Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística

CE085 - ESTATÍSTICA INFERENCIAL

Docente Eduardo Vargas Ferreira
Discente Jhenifer Caetano Veloso GRR20137558

24 de setembro de 2015

Lista de Exercícios

1) Seja X uma variável tal que $X \sim Poisson(\theta)$. Verifique que esta distribuição pertence à família exponencial.

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \\ &= \frac{1}{x!}\exp\{-\theta + \log(\theta^x)\} \\ &= \frac{1}{x!}e^{-\theta}\exp\{x\log(\theta)\} \end{aligned}$$

Portanto, pertence a família exponencial. Sendo, h(x)=$\frac{1}{x!}$, c(θ)=$e^{-\theta}$, w(θ)=log(θ) e t(x)=x.

2) Seja $X_i \sim N(\theta;\sigma^2)$ com σ^2 conhecido. Encontre uma estatística suficiente para θ.

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(X-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ \prod_{i=1}^{n} f(x;\theta) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(X-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum(X-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

Mas $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\bar{X})-(\theta-\bar{X})\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\bar{X})^2 - \underbrace{2(X_i-\bar{X})(\theta-\bar{X})}_{0} + (\theta-\bar{X})^2\right] =$
$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\bar{X})^2+(\theta-\bar{X})^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\theta-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + n(\theta-\bar{X})^2$

$$= f(x;\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + n(\theta-\bar{X})^2\right]\right\}$$

$\bar{X}$ é uma estatística suficiente para θ.

3) Prove que distribuição Bernoulli pertence à família exponencial.

$$\begin{aligned}
f(x;\theta) &= \theta^x(1-\theta)^{1-x} \\
&= \exp\{\log(\theta^x(1-\theta)^{1-x})\} \\
&= \exp\left\{\log\left(\theta^x\frac{1-\theta}{(1-\theta)^x}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\log\left(\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x(1-\theta)\right)\right\} \\
&= \exp\left\{x\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)+\log(1-\theta)\right\} \\
&= \exp\left\{x\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right\}\exp\left\{\log(1-\theta)\right\} \\
&= (1-\theta)\exp\left\{x\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right\}
\end{aligned}$$

A distribuição pertence a família exponencial. w(θ)=log $\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, t(x)=x, c($\theta$)=$1-\theta$

4) Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória independente e igualmente distribuída de uma distribuição Bernoulli com parâmetro θ. Encontre a estatística suficiente.

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta) &= \prod_{i=1}^{n}\left\{\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\right\} \\
&= \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} \\
&= \theta^{\sum x_i}\frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta)^{\sum x_i}} \\
&= (1-\theta)^n\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum x_i}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Fatoração, conclui-se que $\sum x_i$ é uma estatística suficiente.

5) Seja $X \sim \exp(\theta)$. Encontre uma estatística suficiente para θ.

$$\begin{aligned}
f(x;\theta) &= \theta e^{-\theta x} \\
\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta) &= \prod_{i=1}^{n}\left(\theta e^{-\theta x}\right) \\
&= \theta e^{-\theta x_1}\cdot\theta e^{-\theta x_2}\cdot ...\cdot\theta e^{-\theta x_n} \\
&= \theta^n e^{-\theta\sum x_i}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Fatoração, $\sum x_i$ é uma estatística suficiente para θ.