GRR- 20137564

KETLIN HOFFMAM

① Seja $x_1, \dots, x_n$, uma amostra independente e igualmente distribuída com distribuição Bernoulli com parâmetro θ. Neste caso temos que a estatística $T(x) = X_1 +, \dots X_n$ é uma estatística suficiente para θ.
De fato temos que $T(x)$ tem distribuição Binomial com parâmetros n e θ, isto é $T(x) \sim Bin(n, \theta)$ supondo que $\sum x_i = t$ segue que

$$\frac{p(x|\theta)}{g(T(x)|\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} = \frac{\theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{\sum(1-x_i)}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}}$$

$$= \frac{\theta^t (1-\theta)^{n-t}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

de forma que $T(x)$ é suficiente p/ θ.

② Seja X uma variável aleatória com distribuição de poisson e parâmetro λ. a.a $x_1, \dots, x_n$ iid. Qual o estimador de máx veross. p/ λ?

Como $X \sim$ Poisson (λ), a função de probabilidade de X é

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}$$

Desta forma, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}$$

p/ encontrar o estimador de verossim. p/ λ, devemos encontrar o valor de λ p/ o qual a função de verrossim ($L(\lambda, x_i, \dots, x_n)$) é máxima

* Aplicamos ln na FVS $L(\lambda, x_1, \dots, x_n)$ resultando

$$\ln L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - n\lambda$$

* e derivando em relação a λ, segue que:

$$\frac{d \ln L(\lambda, x_1, \dots, x_n)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n$$

* igualando o resultado a zero

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

Neste caso, o possível estimador de λ e $\hat{\lambda} = \bar{x}$.

* Verificar se é ponto de máximo, calculando a segunda derivada de $\ln L(\lambda, x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{d^2 \ln L(\lambda, x_1, \dots x_n)}{d\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} < 0.$$

Portanto conclui-se que $\hat{\lambda} = \bar{x}$ é um estimador de verossimilhança p/ parâmetro λ.

③ $X_i \sim$ Bernouli (θ), amostra $= [x_1, x_2, x_3]$. $T = \Sigma x$ é suficiente?

$$f_X(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n=3} f(x_i,\theta) = \prod \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{3-\Sigma x_i}$$

$$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\Sigma x_i} (1-\theta)^3$$

$\therefore \begin{cases} g(t,\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\Sigma x_i} (1-\theta)^3 \text{ depende da amostra através de } t. \\ h(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ independe de } \theta \text{, assim } T \text{ é suficiente} \end{cases}$

④ Seja X_1, x_n uma amostra identicamente e igualmente distribuída com Distrib. $N(\mu, \sigma^2)$. A média amostral $T(X) = \bar{X}$ é uma estatística suficiente p/ μ.

Uma estatística $T(x)$ é suficiente p/ θ se, e somente se, existem funções $g(t/\theta)$ e $h(x)$ tais que p/ qlqr ponto amostral x e θ no espaço paramétrico vale a igualdade

$$f(x|\theta) = g(T(x)|\theta)\,h(x) \qquad \text{(fatoração)}$$

$$f(x|\mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

e definindo

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

que ñ depende do parametro μ e

$$g(t|\mu) = \exp\left(-\frac{n(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

que é um fator que contem o parametro μ e depende da amostra x pela função $T(x) = \bar{x}$

Dessa forma segue que:

$$f(x|\mu) = h(x)g(T(x)|\mu)$$

e então, pelo teorema de fatoração, $T(x) = \bar{X}$ é uma estatística suficiente p/ μ.

(5) Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória independente e igualmente distribuída de uma distribuição de Bernou com parametro $0<\theta<1$. A dist. de Bernoulli perten a família exponencial.

$$f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} = \exp\{\log(\theta^x(1-\theta)^{1-x})\}$$

$= \exp\{x\log\theta + (1-x)\log(1-\theta)\}$ onde podemos escrever:

$$= f(x|\theta) = \exp\{x\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \log(1-\theta)\} = (1-\theta)\exp\{x\log($$

e então:

$c(\theta) = 1-\theta$, $t(x) = x$ e $w(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$

Teorema: A função $f(x|\theta)$ que pertence a uma família exponencial, ou seja $f(x|\theta)$ pode ser escrita:

$$f(x|\theta) = h(x)\,c(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta)\,t_i(x)\right)$$