1. **Deseja-se estimar a média das alturas dos alunos da turma de Estatística. Quais seriam estimadores possíveis?**

A média amostral:

$$\hat{\mu}_A = \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

O ponto médio entre os valores máximo e o mínimo da amostra:

$$\hat{\mu}_B = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

A mediana da amostra:

$$\hat{\mu}_C = \widetilde{X}$$

2. **Seja X uma variável aleatória com distribuição Poisson e parâmetro λ. Tomemos uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ independente, e igualmente distribuída de X. Qual é o estimador de máxima verossimilhança para λ?**

Como X ~ $\text{Poisson}(\lambda)$, a função de probabilidade de X é

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\lambda; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

Ou seja,

$$L(\lambda; x_1, , x_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}.$$

Para encontrar o estimador de máxima verossimilhança para λ, devemos encontrar o valor de λ para o qual a função de verossimilhança $L(\lambda; x_1, \ldots, x_n)$ é máxima.

Aplicamos a função logaritmo natural (ln) na função de verossimilhança $L(\lambda; x_1, \ldots, x_n)$. Desta forma, temos que

$$\ln L(\lambda; x_1, \ldots, x_n) = \ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_1!}\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \lambda - n\lambda$$

e, derivando em relação a λ, segue que

$$\frac{d \ln L(\lambda; x_1, \ldots, x_n)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n.$$

Igualando o resultado a zero, segue que

$$\frac{1}{\hat{\lambda}}\sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}.$$

Neste caso, o possível estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro λ é $\hat{\lambda} = \overline{X}$. Basta verificar se este ponto é realmente um ponto de máximo. Para isto, vamos calcular a segunda derivada de $\ln L(\lambda; x_1, \ldots, x_n)$.

$$\frac{d^2 \ln L(\lambda; x_1, \ldots, x_n)}{d\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0.$$

Portanto, concluímos que $\hat{\lambda} = \overline{X}$ é um estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro λ.

3. **Seja (X1, · · · , Xn) ~ Bernoulli(θ). Mostre que tal distribuição pertence à família exponencial.**

$$\begin{aligned}
p(x|\theta) &= \theta^x (1-\theta)^{1-x} I_x(\{0,1\}) \\
&= \exp\left\{x \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \log(1-\theta)\right\} I_x(\{0,1\}) \\
\Rightarrow p(\boldsymbol{x}|\theta) &= \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + n\log(1-\theta)\right\} I_{\boldsymbol{x}}(\{0,1\}^n)
\end{aligned}$$

4. **Sejam X1, · · · , Xn ∼ Poisson(λ). Mostre que esta distribuição pertence à família exponencial.**

$$\begin{aligned} p(x|\lambda) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_x(\{0,1,\cdots\}) = \frac{1}{x!}\exp\{-\lambda + x\log\lambda\} I_x(\{0,1,\cdots\}) \\ \Rightarrow p(\boldsymbol{x}|\lambda) &= \frac{1}{\prod x_i!}\exp\{-n\lambda + \sum x_i \log\lambda\} I_{\boldsymbol{x}}(\{0,1,\cdots\}^n) \end{aligned}$$

5. **Seja X1, . . . , Xn uma amostra aleatória da distribuição U(0, θ), θ > 0. Defina o estimador de máxima verossimilhança (EMV).**

A função densidade é dada por:

$$p(\boldsymbol{x}|\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & 0 \le x_i \le \theta,\ i = 1,\dots,n \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, a verossimilhança é uma função estritamente decrescente de θ e portanto seu máximo é atingido quando θ assume o menor dos seus possíveis valores. Esta condição é satisfeita quando θ = max(x1, . . . , xn), i.e. o EMV é ˆθ = max(X1, . . . , Xn). Por outro lado a função de densidade poderia ser definida como:

$$p(x|\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & 0 < x_i < \theta,\ i = 1,\dots,n \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Neste caso, max(X1, . . . , Xn) não é um dos possíveis valores de θ já que θ > xi , i = 1, . . . , n, i.e. θ > max(X1, . . . , Xn). Portanto, o EMV não existe.