Exercícios de Inferência Estatística

João Matheus Honedo - GRR20149092

- Família Exponencial ($f(x|\theta) = h(x)\, c(\theta) \exp\left(\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta) t_i(x)\right)$)

1) Seja $f(x|\mu,\sigma^2)$ a família $n(\mu,\sigma^2)$ de fdps, onde $\theta=(\mu,\sigma)$, $-\infty<\mu<\infty$, $\sigma>0$. Então,

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(\frac{-(x^2-2x\mu+\mu^2)}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp\underbrace{\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2}\right)}_{h(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &h(x) = 1 \text{ para todo } x \\ &c(\theta) = c(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}\right), -\infty<\mu<\infty, \sigma>0 \end{aligned}}$$

$$w_1(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \qquad w_2(\mu,\sigma) = \frac{\mu}{\sigma^2}$$

$$t_1(x) = \frac{-x^2}{2} \qquad t_2(x) = x$$

Então, $f(x|\mu,\sigma^2) = h(x) \cdot c(\mu,\sigma) \cdot \exp[w_1(\mu,\sigma) \cdot t_1(x) + w_2(\mu,\sigma) \cdot t_2(x)]$

spiral

2) Seja n um número inteiro positivo e considere a família binomial(n, p) com $0 < p < 1$. Então, a fp para esta família, para $x = 0, \ldots, n$ e $0 < p < 1$, é

$$f(x|p) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot \frac{(1-p)^{n}}{(1-p)^{x}}$$

$$= \binom{n}{x} \cdot (1-p)^{n} \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x}$$

$$= \binom{n}{x} (1-p)^{n} \cdot \exp\left(\log\left(\frac{p}{1-p}\right)^{x}\right)$$

$$= \underbrace{\binom{n}{x}}_{h(x)} \cdot \underbrace{(1-p)^{n}}_{c(p)} \cdot \exp\left(x \cdot \log\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)$$

$$h(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}, & x = 0, \ldots, n \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \qquad c(p) = (1-p)^{n}, \ 0 < p < 1$$

$$w_1(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right), \ 0 < p < 1$$

$$t_1(x) = x$$

$$\boxed{f(x|p) = h(x)\, c(p) \exp[w_1(p)\, t_1(x)]}$$

Estatística Inferente

↳ Se $p(x|\theta)$ é a fdp ou fp conjunta de X e $q(t|\theta)$ é a fdp ou fp de $T(X)$, então $T(X)$ é uma estatística suficiente para θ se para todo x no espaço amostral a proporção $p(x|\theta)/q(T(x)|\theta)$ for constante como uma função de θ.

3) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra independente e igualmente distribuída com distribuição de Bernoulli com parâmetro θ. Prove que $T(X) = X_1 + \dots + X_n$ é uma estatística suficiente para θ.

↳ $T(X)$ tem distribuição Binomial com parâmetros n e θ, ou seja, $T(X) \sim \text{Binomial}(n, \theta)$ pois $T(X) = X_1 + \dots + X_n$.

$\sum X_i = t$

$$\frac{p(x|\theta)}{q(T(x)|\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} = \frac{\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{\sum(1-x_i)}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}}$$

$$= \frac{\theta^t(1-\theta)^{n-t}}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

Portanto, $T(X)$ é suficiente para θ.

4) Sejam $X_1, \dots, X_n$ $N(\mu, \sigma^2)$ iid, onde σ^2 é conhecido. Vamos mostrar que a média amostral, $T(X) = \bar{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$ é uma estatística suficiente para μ. A fdp conjunta da amostra X é

$$f(x/\mu) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-(x_i - \mu)^2/(2\sigma^2))$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2/(2\sigma^2)\right)$$

(Somando e subtraindo $\bar{x}$) $= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu)^2/(2\sigma^2)\right)$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2\right)/(2\sigma^2)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(\bar{x} - \mu) = (\bar{x} - \mu)\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})$$

$$\frac{f(x/\theta)}{q(T(x)/\theta)} = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2\right)/(2\sigma^2)\right)}{(2\pi\sigma^2/n)^{-1/2} \cdot \exp(-n(\bar{x} - \mu)^2/(2\sigma^2))}$$

$$= n^{-1/2} (2\pi\sigma^2)^{-(n-1)/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/(2\sigma^2)\right)$$

Não depende de μ. Portanto, a média amostral é uma estatística suficiente para μ.