/ /

UFPR CE085 - Inferência Estatística.

Aluno: Rogério de Jesus Hultmann Filho GRR: 20137589

① Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a.a da v.A tal que $X \sim Bern(\theta)$, verifique se T é suficiente para θ nos seguintes casos:

a) $T = X_1 + 2X_2 + X_3$ para $n = 3$

Solução: Devemos verificar se

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3 / T = t)$ independe de θ, $\forall (x_1, x_2, x_3)$.

Consideremos, por exemplo, que

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1 / T = 2)$$

$$= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_1 + 2X_2 + X_3 = 2)}{P(X_1 + 2X_2 + X_3 = 2)}$$

$$= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)}{P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)}$$, pela independência

$$= \frac{P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1)}{P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 0) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1)}$$

$$= \frac{\theta^2 (1-\theta)}{(1-\theta)^2 \theta + \theta^2 (1-\theta)} = \frac{[\theta \cancel{(1-\theta)}]\theta}{[\theta(\cancel{1}-\theta)](1-\theta) + \theta} = \frac{\theta}{1} = \theta.$$

Essa depende de θ, portanto NÃO É suficiente.

b) $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n / T = t)$$

$$= \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n, \sum x_i = t)}{P(\sum X_i = t)}$$

/ /

Se $X_i \sim B(\theta)$, então $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom(n, \theta)$

E $P(T=t) = \binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}$, $t = 0, \dots, n$

Pela independência.

$$\frac{P(X_1 = x_1) . P(X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n)}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}}$$

$$= \frac{\theta^{x_1} (1-\theta)^{1-x_1} \dots \theta^{x_n} (1-\theta)^{x_n}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} = \frac{\cancel{\theta^{\Sigma x_i}} \cancel{(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}}}{\binom{n}{t} \cancel{\theta^{\Sigma x_i}} \cancel{(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

$\therefore$ não depende de θ e $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

(2) Seja $X \sim Bernoulli(\theta)$, prove que pertence à família exponencial.

$\therefore$ provar que $f(x;\theta) = h(x) . c(\theta) \exp\left(\sum_{i=1}^{n} w(\theta) . T(x)\right)$

$f(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$

$$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x (1-\theta)$$ $\rightarrow$ aplicando log e

$$= \exp\left[x \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \log(1-\theta)\right]$$

Então, $h(x) = 0$, $T(x) = x$, $c(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$

e $w(\theta) = \log(1-\theta)$

Portanto, é da família exponencial.

③ Achar uma estatística ~~pa~~ suficiente para $X_i \sim N(\theta, \sigma^2)$, com $-\infty < \theta < +\infty$, σ^2 conhecido e

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right).$$

Solução: usando o teorema de Neyman-Fischer

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \cdot \exp\left(\frac{-\Sigma(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$ Abrindo esse produto notável:

$$\Sigma(x-\theta)^2 = \Sigma[(x-\bar{x})-(\theta-\bar{x})]^2 = \Sigma[(x-\bar{x})^2 - 2(x-\bar{x})(\theta-\bar{x}) + (\theta-\bar{x})^2]$$
$$= \Sigma(x-\bar{x})^2 - 2\Sigma(x-\bar{x})(\theta-\bar{x}) + \Sigma(\theta-\bar{x})^2 = \Sigma(x-\bar{x})^2 + n(\theta-\bar{x})^2$$

Então $f_X(x,\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\Sigma(x-\bar{x})^2 + n(\theta-\bar{x})^2\right)\right)$

está na forma $g(t,\theta) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$, então $\bar{X}$ é uma estatística suficiente para θ.

④ Encontrar um estimador de máximo verossimilhança para uma Bernoulli (θ).

Solução: $L(\theta, x) = \prod f(x)$
$= \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n - \Sigma x_i}$

$$\ell(\theta, \underset{\sim}{x}) = \Sigma x_i \log\theta + \left(n - \Sigma x_i\right)\log(1-\theta)$$

Então a equação de verossimilhança é dada a seguir:

$$\frac{\sum x_i}{\hat{\theta}} - \frac{(n - \sum x_i)}{1-\hat{\theta}} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{\hat{\theta}} = \frac{n - \sum x_i}{1-\hat{\theta}}$$

Daqui tira-se que $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

(5) Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a. de X cuja $f(x;\theta) = \theta X^{-2}$, $0 \leq \theta \leq x$

Encontrar, se existir, um estimador pelo método dos momentos:

Solução:

$EX = \frac{\sum x_i}{n}$ $\xrightarrow{\text{como}}$ é contínua $= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\, dx = \int x \cdot \theta \cdot x^{-2}\, dx$

$= \theta \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \theta \ln(x) \Big|_{\theta}^{+\infty} = +\infty$

$\therefore$ não existe estimador de momentos.