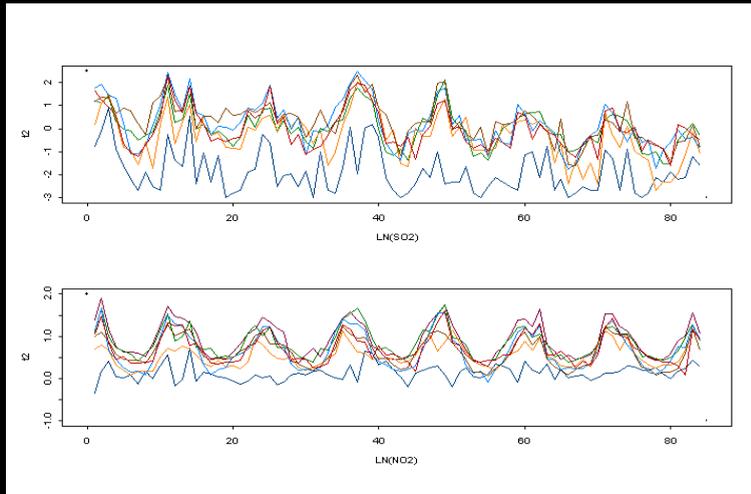
- duas variáveis resposta : SO_2 e NO_2
- 7 estações de monitoramento
- 84 períodos de tempo: medições mensais dos ano de 1993 a 1999

✠ Poluição atmosférica na Alemanha

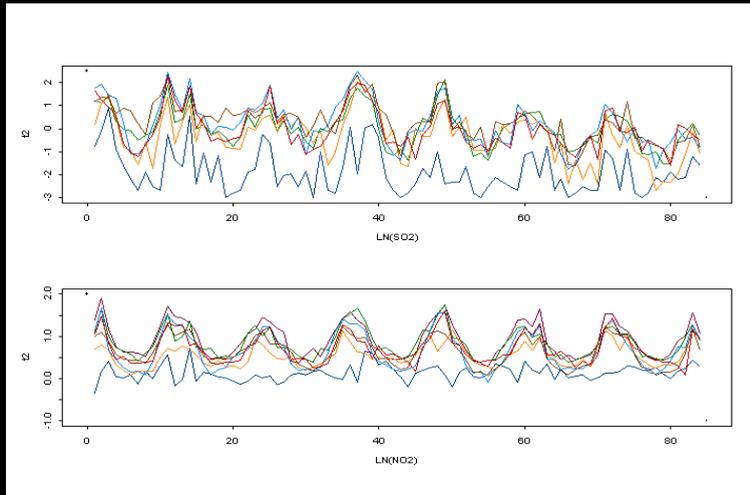
- duas variáveis resposta : SO_2 e NO_2
- 7 estações de monitoramento
- 84 períodos de tempo: medições mensais dos ano de 1993 a 1999



mapa da Alemanha com postos de monitoramento

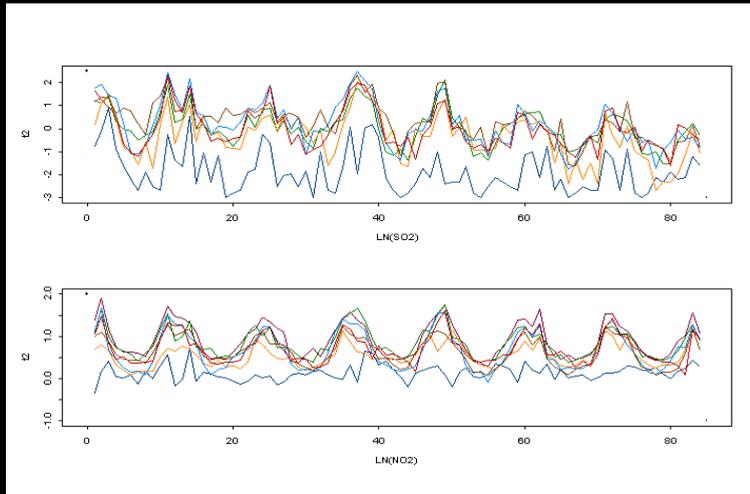


variáveis resposta $\log(SO_2)$ e $\log(NO_2)$ ao longo do tempo, por estação de monitoramento.



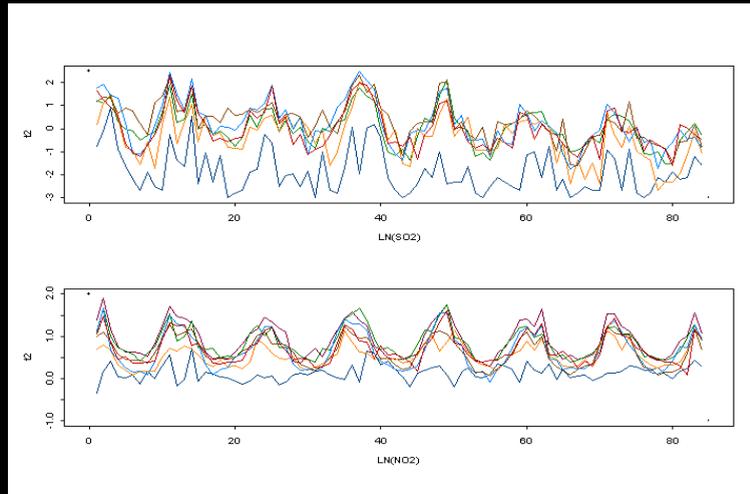
variáveis resposta $\log(SO_2)$ e $\log(NO_2)$ ao longo do tempo, por estação de monitoramento.

- Observa-se clara sazonalidade nas séries



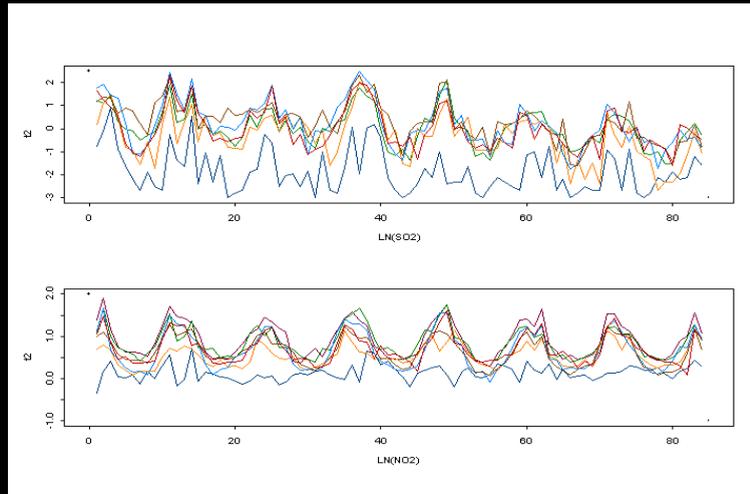
variáveis resposta $\log(SO_2)$ e $\log(NO_2)$ ao longo do tempo, por estação de monitoramento.

- Observa-se clara sazonalidade nas séries
- Possível estrutura de autocorrelação ao remover a sazonalidade



variáveis resposta $\log(SO_2)$ e $\log(NO_2)$ ao longo do tempo, por estação de monitoramento.

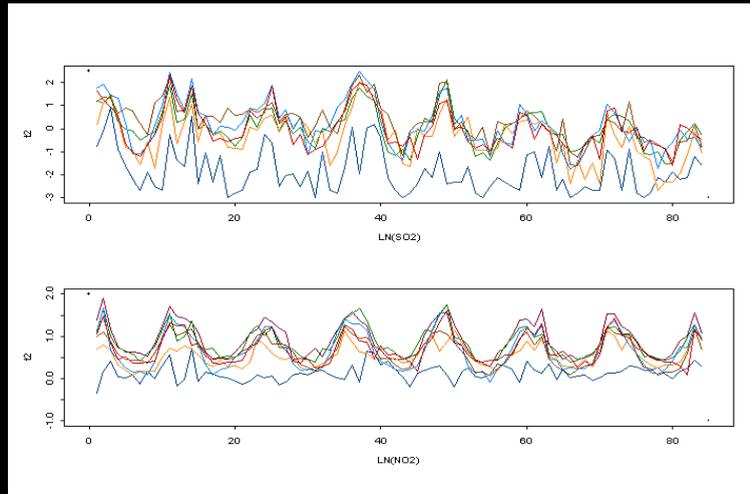
- Observa-se clara sazonalidade nas séries
- Possível estrutura de autocorrelação ao remover a sazonalidade
- Possível correlação espacial entre as séries ao remover a sazonalidade



variáveis resposta $\log(SO_2)$ e $\log(NO_2)$ ao longo do tempo, por estação de monitoramento.

- Observa-se clara sazonalidade nas séries
- Possível estrutura de autocorrelação ao remover a sazonalidade
- Possível correlação espacial entre as séries ao remover a sazonalidade

Variável explicativa: índice de pluviosidade (em mm)



variáveis resposta $\log(SO_2)$ e $\log(NO_2)$ ao longo do tempo, por estação de monitoramento.

- Observa-se clara sazonalidade nas séries
- Possível estrutura de autocorrelação ao remover a sazonalidade
- Possível correlação espacial entre as séries ao remover a sazonalidade

Variável explicativa: índice de pluviosidade (em mm)

2. Inferência Bayesiana

2. Inferência Bayesiana

- Seja θ um vetor de parâmetros desconhecidos que pode assumir valores em Θ .

