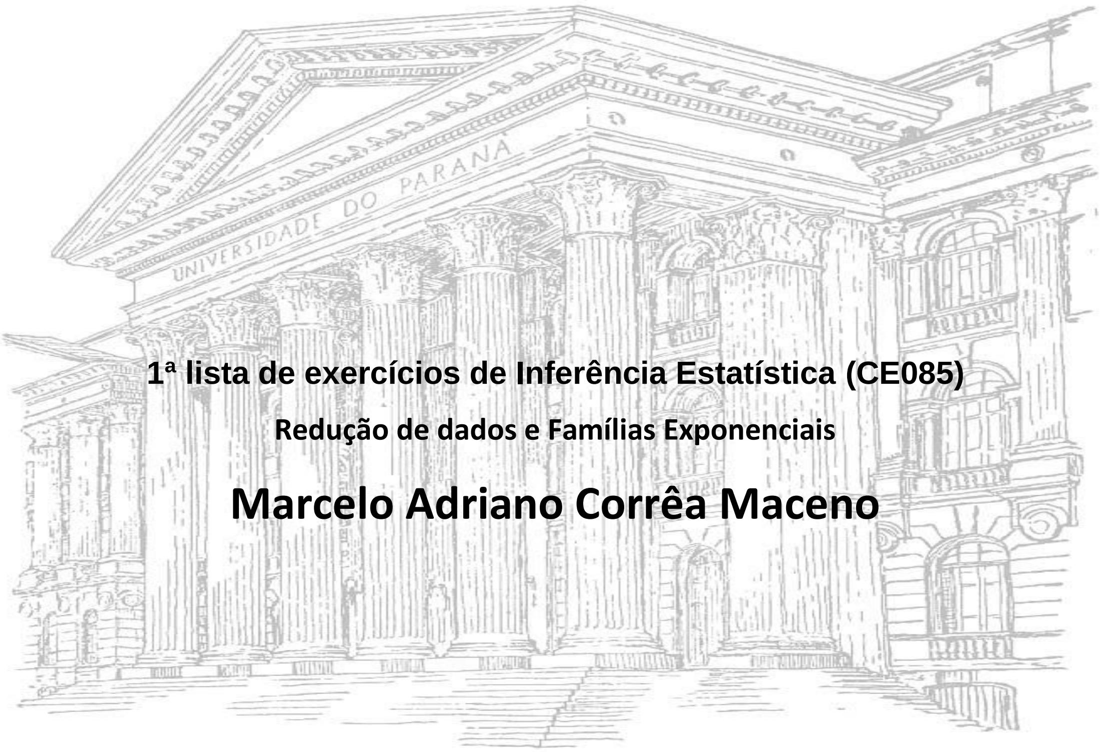
Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Estatística



1ª lista de exercícios de Inferência Estatística (CE085)

Redução de dados e Famílias Exponenciais

Marcelo Adriano Corrêa Maceno

Eduardo Vargas Ferreira

Curitiba

Setembro de 2015

Exercício 1 – Sejam X_1, X_2, ... X_n uma amostra aleatória de distribuição binomial (1,θ), ou seja, de Bernoulli (θ). Verifique se a estatística T=$\sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Resposta:

Utilizando a definição de estatística suficiente, T é suficiente para θ se a probabilidade condicional $P[X_1=x_1,..., X_n=x_n|T=t]$ for independente de θ. Temos para x_1, x_2, ..., x_n = 0 ou 1 e t = 0, ..., n,

$$\mathrm{P}[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}] = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i \neq t \\ \dfrac{\mathrm{P}\,[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}]}{P[T = t]}, & \sum_{i=1}^{n} x_i = t \end{cases}$$

Ou seja, sendo $\sum_{i=1}^{n} x_i = t \, , temos \; que$:

$$\mathrm{P}[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}] = \frac{\mathrm{P}\,[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}]}{P[T = t]}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}] = \frac{\mathrm{P}\,[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}] \ldots \mathrm{P}[\,\mathrm{Xn} = \mathrm{xn}]}{\binom{n}{t}\,\theta^{t}(1-\,\theta)^{n-t}}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}] = \frac{\theta^{x_1}(1-\,\theta)^{1-x_1} \ldots\, \theta^{x_n}(1-\,\theta)^{1-x_n}}{\binom{n}{t}\,\theta^{t}(1-\,\theta)^{n-t}}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}] = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\,\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\binom{n}{t}\,\theta^{t}(1-\,\theta)^{n-t}}$$

