EXERCÍCIO INFERÊNCIA.

① Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da distribuição de Bernoulli (θ).
Verifique se a estatística $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

1º De acordo com a definição, T é suficiente para θ se a probabilidade condicional $P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | T = t]$ for independente de θ, para todo $t = 0, 1, 2, \ldots, n$. Temos, ~~para~~ para $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$ e $t = 0, \ldots, n$

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | T = t] =$$

$$\begin{cases} 0 & , \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i \neq t, \\ \dfrac{P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]}{P[T = t]} & , \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i = t. \end{cases}$$

(1)

se $\sum_{i=1}^{n} x_1 = t$, temos.

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \mid t = t] =$$

$$= \frac{P[X_1 = x_1] \ldots P[X_n = x_n]}{\binom{n}{t} \theta^t \cdot (1-\theta)^{n-t}}$$

$$= \frac{\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \ldots \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} =$$

$$= \frac{\theta^t (1-\theta)^{n-t}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

Pois $X_1, \ldots, X_n$ são independentes
$T \sim$ Binomial (n, θ). Assim

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \mid T = t] = \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{1}{\binom{n}{t}}, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

que não depende de θ. Portanto
$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficient

EXERCICIO 2.

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com parâmetro θ. Verifique se $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficie[nte] para θ.

temos que $P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | T = t$ e que $\sum_{i=1}^{n} x_i = t$.

Portanto temos que

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | T = t] = \frac{P[X_1 = x_1] \ldots P[X_n = x_n]}{P[T = t]}$$

$$= \frac{t!}{x_1! \ldots, x_n!} \cdot \frac{1}{n^t}$$

que é independente de θ. Portanto $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficient[e] para θ.

EXERCICIO 3

Assumindo que $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra independente ~~[illegible]~~ e identicamente distribuida de uma distribuição uniforme discreta em $1, \ldots, \theta$. Dessa forma, a função de probabilidade de X_i é.

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{se } x = 1, 2, \ldots, \theta \\ 0 & \text{, caso contrario.} \end{cases}$$

e a função de probabilidade conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ é,

$$f(X|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \text{se } x_i \in \{1, \ldots, \theta\} \text{ para } i = 1 \ldots n \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

considerando a estatística de ordem $T(X) = x_{(n)} = \max_i x_i$ e as funções $h(x)$ e $g(t|\theta)$ dadas respectivamente por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in \{1, 2, \ldots\} \text{ para } i = 1 \ldots n \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

EXERCICIO 3

$$g(t|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & se\ t \leq 0 \\ 0, & caso\ contrario \end{cases}$$

É imediato verificar que $f(x|\theta) = g(T(x)|\theta)\,h(x)$ para todo $x \in \Theta$.

Portanto pelo teorema da fatoração $T(x)$ é uma estatística suficiente.

EXERCICIO 4 -

FATORAÇÃO.

- AMOSTRA aleatória DE Poisson(θ).

Para $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com $x_i = 1, 2, 3\ldots$ $i = 1, \ldots, n$, temos

$$L(\theta, x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\,\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}, \quad \theta > 0$$

Portanto, tomando $T(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i$,

$$h(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \quad e \quad g_\theta(T(X)) = e^{-n\theta}\,\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

(4)

tenos pelo criterio do fatoração que $T(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente para θ.

(5) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a a i i d de uma Distribuição de Bernoulli com parametro $0 < \theta < 1$.
A distribuição de Bernoulli pertence à familia exponencial. De fato temos que:

$$f(x|\theta) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x} = \exp\{\log(\theta^{x}(1-\theta)^{1-x})\} =$$

$$\exp\{x \log \theta + (1-x)\log(1-\theta)\}.$$

de onde podemos escrever

$$f(x|\theta) = \exp\left\{x \log\left(\frac{\theta}{(1-\theta)}\right) + \log(1-\theta)\right\} =$$

$$(1-\theta)\exp\left\{x \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right\}.$$

E então basta tomar $C(\theta) = 1-\theta$, $t(x) = x$ e $w(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$. Como $t(x) = x$ segue que $T(x) =$

$$\sum_{j=1}^{n} t(X_j) = \sum_{j=1}^{n} X_j$$ é uma

estatistica suficiente para o parametro θ.