2. Inferência Bayesiana

- Seja θ um vetor de parâmetros desconhecidos que pode assumir valores em Θ .
- A informação inicial pode ser expressa em $p(\theta)$

2. Inferência Bayesiana

- Seja θ um vetor de parâmetros desconhecidos que pode assumir valores em Θ .
- A informação inicial pode ser expressa em $p(\theta)$
- Essa informação pode ser atualizada observando uma amostra x relacionada com θ

2. Inferência Bayesiana

- Seja θ um vetor de parâmetros desconhecidos que pode assumir valores em Θ .
- A informação inicial pode ser expressa em $p(\theta)$
- Essa informação pode ser atualizada observando uma amostra x relacionada com θ

$$p(\theta | x) \propto p(x | \theta)p(\theta)$$

2.1. Distribuição preditiva

2.1. Distribuição preditiva

- Valores desconhecidos, porém observáveis, podem ser vistos como qualquer outro parâmetro do modelo

2.1. Distribuição preditiva

- Valores desconhecidos, porém observáveis, podem ser vistos como qualquer outro parâmetro do modelo
- A distribuição preditiva para um determinado valor \tilde{Y} baseada num conjunto de dados Y , é dada por:

2.1. Distribuição preditiva

- Valores desconhecidos, porém observáveis, podem ser vistos como qualquer outro parâmetro do modelo
- A distribuição preditiva para um determinado valor \tilde{Y} baseada num conjunto de dados Y , é dada por:

$$\begin{aligned}
 p(\tilde{Y} | Y) &= \int_{\Theta} p(\tilde{Y}, \theta | Y) d\theta \\
 &= \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta, Y) p(\theta | Y) d\theta.
 \end{aligned}$$

2.1. Distribuição preditiva

- Valores desconhecidos, porém observáveis, podem ser vistos como qualquer outro parâmetro do modelo
- A distribuição preditiva para um determinado valor \tilde{Y} baseada num conjunto de dados Y , é dada por:

$$\begin{aligned}
 p(\tilde{Y} | Y) &= \int_{\Theta} p(\tilde{Y}, \theta | Y) d\theta \\
 &= \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta, Y) p(\theta | Y) d\theta.
 \end{aligned}$$

Em muitos casos, a distribuição de \tilde{Y} não depende de Y quando θ é conhecido. Nessa caso,

Em muitos casos, a distribuição de \tilde{Y} não depende de Y quando θ é conhecido. Nesse caso,

$$p(\tilde{Y} | Y) = \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta)p(\theta | Y)d\theta$$

Em muitos casos, a distribuição de \tilde{Y} não depende de Y quando θ é conhecido. Nessa caso,

$$p(\tilde{Y} | Y) = \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta)p(\theta | Y)d\theta$$

Exemplo 1: $Y = \{Y_1, \dots, Y_T\}$ va's iid de uma $N(\mu, \sigma^2)$. $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Em muitos casos, a distribuição de \tilde{Y} não depende de Y quando θ é conhecido. Nessa caso,

$$p(\tilde{Y} | Y) = \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta)p(\theta | Y)d\theta$$

Exemplo 1: $Y = \{Y_1, \dots, Y_T\}$ va's iid de uma $N(\mu, \sigma^2)$. $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Seja $\tilde{Y} = Y_{T+1}$. \tilde{Y} só depende de Y_1, \dots, Y_T através de μ e σ^2

Em muitos casos, a distribuição de \tilde{Y} não depende de Y quando θ é conhecido. Nessa caso,

$$p(\tilde{Y} | Y) = \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta)p(\theta | Y)d\theta$$

Exemplo 1: $Y = \{Y_1, \dots, Y_T\}$ va's iid de uma $N(\mu, \sigma^2)$. $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Seja $\tilde{Y} = Y_{T+1}$. \tilde{Y} só depende de Y_1, \dots, Y_T através de μ e σ^2

Exemplo 2: modelos dinâmicos temporais.

Em muitos casos, a distribuição de \tilde{Y} não depende de Y quando θ é conhecido. Nessa caso,

$$p(\tilde{Y} | Y) = \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta)p(\theta | Y)d\theta$$

Exemplo 1: $Y = \{Y_1, \dots, Y_T\}$ va's iid de uma $N(\mu, \sigma^2)$. $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Seja $\tilde{Y} = Y_{T+1}$. \tilde{Y} só depende de Y_1, \dots, Y_T através de μ e σ^2

Exemplo 2: modelos dinâmicos temporais.

$\theta =$ coleção de todos os parâmetros desconhecidos do modelo

Em muitos casos, a distribuição de \tilde{Y} não depende de Y quando θ é conhecido. Nessa caso,

$$p(\tilde{Y} | Y) = \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta)p(\theta | Y)d\theta$$

Exemplo 1: $Y = \{Y_1, \dots, Y_T\}$ va's iid de uma $N(\mu, \sigma^2)$. $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Seja $\tilde{Y} = Y_{T+1}$. \tilde{Y} só depende de Y_1, \dots, Y_T através de μ e σ^2

Exemplo 2: modelos dinâmicos temporais.

θ = coleção de todos os parâmetros desconhecidos do modelo

Uma vez conhecida toda a coleção θ , não resta nenhuma estrutura de correlação temporal - observações tornam-se independentes.

Em muitos casos, a distribuição de \tilde{Y} não depende de Y quando θ é conhecido. Nessa caso,

$$p(\tilde{Y} | Y) = \int_{\Theta} p(\tilde{Y} | \theta)p(\theta | Y)d\theta$$

Exemplo 1: $Y = \{Y_1, \dots, Y_T\}$ va's iid de uma $N(\mu, \sigma^2)$. $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Seja $\tilde{Y} = Y_{T+1}$. \tilde{Y} só depende de Y_1, \dots, Y_T através de μ e σ^2

Exemplo 2: modelos dinâmicos temporais.

θ = coleção de todos os parâmetros desconhecidos do modelo

Uma vez conhecida toda a coleção θ , não resta nenhuma estrutura de correlação temporal - observações tornam-se independentes.

Interpolação espacial: situação similar

Interpolação espacial: situação similar

Observações são feitas em N locais s_1, \dots, s_N distintos no espaço

Interpolação espacial: situação similar

Observações são feitas em N locais s_1, \dots, s_N distintos no espaço

Obtêm-se uma amostra $Y^o = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)'$

Interpolação espacial: situação similar

Observações são feitas em N locais s_1, \dots, s_N distintos no espaço

Obtêm-se uma amostra $Y^o = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)'$

A correlação entre as variáveis Y_i e Y_j depende dos seus locais de observação.

Interpolação espacial: situação similar

Observações são feitas em N locais s_1, \dots, s_N distintos no espaço

Obtêm-se uma amostra $Y^o = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)'$

A correlação entre as variáveis Y_i e Y_j depende dos seus locais de observação.

Queremos prever $Y^n = (Y(s_{N+1}), Y(s_{N+2}), \dots, Y(s_{N+n}))$ não observados

Interpolação espacial: situação similar

Observações são feitas em N locais s_1, \dots, s_N distintos no espaço

Obtêm-se uma amostra $Y^o = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)'$

A correlação entre as variáveis Y_i e Y_j depende dos seus locais de observação.

Queremos prever $Y^n = (Y(s_{N+1}), Y(s_{N+2}), \dots, Y(s_{N+n}))$ não observados

Suponha que a distribuição conjunta de Y^o e Y^n é dada por

$$\begin{pmatrix} Y^o \\ Y^n \end{pmatrix} | \theta \sim N \left[\begin{pmatrix} 1_N \\ 1_n \end{pmatrix} \mu, \begin{pmatrix} \Sigma^o & \Sigma^{on} \\ \Sigma^{on'} & \Sigma^n \end{pmatrix} \right]$$

onde θ são todos os parâmetros do modelo.

Distribuição condicional $(Y^n | Y^o, \theta)$:

$$(Y^n | Y^o, \theta) \sim N(\mu_{Y^n|Y^o}, \Sigma_{Y^n|Y^o})$$

Distribuição condicional $(Y^n | Y^o, \theta)$:

$$(Y^n | Y^o, \theta) \sim N(\mu_{Y^n|Y^o}, \Sigma_{Y^n|Y^o})$$

onde

$$\mu_{Y^n|Y^o} = 1_N \mu + \Sigma^{on} (\Sigma^n)^{-1} (Y^n - 1_n \mu)$$

$$\Sigma_{Y^n|Y^o} = \Sigma^n - \Sigma^{on} (\Sigma^n)^{-1} \Sigma^{on'}$$

Distribuição condicional $(Y^n | Y^o, \theta)$:

$$(Y^n | Y^o, \theta) \sim N(\mu_{Y^n|Y^o}, \Sigma_{Y^n|Y^o})$$

onde

$$\mu_{Y^n|Y^o} = 1_N \mu + \Sigma^{on} (\Sigma^n)^{-1} (Y^n - 1_n \mu)$$

$$\Sigma_{Y^n|Y^o} = \Sigma^n - \Sigma^{on} (\Sigma^n)^{-1} \Sigma^{on'}$$

$p(Y^n | Y^o)$ é obtida combinando $p(Y^n | Y^o, \theta)$ com $p(\theta | Y^o)$, e integrando fora os parâmetros θ .