Sendo: $\sum_{i=1}^{n} x_i = t$

$$\mathrm{P}[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}] = \frac{\theta^{t}(1-\,\theta)^{n-t}}{\binom{n}{t}\,\theta^{t}(1-\,\theta)^{n-t}}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{X1} = \mathrm{x1}, \ldots, \mathrm{Xn} = \mathrm{xn} | \mathrm{T} = \mathrm{t}] = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

Assim, T é suficiente para θ, pois não depende de θ.

Exercício 2 - Consideremos a mesma situação do exercício 1, mas com n = 3 e T = X_1 + $2X_2$ + X_3. Vamos verificar se T é suficiente. Considerando o caso para X_1 = 1, X_2 = 0, X_3=1, temos que T = 2.

Resposta:

$$P[X1 = 1, X2 = 0, X3 = 1|T = 2] = \frac{P[X1 = 1, X2 = 0, X3 = 1]}{P[X1 + 2X2 + X3 = 2]}$$

$$P[X1 = 1, X2 = 0, X3 = 1|T = 2] = \frac{P[X1 = 1, X2 = 0, X3 = 1]}{P[X1 = 1, X2 = 0, X3 = 1] + P[X1 = 0, X2 = 1, X3 = 0]}$$

$$P[X1 = 1, X2 = 0, X3 = 1|T = 2] = \frac{\theta^2(1 - \theta)}{\theta^2(1 - \theta) + (1 - \theta)^2\theta}$$

$$P[X1 = 1, X2 = 0, X3 = 1] = \theta$$

Como a probabilidade depende de θ, concluímos que T não é suficiente para θ, pois, nesse caso, a distribuição condicional de $X_1, X_2, ..., X_n$ dado T depende de θ.

Exercício 3 – Suponha que X_1, X_2 e X_3 são variáveis aleatórias iid com distribuição Bernoulli(p), em que p é o parâmetro desconhecido, 0 < p < 1. Verifique se $T = X_1X_2+X_3$ é suficiente para p, com T = 0, com $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$.

Resposta:

Sendo o evento T = 0 o mesmo que:

$\{X_1=0\} \cap \{X_2=0\} \cap\{X_3=0\} \cup \{X_1=1\} \cap \{X_2=0\} \cap\{X_3=0\} \cup \{X_1=0\} \cap \{X_2=1\} \cap\{X_3=0\}$

Podemos escrever da forma:

$$P(T = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0)$$

$$P(T = 0) = (1 - p)^3 + 2p(1 - p)^2 = (1 - p)^2(1 + p)$$

Considerando:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0|T = 0) = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0)}{P(T = 0)}$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0|T = 0) = \frac{(1 - p)^3}{(1 - p)^2(1 + p)} = \frac{1 - p}{1 + p}$$

A última expressão depende de p, assim, o T proposto não é suficiente.

Exercício 4 – Sejam X_1, X_2, ..., X_n uma amostra aleatória da distribuição N(μ,1). Utilize o critério da fatoração para encontrar uma estatística suficiente.

Resposta:

Temos, então, que

$$L(\mu; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x_1-\mu)^2}{2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x_n-\mu)^2}{2}}$$

$$L(\mu; x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{-(x_i-\mu)^2}{2}}$$

$$L(\mu; x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{n\mu^2}{2} + \mu \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Pelo critério da fatoração, T(x)=$\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para μ.

Exercício 5 – Seja uma variável aleatória com distribuição N(μ,1). Escreva a equação de distribuição da distribuição normal relacionando-a com a equação geral das famílias exponenciais.

Resposta:

A equação geral de uma distribuição binomial é dada por:

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}}$$

Colocando no formato da família exponencial:

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu x - \frac{\mu^2}{2} - \frac{x^2}{2} - log\sqrt{2\pi}}$$

Sendo:

C(μ)=μ;

d(μ)=$-\frac{\mu^2}{2}$;

T(x)=x;

S(x)=$-\frac{x^2}{2} - log\sqrt{2\pi}$;