Suficiência

i) Seja $X = (X_1, \dots X_r)'$ com dist. Multinomial, assim,

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\dots x_r!}\,\theta_1^{x_1}\dots\theta_r^{x_r}\,\mathbb{1}_A(x)$$

~~Sabendo~~ Sabemos que $X = (X_1, \dots X_r)'$ é estat. suf. p/ θ $(\theta_1, \dots$

Agora, pelo fato de $\sum_{j=1}^{r}\theta_j = 1$ e $\sum_{j=1}^{r} x_i = n$, verifique se $X^* = (X_1, \dots X_{r-1})'$ é est. suf. p/ $(\theta_1, \dots \theta_{r-1})$.

<u>R:</u> Temos que
$$\begin{cases} \theta_r = 1 - \sum_{j=1}^{r-1}\theta_j & \text{e} \\ x_r = n - \sum_{j=1}^{r-1} x_j \end{cases}$$

Assim

$$f(x;\theta) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{r-1} x_j!\,(n - x_1 - x_2 - \dots - x_{r-1})!} \cdot \theta_1^{x_1}\cdot\theta_2^{x_2}\dots\theta_{r-1}^{x_{r-1}}\left(1 - \theta_1 - \dots - \theta_{r-1}\right)^{n-\dots} \cdot \mathbb{1}(\dots$$

Pelo critério da fatoração $X^* = (X_1, \dots X_{r-1})'$ é suficiente p/ $(\theta_1, \dots \theta_{r-1})$

2) Seja $X_1, \dots X_n \sim U(\theta_1, \theta_2)$. Verifique se $(X_{(1)}, X_{(n)})'$ é suficiente p/ θ.

R: Seja $x = (x_1, \dots x_n)'$ e $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ Temos:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n} \mathbb{1}_{[\theta_1, \infty)}(x_{(1)}) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[x_{(1)}, x_{(n)}]}(x_{(r)})}_{\text{exceto } X_{(1)} \text{ e } X_{(n)}} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, \theta_2]}(X_{(n)})$$

$$= \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n} g_1[x_{(1)}, \theta]\, g_2[x_{(n)}, \theta] \cdot h(x)$$

Pelo critério da fatoração $(X_{(1)} , X_{(n)})'$ é suf. p/ θ

3) Seja $X_1, \dots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. Verifique que $(\bar{X}, S^2)$ é suf p/ $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

R. Seja $x = (x_1, \dots x_n)'$, $\mu = \theta_1$ e $\sigma^2 = \theta_2$ com $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Temos:

$$f(\underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{\theta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \theta_1)^2\right\}$$

Mas $\sum(x_j - \theta_1^2) = \sum[(x_j - \bar{x}) + (\bar{x} - \theta_1)]^2 = \sum(x_j - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \theta_1)^2$

Então fica:

$$f(\underset{\sim}{x}; \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2}\sum(x_j - \bar{x})^2 - \frac{n}{2\theta_2}(\bar{x} - \theta_1)^2\right\}$$

Segue que $\left(\bar{X}, \sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2\right)$ é suf p/ θ.

E como $S^2 = \sum(x - \bar{x})^2/$ é f.f. das $(\bar{X}, S^2)$ Tb é suf.

4) Seja $X_1, \dots X_n$ a.a de cada uma das f.d.p's abaixo com valores observados $x_1, \dots x_n$. Determine a estatística suficiente p/ θ.

i) $f(x;\theta) = \dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}$, $x \geq 1$, $\theta \in \Omega = (0,\infty)$.

R:

Se $f(x;\theta) = \dfrac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$, passando o produtório temos

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{\theta^n}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta+1}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x_i) = \frac{\theta^n}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta+1}} \cdot \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x_{(1)}).$$

Então pelo critério da fatoração $\prod_{i=1}^{n} X_i$ é suf. p/ θ.

ii) $f(x;\theta) = \dfrac{x}{\theta} e^{-x^2/2\theta}$, $x > 0$, $\theta \in \Omega = (0,\infty)$

R: Se $f(x_i;\theta) = \dfrac{x}{\theta} e^{-x^2/2\theta} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, o produtório fica:

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod x_i \, e^{-1/2\theta \cdot \sum x_i^2} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_i)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum x_i^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_{(1)})$$