Distribuição condicional ($Y^n \mid Y^o, \theta$):

$$(Y^n \mid Y^o, \theta) \sim N(\mu_{Y^n|Y^o}, \Sigma_{Y^n|Y^o})$$

onde

$$\mu_{Y^n|Y^o} = 1_N \mu + \Sigma^{on} (\Sigma^n)^{-1} (Y^n - 1_n \mu)$$

$$\Sigma_{Y^n|Y^o} = \Sigma^n - \Sigma^{on} (\Sigma^n)^{-1} \Sigma^{on'}$$

$p(Y^n \mid Y^o)$ é obtida combinando $p(Y^n \mid Y^o, \theta)$ com $p(\theta \mid Y^o)$, e integrando fora os parâmetros θ .

$p(\theta \mid Y^o)$ muitas vezes não pode ser obtida analiticamente, sendo necessário o uso de métodos numéricos

3. Monte Carlo em Cadeias de Markov

3. Monte Carlo em Cadeias de Markov

O MCMC permite a simulação de distribuições de forma indireta

3. Monte Carlo em Cadeias de Markov

O MCMC permite a simulação de distribuições de forma indireta

A idéia é construir uma cadeia de Markov fácil de ser simulada, e com distribuição de equilíbrio igual à de interesse

3. Monte Carlo em Cadeias de Markov

O MCMC permite a simulação de distribuições de forma indireta

A idéia é construir uma cadeia de Markov fácil de ser simulada, e com distribuição de equilíbrio igual à de interesse

Após um número suficientemente grande de iterações, a cadeia converge para a distribuição de interesse

3. Monte Carlo em Cadeias de Markov

O MCMC permite a simulação de distribuições de forma indireta

A idéia é construir uma cadeia de Markov fácil de ser simulada, e com distribuição de equilíbrio igual à de interesse

Após um número suficientemente grande de iterações, a cadeia converge para a distribuição de interesse

Largamente usados na estatística Bayesiana para simular de $p(\theta | Y)$ cuja geração direta é complicada.

3. Monte Carlo em Cadeias de Markov

O MCMC permite a simulação de distribuições de forma indireta

A idéia é construir uma cadeia de Markov fácil de ser simulada, e com distribuição de equilíbrio igual à de interesse

Após um número suficientemente grande de iterações, a cadeia converge para a distribuição de interesse

Largamente usados na estatística Bayesiana para simular de $p(\theta | Y)$ cuja geração direta é complicada.

Referência: Gamerman (1997) ou Gamerman e Lopes (2006)

4. Modelos espaciais para dados contínuos

4. Modelos espaciais para dados contínuos

Modelo Gaussiano estacionário

4. Modelos espaciais para dados contínuos

Modelo Gaussiano estacionário

- Processo estocástico Gaussiano:

4. Modelos espaciais para dados contínuos

Modelo Gaussiano estacionário

- Processo estocástico Gaussiano:

$(Z(s_1), \dots, Z(s_N))$ tem distribuição normal multivariada, para qualquer conjunto de localidades $\{s_1, \dots, s_N\}$.

4. Modelos espaciais para dados contínuos

Modelo Gaussiano estacionário

- Processo estocástico Gaussiano:

$(Z(s_1), \dots, Z(s_N))$ tem distribuição normal multivariada, para qualquer conjunto de localidades $\{s_1, \dots, s_N\}$.

- Processo estacionário:

4. Modelos espaciais para dados contínuos

Modelo Gaussiano estacionário

- **Processo estocástico Gaussiano:**

$(Z(s_1), \dots, Z(s_N))$ tem distribuição normal multivariada, para qualquer conjunto de localidades $\{s_1, \dots, s_N\}$.

- **Processo estacionário:**

$E[Z(s)]$ e $Var[Z(s)]$ são as mesmas para todo s

$cor(Z(s_i), Z(s_j))$ depende somente de $(s_i - s_j)$, para qualquer par de inteiros $i, j = 1, \dots, N$

4. Modelos espaciais para dados contínuos

Modelo Gaussiano estacionário

- **Processo estocástico Gaussiano:**

$(Z(s_1), \dots, Z(s_N))$ tem distribuição normal multivariada, para qualquer conjunto de localidades $\{s_1, \dots, s_N\}$.

- **Processo estacionário:**

$E[Z(s)]$ e $Var[Z(s)]$ são as mesmas para todo s

$cor(Z(s_i), Z(s_j))$ depende somente de $(s_i - s_j)$, para qualquer par de inteiros $i, j = 1, \dots, N$

- **Processo isotrópico:** a correlação depende somente de $u = \|s_i - s_j\|$, a distância euclideana entre s_i e s_j .

Sob as hipóteses de estacionariedade e isotropia,

$$E[Z(s)] = \mu \quad \text{e} \quad V[Z(s)] = \sigma^2$$

Sob as hipóteses de estacionariedade e isotropia,

$$E[Z(s)] = \mu \quad \text{e} \quad V[Z(s)] = \sigma^2$$

Podemos escrever a função de covariância como

$$\gamma(u) = \sigma^2 \rho(u),$$

Sob as hipóteses de estacionariedade e isotropia,

$$E[Z(s)] = \mu \quad \text{e} \quad V[Z(s)] = \sigma^2$$

Podemos escrever a função de covariância como

$$\gamma(u) = \sigma^2 \rho(u),$$

onde $\rho(\cdot)$ é a função de correlação dada por:

Sob as hipóteses de estacionariedade e isotropia,

$$E[Z(s)] = \mu \quad \text{e} \quad V[Z(s)] = \sigma^2$$

Podemos escrever a função de covariância como

$$\gamma(u) = \sigma^2 \rho(u),$$

onde $\rho(\cdot)$ é a função de correlação dada por:

$$\rho(u) = \text{cor}\{Z(s_i), Z(s_j)\}, \quad \text{onde} \quad u = \|s_i - s_j\|.$$

Sob as hipóteses de estacionariedade e isotropia,

$$E[Z(s)] = \mu \quad \text{e} \quad V[Z(s)] = \sigma^2$$

Podemos escrever a função de covariância como

$$\gamma(u) = \sigma^2 \rho(u),$$

onde $\rho(\cdot)$ é a função de correlação dada por:

$$\rho(u) = \text{cor}\{Z(s_i), Z(s_j)\}, \quad \text{onde} \quad u = \|s_i - s_j\|.$$

Vamos denotar esse processo Gaussiano por

$$Z(\cdot) \sim PG(\mu, \rho(\cdot)) \quad \text{ou} \quad Z(\cdot) \sim PG(\mu, \sigma^2 \rho(\cdot))$$

Sob as hipóteses de estacionariedade e isotropia,

$$E[Z(s)] = \mu \quad \text{e} \quad V[Z(s)] = \sigma^2$$

Podemos escrever a função de covariância como

$$\gamma(u) = \sigma^2 \rho(u),$$

onde $\rho(\cdot)$ é a função de correlação dada por:

$$\rho(u) = \text{cor}\{Z(s_i), Z(s_j)\}, \quad \text{onde} \quad u = \|s_i - s_j\|.$$

Vamos denotar esse processo Gaussiano por

$$Z(\cdot) \sim PG(\mu, \rho(\cdot)) \quad \text{ou} \quad Z(\cdot) \sim PG(\mu, \sigma^2 \rho(\cdot))$$

Modelagem usada para tratar dados contínuos no espaço

Exemplo: Dados de poluição na Região Metropolitana do Rio de Janeiro

Exemplo: Dados de poluição na Região Metropolitana do Rio de Janeiro

Variável resposta: raiz quadrada da concentração de partículas inaláveis

PM_{10} (em $\mu g/m^3$)

Exemplo: Dados de poluição na Região Metropolitana do Rio de Janeiro

Variável resposta: raiz quadrada da concentração de partículas inaláveis
 PM_{10} (em $\mu g/m^3$)

Variáveis explicativas: temperatura máxima diária (TEMP), e indicadores do dia da semana (SEG, TER, QUA, QUI, SEX, SAB)

Exemplo: Dados de poluição na Região Metropolitana do Rio de Janeiro

Variável resposta: raiz quadrada da concentração de partículas inaláveis PM_{10} (em $\mu g/m^3$)

Variáveis explicativas: temperatura máxima diária (TEMP), e indicadores do dia da semana (SEG, TER, QUA, QUI, SEX, SAB)

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) especificam o seguinte modelo:

Exemplo: Dados de poluição na Região Metropolitana do Rio de Janeiro

Variável resposta: raiz quadrada da concentração de partículas inaláveis PM_{10} (em $\mu g/m^3$)

Variáveis explicativas: temperatura máxima diária (TEMP), e indicadores do dia da semana (SEG, TER, QUA, QUI, SEX, SAB)

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) especificam o seguinte modelo:

$$Y_t(s_i) \sim N(\mu_t(s_i), \sigma_e^2)$$

$$\mu_t(s_i) = \theta_0(s_i) + \theta_1(s_i)TEMP_t + X_t'\theta + \phi_t,$$

$$\theta_j(\cdot) \stackrel{ind}{\sim} PG(\gamma_j, \sigma_j^2 \rho_j(\cdot; \lambda_j)), \quad j = 0, 1 .$$

Exemplo: Dados de poluição na Região Metropolitana do Rio de Janeiro

Variável resposta: raiz quadrada da concentração de partículas inaláveis PM_{10} (em $\mu g/m^3$)

Variáveis explicativas: temperatura máxima diária (TEMP), e indicadores do dia da semana (SEG, TER, QUA, QUI, SEX, SAB)

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) especificam o seguinte modelo:

$$Y_t(s_i) \sim N(\mu_t(s_i), \sigma_e^2)$$

$$\mu_t(s_i) = \theta_0(s_i) + \theta_1(s_i)TEMP_t + X_t'\theta + \phi_t,$$

$$\theta_j(\cdot) \stackrel{ind}{\sim} PG(\gamma_j, \sigma_j^2 \rho_j(\cdot; \lambda_j)), \quad j = 0, 1.$$

$\rho_j(\cdot; \lambda_j)$, $j = 1, 2$ é uma função de correlação exponencial

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) supõem que ϕ_t é um processo AR(1):

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) supõem que ϕ_t é um processo AR(1):

$$\phi_t = \delta\phi_{t-1} + w_t, \quad w_t \mid \sigma_\phi^2 \stackrel{ind}{\sim} N(0, \sigma_\phi^2),$$

onde $\delta \in [0, 1)$, $\sigma_\phi^2 > 0$ e $t \in \mathbb{Z}$.

