Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom / /

1) Verificar se a dist. poisson pertence à família exponencial

$$f(x,\theta) = \frac{e^{-\theta}\cdot\theta^{x}}{x!} = \exp\left\{\frac{e^{-\theta}\cdot\theta^{x}}{x!}\right\}$$

$$= \underbrace{-\theta}_{c(\theta)} + \underbrace{x\ln\theta}_{w\theta\cdot t(x)} - \underbrace{\ln x!}_{h(x)}$$

2) Seja $X_1, X_2, \dots X_n$ a.a. Poisson (θ). Verificar se a estatística $T = \sum X_i$ é suficiente para θ

Função geradora de momento de Poisson $(\theta) = e^{\theta}(e^{t}-1)$

$$e^{\theta}(e^{t}-1)\cdot e^{\theta}(e^{t}-1)\dots e^{\theta}(e^{t}-1) = e^{n\theta}(e^{t}-1)$$

soma de poisson é uma poisson $(n\theta)$

$$P(T=t) = \frac{e^{-n\theta}\cdot n\theta^{t}}{t!}$$

$$P(\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x} / T=t) = \frac{P(X_1=x_1, X_2=x_2 \dots / T=t)}{P(T=t)} = \frac{\frac{\theta^{x_1}\cdot e^{-\theta}}{x_1!}\cdot\frac{\theta^{x_2}\cdot e^{-\theta}}{x_2!}\dots\frac{\theta^{x_n}\cdot e^{-\theta}}{x_n!}}{\frac{e^{-n\theta}\cdot n\theta^{t}}{t!}}$$

$$= \frac{\cancel{\theta^{\sum x_i}\cdot e^{-n\theta} / \prod_{i=1}^{n} x_i!}}{\cancel{e^{-n\theta}\cdot n^{t}\theta^{t} / t!}} \Rightarrow \frac{\theta^{\sum x_i}\cdot \cancel{e^{-n\theta}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\cdot\frac{t!}{\cancel{e^{-n\theta}}\cdot n^{t}\theta^{t}} \Rightarrow \frac{\cancel{\theta^{\sum x_i}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\cdot\frac{\sum x_i!}{n^{\sum x_i}\cdot\cancel{\theta^{\sum x_i}}}$$

$$= \frac{\sum x_i!}{\prod_{i=1}^{n} x_i!\cdot n^{\sum x_i}}$$ ∴ independe de θ

(3) Seja $X_1, X_2, \dots X_n$ uma a.a. iid onde $X \sim$ Bernoulli (θ)
Prove que $T(X) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ é uma estatística suficiente

Como uma soma de Bernoulli é uma Binomial, $T(X) \sim Bin(n, \theta)$
onde $t = \Sigma X_i$

$$\frac{P(X|\theta)}{g(T(X)|\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} = \frac{\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{\Sigma(1-x_i)}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} \qquad t = \Sigma x_i$$

$$\frac{\cancel{\theta^t(1-\theta)^{n-t}}}{\binom{n}{t}\cancel{\theta^t(1-\theta)^{n-t}}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

Como a estatística não depende do parâmetro
$t = \Sigma x_i$ é suficiente para θ

(4) Seja $X_1, X_2, \dots X_n$ a.a. $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontrar pelo TFN uma estatística suficiente para σ^2 com μ conhecido

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}$$

$$L(\underline{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

$$L(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\cdot(x-\mu)^2}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,\theta^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta^2}\Sigma(x_i-\mu)^2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}}_{h(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta^2}\Sigma(x_i-\mu)^2}}_{g_\theta(T(x))} \qquad T(\underline{x}) = \Sigma(x_i-\mu)^2$$

Ter Qua Qui Sex Sáb Dom / /

⑤ Verificar se a Distribuição de Poisson pertence à família exponencial

$\frac{e^{-\theta}\,\theta^{x}}{x!}$ $x = \{0,1,2,\dots\}$, $\theta>0$

$$e\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta}\cdot\theta^{x}}{x!}\right)\right\} = e\{\underbrace{-\theta}_{c(\theta)} + \underbrace{x\ln\theta}_{w\theta\cdot t(x)} - \underbrace{\ln(x!)}_{h(x)}\}$$

∴ pertence à família exponencial