Lista 1 de Exercícios de Estatística Inferencial

Nome: Mariana Marinho Soares

GRR: 20124677

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. Poisson(θ). Pelo Teorema da Fatoração de Neymann, encontre uma estatística suficiente para θ.

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x}}{x!}$$

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = \underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}}_{h(\underset{\sim}{x})} \cdot \underbrace{e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{g_\theta(T(x))}$$

onde $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ é uma estatística suficiente para θ.

2. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. Geométrica(θ). Pelo Teorema da Fatoração, encontre uma estatística suficiente para θ.

$$f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x} \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_i) = \underbrace{\theta^{n}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{g_\theta(T(x))} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}(x_i)}_{h(\underset{\sim}{x})}$$

onde $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ é uma estatística suficiente para θ.

3. Verifique se a distribuição Poisson pertence à família exponencial e encontre uma estatística suficiente.

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x}}{x!}$$

$$\exp\left\{\ln\left[\frac{\theta^{x}\cdot e^{-\theta}}{x!}\right]\right\} = \exp\left\{x.\ln\theta + (-\theta.\overset{1}{\ln e}) - \ln x!\right\}$$

$$= \exp\left\{\underset{T(x)}{x}.\underset{c(\theta)}{\ln\theta} \underset{d(\theta)}{-\theta} \underset{h(x)}{-\ln x!}\right\}$$

$$T(x).c(\theta) + d(\theta) + h(x)$$

A distribuição Poisson pertence à família exponencial e $T(x)=x$ é uma estatística suficiente para θ $(n=1)$.

4. Considerando uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição Beta$(\theta,1)$. Verifique se ela pertence à família exponencial e encontre uma estatística suficiente para θ.

$$f(x;\theta) = \theta.x^{\theta-1}, \quad 0<x<1$$

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n}\theta.x_i^{\theta-1} = \theta^{n}.\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1}$$

$\ln\pi = \Sigma\ln$

$$\exp\left\{\ln\left[\theta^{n}.\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1}\right]\right\} = \exp\left\{n\ln\theta + (\theta-1)\ln\left[\prod_{i=1}^{n}x_i\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{n\ln\theta + (\theta-1).\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right\}$$

$$= \exp\left\{\underset{d(\theta)}{n\ln\theta} + \underset{c(\theta)}{\theta}\underset{T(\underset{\sim}{x})}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} \underset{h(\underset{\sim}{x})}{-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right\}$$

$$d(\theta) + c(\theta).\ T(\underset{\sim}{x}) \qquad h(\underset{\sim}{x})$$

A distribuição Beta$(\theta,1)$ pertence à família exponencial e $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ é uma estatística suficiente para θ.