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) supõem que ϕ_t é um processo AR(1):

$$\phi_t = \delta\phi_{t-1} + w_t, \quad w_t \mid \sigma_\phi^2 \stackrel{ind}{\sim} N(0, \sigma_\phi^2),$$

onde $\delta \in [0, 1)$, $\sigma_\phi^2 > 0$ e $t \in \mathbb{Z}$.

prioris não informativas para $\theta_2, \dots, \theta_7$, σ_ϕ^{-2} , γ_0 e γ_1 , e δ :

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) supõem que ϕ_t é um processo AR(1):

$$\phi_t = \delta\phi_{t-1} + w_t, \quad w_t \mid \sigma_\phi^2 \stackrel{ind}{\sim} N(0, \sigma_\phi^2),$$

onde $\delta \in [0, 1)$, $\sigma_\phi^2 > 0$ e $t \in \mathbb{Z}$.

prioris não informativas para $\theta_2, \dots, \theta_7, \sigma_\phi^{-2}, \gamma_0$ e γ_1 , e δ :

prioris com locação obtida por análises preliminares para $\sigma_e^{-2}, \sigma_0^{-2}, \sigma_1^{-2}, \lambda_1$ e λ_0

Paez, Gamerman e De Oliveira (2005) supõem que ϕ_t é um processo AR(1):

$$\phi_t = \delta\phi_{t-1} + w_t, \quad w_t \mid \sigma_\phi^2 \stackrel{ind}{\sim} N(0, \sigma_\phi^2),$$

onde $\delta \in [0, 1)$, $\sigma_\phi^2 > 0$ e $t \in \mathbb{Z}$.

prioris não informativas para $\theta_2, \dots, \theta_7, \sigma_\phi^{-2}, \gamma_0$ e γ_1 , e δ :

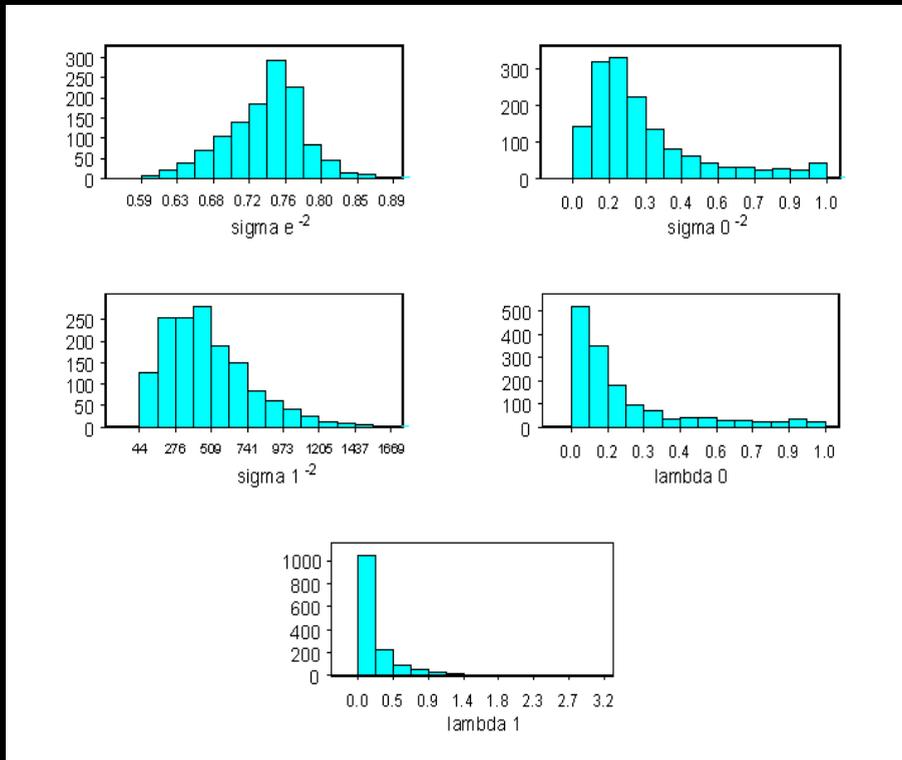
prioris com locação obtida por análises preliminares para $\sigma_e^{-2}, \sigma_0^{-2}, \sigma_1^{-2}, \lambda_1$ e λ_0

Inferência feita via MCMC, utilizando o pacote estatístico BUGS

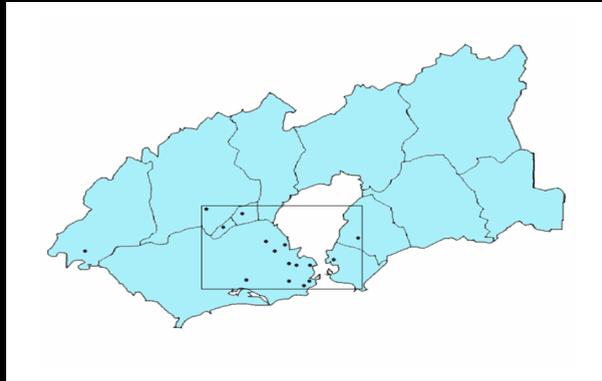
Estatísticas descritivas baseadas na amostra das distribuições a posteriori obtidas por MCMC

parâmetro	2.5%	97.5%	média	d.p.
θ_2	-0.140	1.827	0.901	0.501
θ_3	-0.959	1.261	0.157	0.583
θ_4	-0.477	2.224	0.907	0.688
θ_5	0.526	3.378	1.876	0.720
θ_6	0.605	2.953	1.824	0.604
θ_7	-0.537	1.300	0.382	0.477
γ_0	1.413	9.345	5.860	2.040
γ_1	0.065	0.152	0.112	0.023
λ_0	0.0178	0.596	0.224	0.131
λ_1	0.0111	1.468	0.318	0.409
σ_0^{-2}	0.0567	0.532	0.234	0.124
σ_1^{-2}	109.5	1196.0	495.1	279.0
δ	0.289	0.927	0.636	0.169
σ_ϕ^{-2}	0.441	1.246	0.770	0.204
σ_e^{-2}	0.638	0.831	0.731	0.035

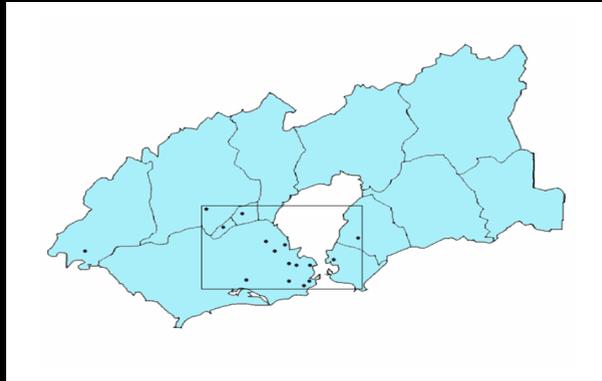
Histogramas das posteriores dos parâmetros σ_e^{-2} , σ_0^{-2} , σ_1^{-2} , λ_0 e λ_1



Interpolação: grade regular 50×50 , na região que corresponde ao retângulo da figura abaixo:

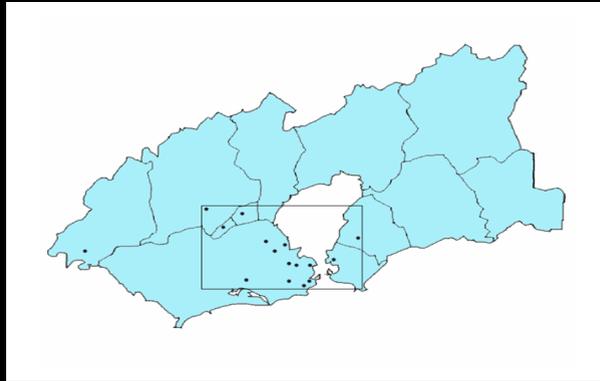


Interpolação: grade regular 50×50 , na região que corresponde ao retângulo da figura abaixo:



Para obter amostra na escala original:

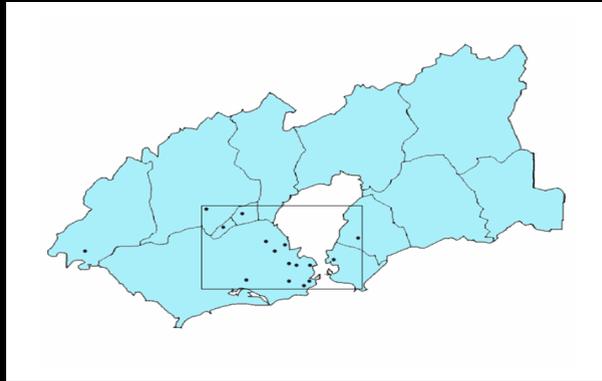
Interpolação: grade regular 50×50 , na região que corresponde ao retângulo da figura abaixo:



Para obter amostra na escala original:

- Obter uma amostra da posteriori dos parâmetros

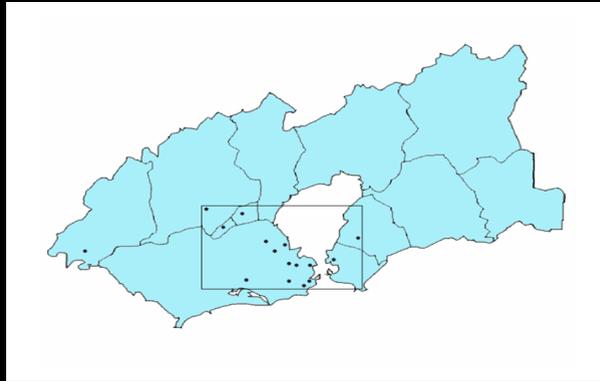
Interpolação: grade regular 50×50 , na região que corresponde ao retângulo da figura abaixo:



Para obter amostra na escala original:

- Obter uma amostra da posteriori dos parâmetros
- Obter uma amostra da preditiva dos $Y_t(\cdot)$ interpolados

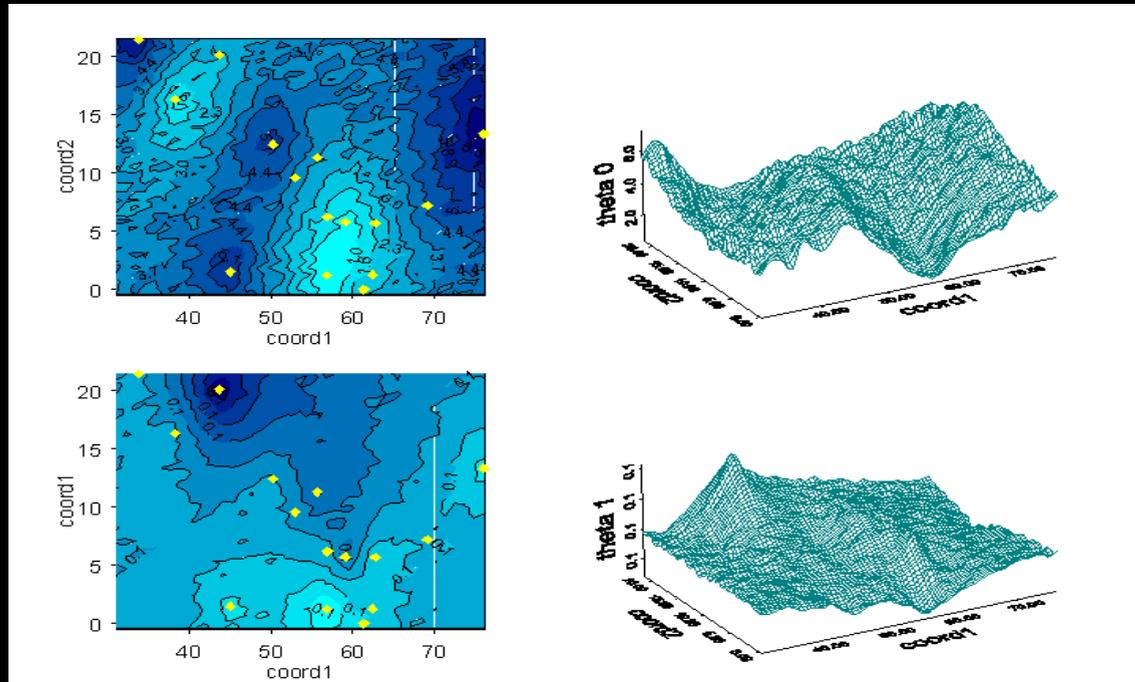
Interpolação: grade regular 50×50 , na região que corresponde ao retângulo da figura abaixo:



Para obter amostra na escala original:

- Obter uma amostra da posteriori dos parâmetros
- Obter uma amostra da preditiva dos $Y_t(\cdot)$ interpolados
- Aplicar transformação quadrática a cada valor amostrado

Superfície interpolada do intercepto e do coeficiente de temperatura



5. Modelos dinâmicos lineares (MDL)

5. Modelos dinâmicos lineares (MDL)

São caracterizados por um par de equações:

5. Modelos dinâmicos lineares (MDL)

São caracterizados por um par de equações:

$$Y_t = X_t' \theta_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, V_t) \quad \text{equação observacional}$$

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, W_t) \quad \text{equação de evolução}$$

5. Modelos dinâmicos lineares (MDL)

São caracterizados por um par de equações:

$$Y_t = X_t' \theta_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, V_t) \quad \text{equação observacional}$$

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, W_t) \quad \text{equação de evolução}$$

θ_t é um vetor de parâmetros $p \times 1$

5. Modelos dinâmicos lineares (MDL)

São caracterizados por um par de equações:

$$Y_t = X_t' \theta_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, V_t) \quad \text{equação observacional}$$

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, W_t) \quad \text{equação de evolução}$$

θ_t é um vetor de parâmetros $p \times 1$

G_t é uma matriz de evolução de dimensão $p \times p$

5. Modelos dinâmicos lineares (MDL)

São caracterizados por um par de equações:

$$Y_t = X_t' \theta_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, V_t) \quad \text{equação observacional}$$

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, W_t) \quad \text{equação de evolução}$$

θ_t é um vetor de parâmetros $p \times 1$

G_t é uma matriz de evolução de dimensão $p \times p$

O MDL é completamente especificado pela quádrupla $\{X_t, G_t, V_t, W_t\}$.

Casos particulares:

Casos particulares:

Modelo de regressão: $G_t = I_p$ e $W_t = 0$

Casos particulares:

Modelo de regressão: $G_t = I_p$ e $W_t = 0$

Modelos de séries temporais: $X_t = X$, $G_t = G$, $V_t = V$ e $W_t = W$

Ex. processos ARIMA de Box e Jenkins (1976)

Casos particulares:

Modelo de regressão: $G_t = I_p$ e $W_t = 0$

Modelos de séries temporais: $X_t = X$, $G_t = G$, $V_t = V$ e $W_t = W$

Ex. processos ARIMA de Box e Jenkins (1976)

Exemplo Modelo polinomial de primeira ordem

Casos particulares:

Modelo de regressão: $G_t = I_p$ e $W_t = 0$

Modelos de séries temporais: $X_t = X$, $G_t = G$, $V_t = V$ e $W_t = W$

Ex. processos ARIMA de Box e Jenkins (1976)

Exemplo Modelo polinomial de primeira ordem

O modelo é especificado pela quádrupla $\{1, \rho, V_t, W_t\}$, podendo ser escrito como

$$Y_t = \theta_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, V_t)$$

$$\theta_t = \rho\theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, W_t)$$

Casos particulares:

Modelo de regressão: $G_t = I_p$ e $W_t = 0$

Modelos de séries temporais: $X_t = X$, $G_t = G$, $V_t = V$ e $W_t = W$

Ex. processos ARIMA de Box e Jenkins (1976)

Exemplo Modelo polinomial de primeira ordem

O modelo é especificado pela quádrupla $\{1, \rho, V_t, W_t\}$, podendo ser escrito como

$$Y_t = \theta_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, V_t)$$

$$\theta_t = \rho\theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, W_t)$$

$\rho \in (-1, 1)$: modelo estacionário

Casos particulares:

Modelo de regressão: $G_t = I_p$ e $W_t = 0$

Modelos de séries temporais: $X_t = X$, $G_t = G$, $V_t = V$ e $W_t = W$

Ex. processos ARIMA de Box e Jenkins (1976)

Exemplo Modelo polinomial de primeira ordem

O modelo é especificado pela quádrupla $\{1, \rho, V_t, W_t\}$, podendo ser escrito como

$$Y_t = \theta_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, V_t)$$

$$\theta_t = \rho\theta_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, W_t)$$

$\rho \in (-1, 1)$: modelo estacionário

$\rho = \pm 1$: modelo não estacionário.

6. Modelos espaço-temporais para dados contínuos

6. Modelos espaço-temporais para dados contínuos

Paez, Landim e Gamerman (2005) propõem a seguinte modelagem para

$Y_t(s)$:

6. Modelos espaço-temporais para dados contínuos

Paez, Landim e Gamerman (2005) propõem a seguinte modelagem para

$Y_t(s)$:

$$\begin{aligned}
 Y_t(s) &= X_t'(s)\theta_{1t}(s) + \epsilon_{1t}(s), & \epsilon_{1t}(s) &\stackrel{ind}{\sim} N(0, \sigma^2) \\
 \theta_{1t}(s) &= \theta_{2t} + \epsilon_{2t}(s), & \epsilon_{2t}(\cdot) &\stackrel{ind}{\sim} f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) \\
 \theta_{2t} &= \theta_{2,t-1} + w_t, & w_t &\stackrel{ind}{\sim} N(0, W)
 \end{aligned}$$

para $t = 1, \dots, T$ e $s = s_1, \dots, s_N$.

