01- Defina família exponencial e cite exemplos:

A família de distribuição é dita pertencer a família exponencial se puder ser expressa da forma:

$$f(y;\theta) = s(y)t(\theta)\exp\{a(y)b(\theta)\}$$, onde s, t, a e b são funções não negativas.

Exemplos de distribuições que pertencem à família exponencial são: Normal, gama e beta

02- Seja Y uma variável tal que: $Y \sim Poisson(\theta)$.

Verifique se essa distribuição pertence à família exponencial.

$$f(y,\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{y}}{y!} = (y!)^{-1}e^{-\theta}\exp\{\log(\theta^{y})\}$$

$$= (y!)^{-1}e^{-\theta}\exp\{y\log(\theta)\}$$

$$= \underbrace{(y!)^{-1}}_{s(y)}\underbrace{e^{-\theta}}_{t(\theta)}\exp\{\underbrace{y}_{a(y)}\underbrace{\log(\theta)}_{b\theta}\}$$

03- Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída em $[0;\theta]$ e $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória iid de X. Esta distribuição tem função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & \text{se } 0 \le x \le \theta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como é dada a função de verossimilhança?

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}(x_1, \ldots, x_n \in [0;\theta])$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \, 1\!\!1_{\max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \theta}$$

Como $\frac{1}{\theta^n}$ é uma função decrescente de θ, a estimativa será o menor valor possível de θ para o qual $\theta \geq x_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Este valor é $\theta = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$, de onde segue que o estimador de máxima verossimilhança de θ é $\hat{\theta} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$

04- Defina:

a) Estatística suficiente: Dizemos que a estatística $T = T(X)$ é suficiente para θ se a distribuição condicional de X dado T for independente de θ

b) Estatística suficiente minimal: $T(X)$ é estatística suficiente minimal para θ se for suficiente e se for função de qualquer outra estatística suficiente para θ

c) Estatística completa: Uma estatística $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dita ser completa em relação à família $p(x|\theta)$ se a única função real g definida no domínio de T tal que $E[g(T)] = 0 \ \forall \theta$ é a função nula, i.e. $g(T) = 0$

05- Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2, temos que $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$ e os dois primeiros momentos amostrais são dados por:

$$m_1 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i = \bar{X} \qquad m_2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

Quais são os estimadores para a média populacional μ e variância populacional σ^2 pelo método dos momentos?

$$\hat{\mu}_M = m_1 = \bar{X} \quad e \quad \hat{\sigma}^2_M = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i^2 - \bar{X}^2 = \hat{\sigma}^2$$