Pelo critério da fatoração $\sum X_i^2$ é suf. p/ θ.

iii) $f(x;\theta) = (1+\theta)x^{\theta}$, $0 < x < 1$, $\theta \in \Omega = (-1,\infty)$

R: Se $f(x;\theta) = (1+\theta)x^{\theta} I_{(0,1)}(x)$, Tomando o produto:

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = (1+\theta)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,1)}(x_i)$$

$$= (1-\theta)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta} \cdot I_{(0,1)}(x_{(1)}) \cdot I_{(0,1)}(x_{(n)}).$$

Assim, pelo critério da fatoração $\prod X_i$ é suf p/ θ

iv) $f(x;\theta) = \dfrac{\theta}{x^2}$, $x \geq \theta$, $\theta \in \Omega = (0,\infty)$.

R: Se $f(x;\theta) = \dfrac{\theta}{x^2} \cdot I_{[\theta,\infty)}(x)$, passando o produtório tem

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{\theta^n}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)} \prod I_{[\theta,\infty)}(x_i) = \theta^n \cdot I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}) \cdot \frac{1}{(\prod x_i^2)}$$

Assim, pelo critério da fatoração $X_{(1)}$ é suf. p/ θ.

Completude

1) Seja $\mathcal{F} = \{ f(\cdot\,;\theta) \,;\, f(x;\theta) = \binom{n}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{n-x} \mathbb{1}_A(x),\ \theta \in (0,1)$

em que $A = \{0, 1, \dots, n\}$. Mostre que $\mathcal{F}$ é completa.

R:
$$\mathbb{E}_\theta\, g(X) = \sum_{x=0}^{n} g(x) \binom{n}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{n-x} = (1-\theta)^{n} \sum g(x) \binom{n}{x} \left(\frac{\theta}{(1-\theta)}\right)^{x}$$

Assim, $\mathbb{E}\, g(X) = 0 \ \forall\ \theta \in (0,1)$ é equivalente a

$$\underbrace{\sum_{x=0}^{n} g(x) \binom{n}{x} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{x}}_{} = 0 \quad \forall \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \in (0,\infty)$$

$$\Rightarrow \quad g(x)\binom{n}{x},\ x = 0,1,\dots,n \qquad \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}\, x^{n-j} = 0 \Rightarrow c_{n-j} = 0.$$

Que é equivalente a $g(x) = 0$, $x = 0, \dots, n$.

2) Seja $\mathcal{F} = \{ f(\cdot\,;\theta ; f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!} \mathbb{1}_A(x),\ \theta \in (0,\infty) \}$

em que $A = \{0, 1, \dots\}$. Mostre que $\mathcal{F}$ é completa.

R:
$$\mathbb{E}_\theta\, g(X) = \sum_{x=0}^{\infty} g(x) \frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!} = e^{-\theta} \sum \frac{g(x)}{x!} \theta^{x} = 0 \quad \forall\ \theta \in (0,\infty)$$

Implica que $\frac{g(x)}{x!} = 0 \ \forall\ x = 0, 1, \dots$, que é equivalente a $g(x) = 0 \ \forall\ x = 0, 1 \dots$

3) Seja $\mathcal{F} = \{ f(\cdot;\theta) ; f(x;\theta) = \frac{1}{\theta - \alpha} \mathbb{1}_{[\alpha,\theta]}(x) , \theta \in (\alpha, \infty) \}$

Mostre que $\mathcal{F}$ é completa.

R: $$\mathbb{E}_\theta\, g(X) = \frac{1}{\theta - \alpha} \int_\alpha^\theta g(x)\, dx = 0$$

Assim, $$\int_\alpha^\theta g(x)\, dx = 0 \overset{\boxed{\theta > \alpha!}}{\Rightarrow} g(x) = 0$$

4) Seja $X_1, \dots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. Verifique quando μ é conhecido e σ^2 desconhecido, $\mathcal{F} = \{ f(\cdot;\theta) ; f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\theta}, \theta \in (0, \infty$

<u>NÃO</u> é completa.

R: Seja $g(x) = x - \mu$. Assim,

$$\mathbb{E}_\theta\, g(X) = \mathbb{E}_\theta (X - \mu) = 0 \quad \forall \theta \in (0, \infty), \text{ enquanto}$$

$g(x) = 0$ somente para $x = \mu$.