6. Modelos espaço-temporais para dados contínuos

Paez, Landim e Gamerman (2005) propõem a seguinte modelagem para

$Y_t(s)$:

$$\begin{aligned}
 Y_t(s) &= X_t'(s)\theta_{1t}(s) + \epsilon_{1t}(s), & \epsilon_{1t}(s) &\stackrel{ind}{\sim} N(0, \sigma^2) \\
 \theta_{1t}(s) &= \theta_{2t} + \epsilon_{2t}(s), & \epsilon_{2t}(\cdot) &\stackrel{ind}{\sim} f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) \\
 \theta_{2t} &= \theta_{2,t-1} + w_t, & w_t &\stackrel{ind}{\sim} N(0, W)
 \end{aligned}$$

para $t = 1, \dots, T$ e $s = s_1, \dots, s_N$.

$\theta_{1t}(s)$ e θ_{2t} têm dimensão p

6. Modelos espaço-temporais para dados contínuos

Paez, Landim e Gamerman (2005) propõem a seguinte modelagem para

$Y_t(s)$:

$$\begin{aligned}
 Y_t(s) &= X_t'(s)\theta_{1t}(s) + \epsilon_{1t}(s), & \epsilon_{1t}(s) &\stackrel{ind}{\sim} N(0, \sigma^2) \\
 \theta_{1t}(s) &= \theta_{2t} + \epsilon_{2t}(s), & \epsilon_{2t}(\cdot) &\stackrel{ind}{\sim} f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) \\
 \theta_{2t} &= \theta_{2,t-1} + w_t, & w_t &\stackrel{ind}{\sim} N(0, W)
 \end{aligned}$$

para $t = 1, \dots, T$ e $s = s_1, \dots, s_N$.

$\theta_{1t}(s)$ e θ_{2t} têm dimensão p

$f_{\epsilon_{2t}}(\lambda)$ define uma estrutura de correlação espacial

Três possíveis definições para $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda)$:

Três possíveis definições para $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda)$:

- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$

Três possíveis definições para $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda)$:

- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$
- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = A \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$

Três possíveis definições para $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda)$:

- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$
- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = A \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$
- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = PG(0, V, \rho(\lambda, \cdot))$

Três possíveis definições para $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda)$:

- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$
- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = A \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$
- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = PG(0, V, \rho(\lambda, \cdot))$

Priors:

$$\theta_{20} \mid \sigma^2 \sim N(m_0, C_0), \quad \sigma^2 \sim GI(\alpha, \beta),$$

$$W \sim WI(T_{W0}, S_{W0}), \quad V \sim WI(T_{V0}, S_{V0}),$$

Três possíveis definições para $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda)$:

- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$
- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = A \prod_{l=1}^p PG(0, \rho_l(\lambda_l, \cdot)), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$
- $f_{\epsilon_{2t}}(\lambda) = PG(0, V, \rho(\lambda, \cdot))$

Priors:

$$\theta_{20} \mid \sigma^2 \sim N(m_0, C_0), \quad \sigma^2 \sim GI(\alpha, \beta),$$

$$W \sim WI(T_{W0}, S_{W0}), \quad V \sim WI(T_{V0}, S_{V0}),$$

Priors uniformes (por exemplo) para cada elemento do vetor λ .

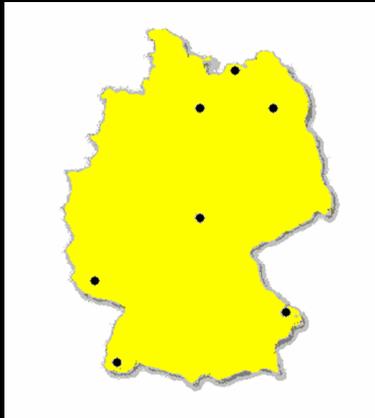
Exemplo: Dados de poluição na Alemanha

Exemplo: Dados de poluição na Alemanha

Observações foram feitas em 84 períodos de tempo e $N = 7$ postos de monitoramento

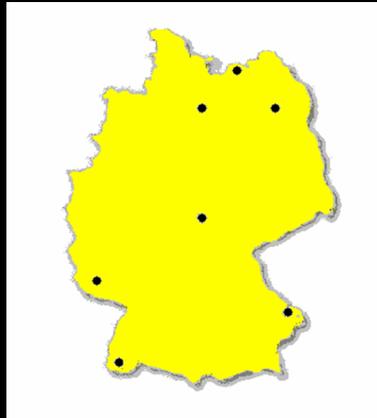
Exemplo: Dados de poluição na Alemanha

Observações foram feitas em 84 períodos de tempo e $N = 7$ postos de monitoramento



Exemplo: Dados de poluição na Alemanha

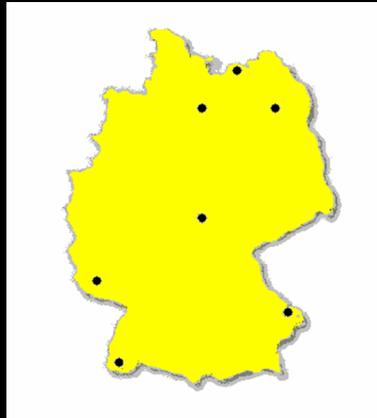
Observações foram feitas em 84 períodos de tempo e $N = 7$ postos de monitoramento



Variável resposta: $Y_t = \log(SO_2)_t$

Exemplo: Dados de poluição na Alemanha

Observações foram feitas em 84 períodos de tempo e $N = 7$ postos de monitoramento



Variável resposta: $Y_t = \log(SO_2)_t$

Variáveis explicativas: $Z_t(s_i) =$ logaritmo do índice de pluviosidade, e ondas de seno e cosseno

Para a estimação do modelo : $T = 80$ períodos de tempo

Para a estimação do modelo : $T = 80$ períodos de tempo

$$Y_t(s_i) = \theta_{1,1t}(s_i) + \theta_{1,2t}(s_i)Z_t(s_i) + \theta_{1,3t}(s_i)\text{sen}(2\pi t/12) + \theta_{1,4t}(s_i)\text{cos}(2\pi t/12) + \epsilon_{1t}(s_i)$$

$$\epsilon_{1t}(s_i) \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

$$\theta_{1t}(s_i) = \theta_{2t} + \epsilon_{2t}(s_i), \quad \epsilon_{2t}(\cdot) \stackrel{\text{ind}}{\sim} PG(0, V, \rho(\lambda, \cdot))$$

$$\theta_{2t} = \theta_{2,t-1} + w_t, \quad w_t \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(0, W)$$

para $i = 1, \dots, 7$ e $t = 1, \dots, 80$

Para a estimação do modelo : $T = 80$ períodos de tempo

$$\begin{aligned}
 Y_t(s_i) &= \theta_{1,1t}(s_i) + \theta_{1,2t}(s_i)Z_t(s_i) + \theta_{1,3t}(s_i)\text{sen}(2\pi t/12) + \theta_{1,4t}(s_i)\text{cos}(2\pi t/12) + \epsilon_{1t}(s_i) \\
 \epsilon_{1t}(s_i) &\overset{\text{ind}}{\sim} N(0, \sigma^2) \\
 \theta_{1t}(s_i) &= \theta_{2t} + \epsilon_{2t}(s_i), \quad \epsilon_{2t}(\cdot) \overset{\text{ind}}{\sim} PG(0, V, \rho(\lambda, \cdot)) \\
 \theta_{2t} &= \theta_{2,t-1} + w_t, \quad w_t \overset{\text{ind}}{\sim} N(0, W)
 \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, 7$ e $t = 1, \dots, 80$

A função de correlação espacial de cada θ foi especificada como sendo uma função exponencial de potência (de Oliveira et al., 1997), dada por

$$\rho(i, j) = \exp\{-(bu_{ij})^k\}, \quad \text{com } b > 0 \quad \text{e} \quad 0 < k < 2.$$

onde $u_{ij} = \|s_i - s_j\|$ e $\lambda = (b, k)$.

O modelo é completado com a especificação de distribuições a priori não informativas.

O modelo é completado com a especificação de distribuições a priori não informativas.

Amostras das distribuições a posteriori dos parâmetros foram obtidas utilizando um algoritmo de MCMC, programado no Ox versão 3.30 (Doornik, 2002).

O modelo é completado com a especificação de distribuições a priori não informativas.

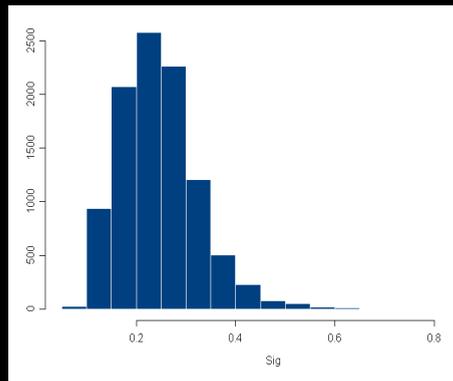
Amostras das distribuições a posteriori dos parâmetros foram obtidas utilizando um algoritmo de MCMC, programado no Ox versão 3.30 (Doornik, 2002).

Histograma da distribuição a posteriori de σ^2 .

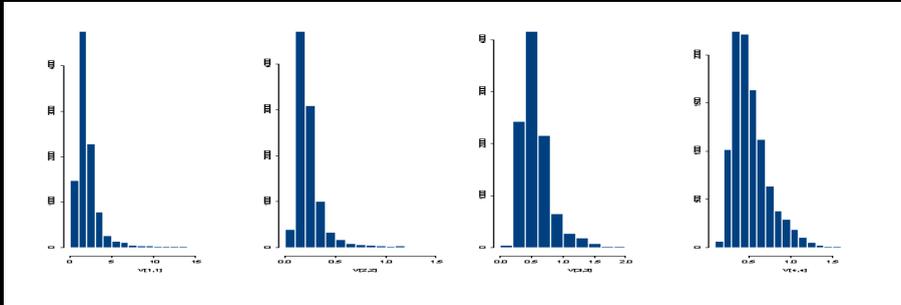
O modelo é completado com a especificação de distribuições a priori não informativas.

Amostras das distribuições a posteriori dos parâmetros foram obtidas utilizando um algoritmo de MCMC, programado no Ox versão 3.30 (Doornik, 2002).

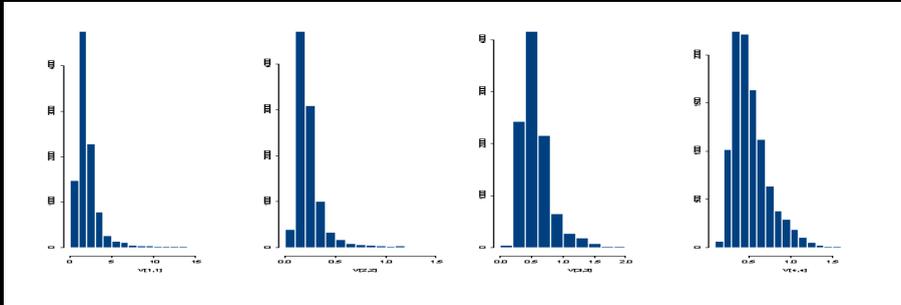
Histograma da distribuição a posteriori de σ^2 .



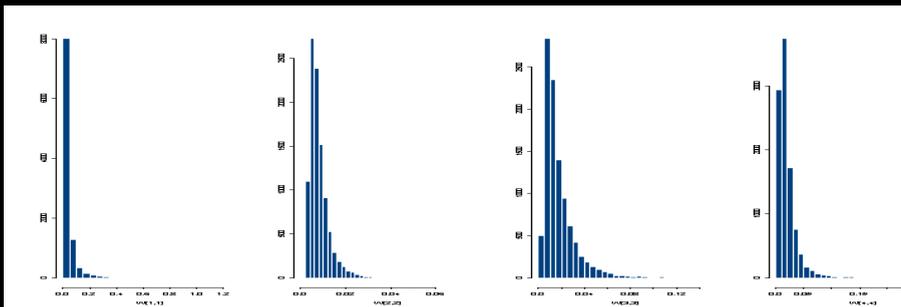
Histograma da distribuição a posteriori dos elementos da diagonal principal da matriz V



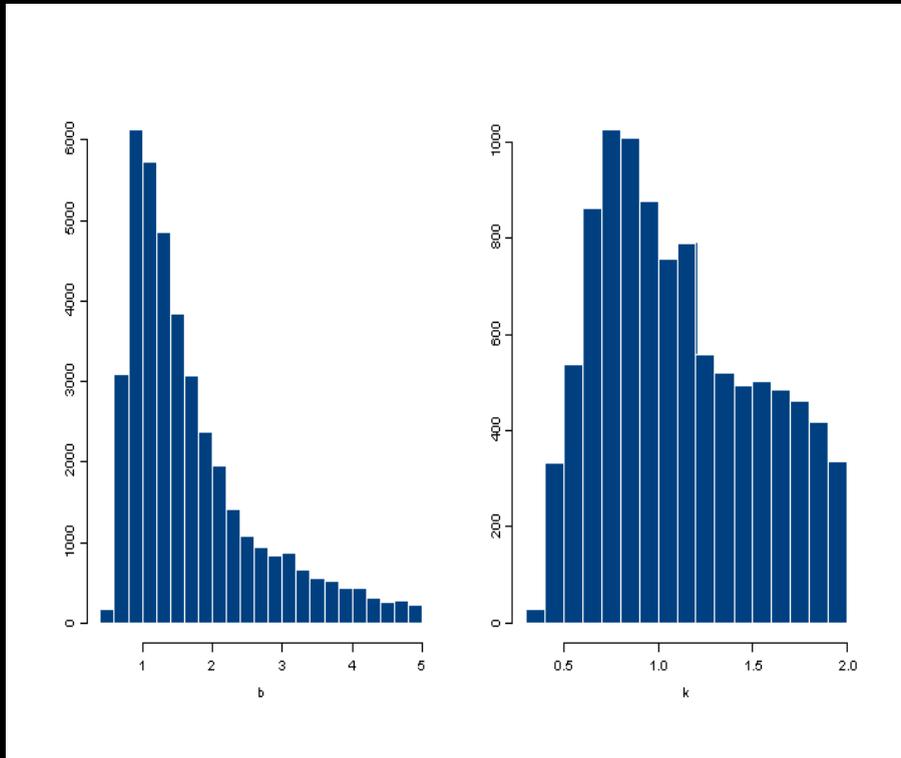
Histograma da distribuição a posteriori dos elementos da diagonal principal da matriz V



Histograma da distribuição a posteriori dos elementos da diagonal principal da matriz W



Histograma da distribuição a posteriori obtida para os parâmetros b e k



Observações feitas em $T = 80$ primeiros períodos de tempo e $N = 7$ locais de observação

Observações feitas em $T = 80$ primeiros períodos de tempo e $N = 7$ locais de observação

Previsões: 4 passos a frente no tempo

Observações feitas em $T = 80$ primeiros períodos de tempo e $N = 7$ locais de observação

Previsões: 4 passos a frente no tempo

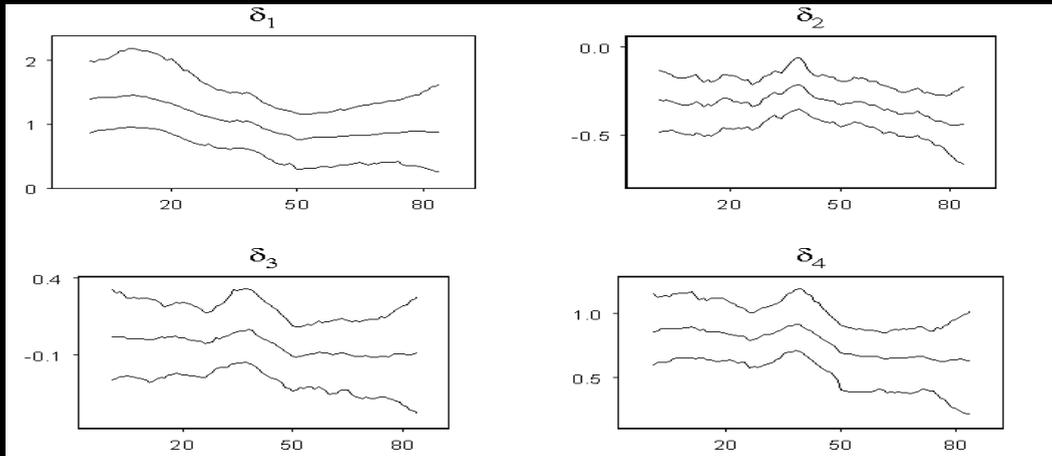
Interpolação: grade de pontos igualmente espaçados de tamanho 100.

Observações feitas em $T = 80$ primeiros períodos de tempo e $N = 7$ locais de observação

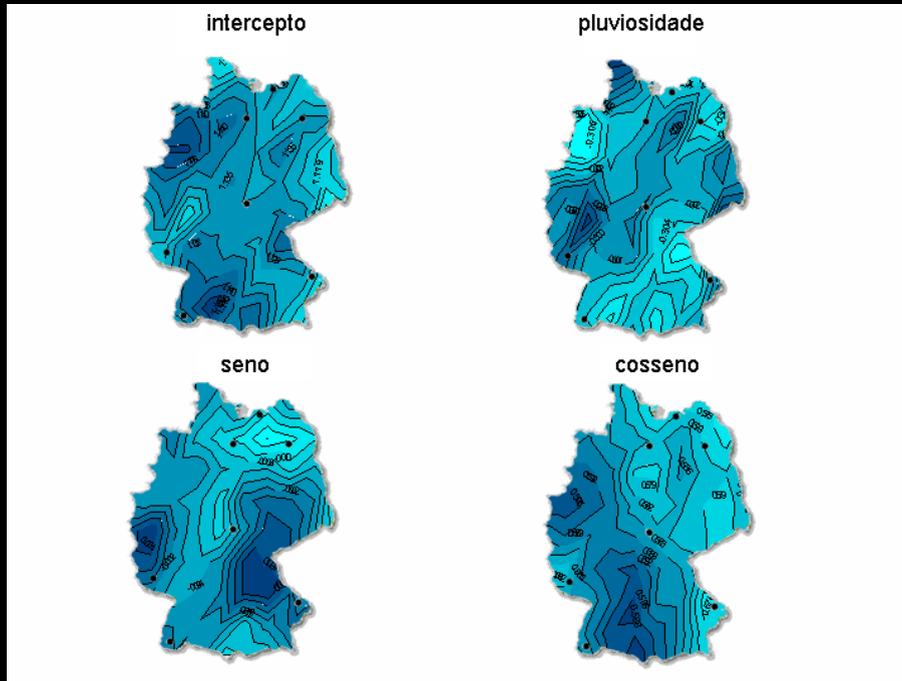
Previsões: 4 passos a frente no tempo

Interpolação: grade de pontos igualmente espaçados de tamanho 100.

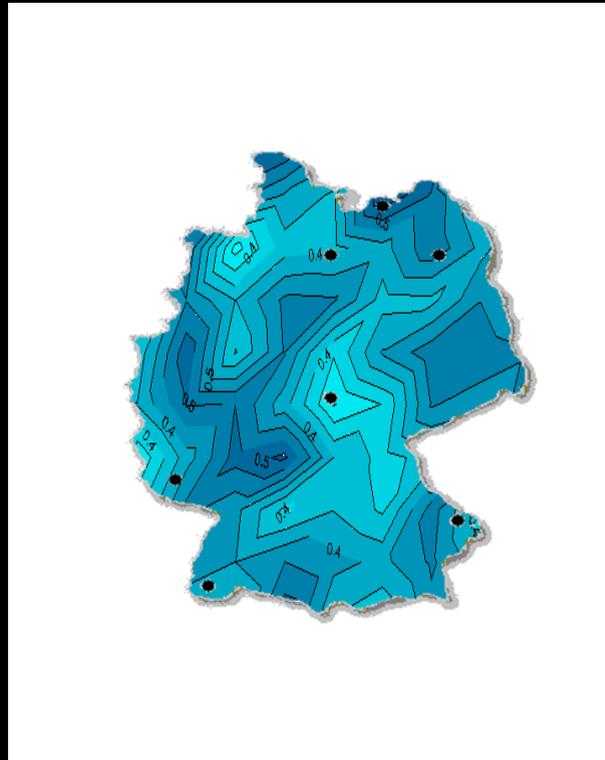
Quantis de 2.5%, 50% e 97.5% da amostra da distribuição a posteriori dos elementos de θ_{2t} , $t = 1, \dots, 84$



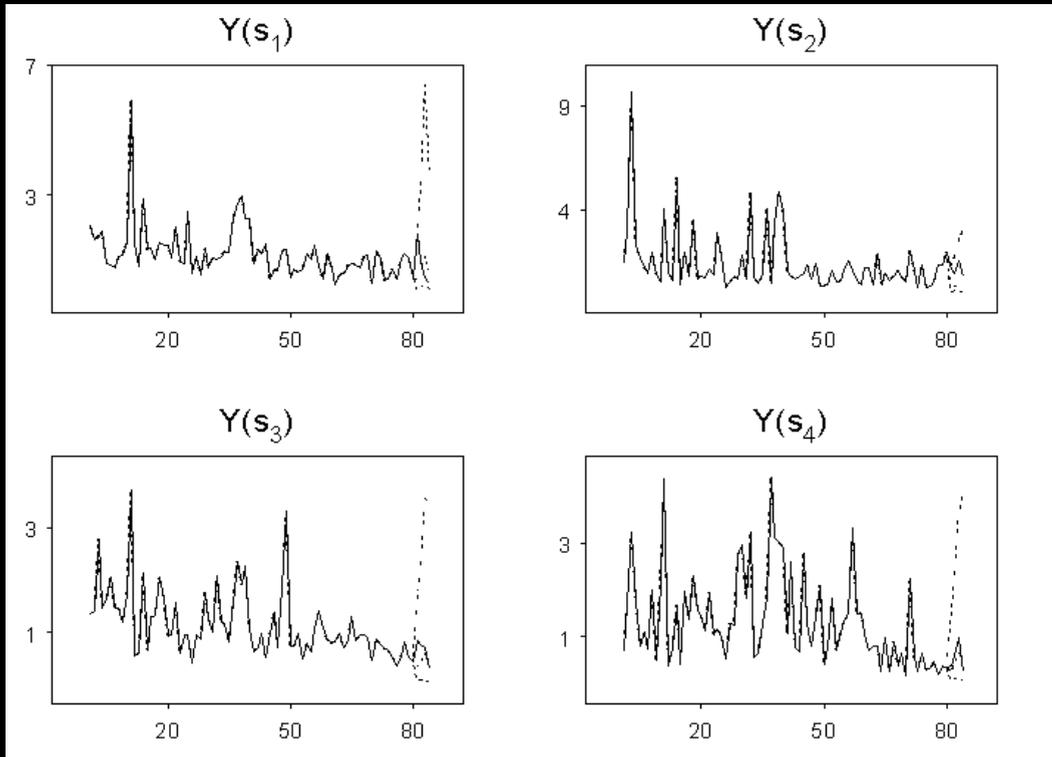
Mapas de contorno da média da distribuição a posteriori dos elementos de $\theta_{1,81}(\cdot)$, coeficientes de regressão no instante $t = 81$.

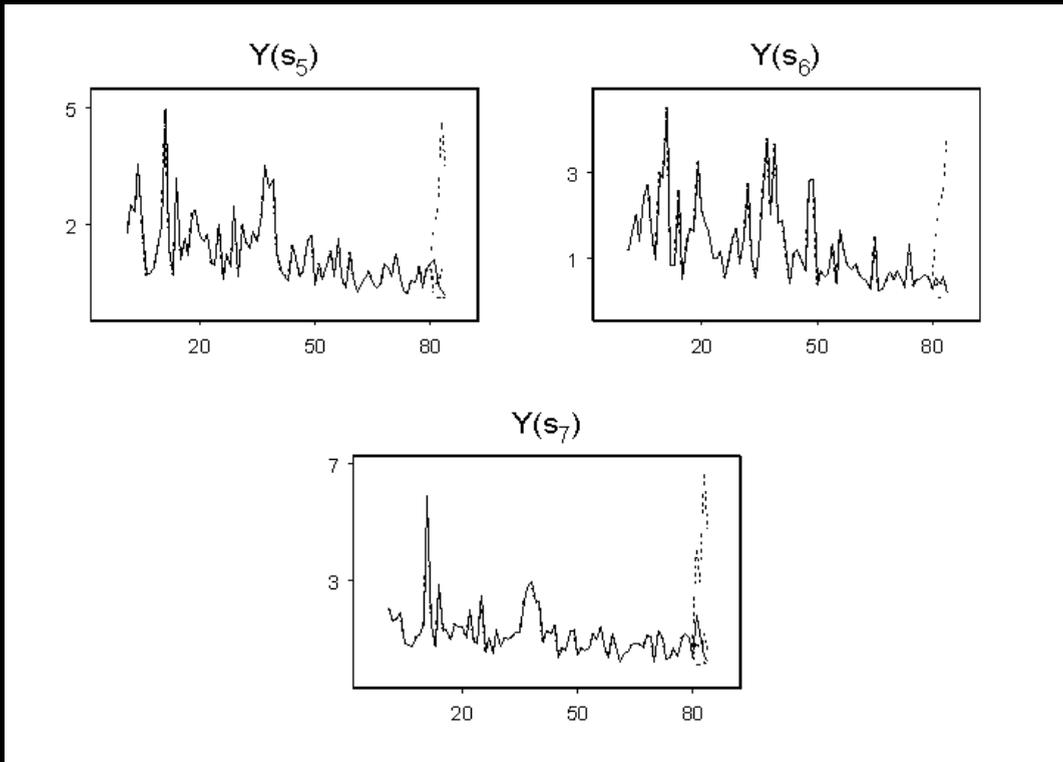


Mapa de contorno da amostra da distribuição a posteriori de $Y_{81}(\cdot)$



Séries temporais observadas nos locais $\{s_1, \dots, s_7\}$, para $t = 1, \dots, 84$, e média e intervalos de credibilidade de 95% previstos para os 4 últimos períodos de tempo





7. Conclusão

7. Conclusão

- Metodologia adequada para aplicações onde observações variam suavemente no tempo e espaço.

7. Conclusão

- Metodologia adequada para aplicações onde observações variam suavemente no tempo e espaço.
- Podemos incorporar variação suave dos coeficientes de regressão em uma ou ambas as dimensões.

7. Conclusão

- Metodologia adequada para aplicações onde observações variam suavemente no tempo e espaço.
- Podemos incorporar variação suave dos coeficientes de regressão em uma ou ambas as dimensões.
- Os modelos propostos são flexíveis o suficiente para acomodar diversos tipos de processos ambientais

7. Conclusão

- Metodologia adequada para aplicações onde observações variam suavemente no tempo e espaço.
- Podemos incorporar variação suave dos coeficientes de regressão em uma ou ambas as dimensões.
- Os modelos propostos são flexíveis o suficiente para acomodar diversos tipos de processos ambientais
- Estimação e interpolação são feitas de forma razoavelmente simples

Modelos Dinâmicos Espaciais

Marina Silva Paez

marina@im.ufrj.br

e

Dani Gamerman

dani@im.ufrj.br

<http://dme.ufrj.br/dani>

Departamento de Métodos Estatísticos

Instituto de Matemática - UFRJ

MUITO OBRIGADO!