1) $X_i \sim$ Bernoulli (θ), amostra $= [x_1, x_2, x_3]$.

$T = \sum X$ é suficiente?

Resolução:

$$f(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} =$$

$$= \theta^{x_1} (1-\theta)^{1-x_1} \cdot \theta^{x_2} (1-\theta)^{1-x_2} \cdot \theta^{x_3} (1-\theta)^{1-x_3} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{3-\sum x_i}$$

$h(x_1, \ldots, x_n) = 1 \rightarrow$ I independe de θ, logo T é suficiente

$$g(t;\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum x_i} (1-\theta)^3$$

---

2) Seja $[X_1, X_2, X_3]$ uma a.a. de uma população Bernoulli com parâmetro θ. A estatística $T = \sum x_i$ é suficiente para θ?

Resolução:

$$f(x_i; \theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$$

Prob. de ocorrência do resultado $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ condicionado à $T = t$:

$$P[\underset{\sim}{X} \mid T = t] = P[X_1 = x_1; \ldots; X_n = x_n \mid T = t]$$

$$= \frac{P[X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n \mid T = t]}{P[T = t]}$$

*distrib. prob. conjunta de $[X_1, X_2, X_3]$:

$$f(\cdot;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f x_i = \theta^{x_1} (1-\theta)^{1-x_1} \ldots \theta^{x_n} (1-\theta)^{1-x_n} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

$$P[\underset{\sim}{X} \mid T = t] = \frac{\theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

Como $P[\underset{\sim}{X} \mid T = t] = \frac{1}{\binom{n}{t}}$ não depende de θ, então T é uma estatística suficiente.

3) Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a. Poisson (θ)

Resolução:

$$f(x_1, \dots, x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!} \cdots \frac{e^{-\theta}\theta^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$= e^{\overbrace{-\log(\prod x_i!)}^{h(x)} \overbrace{-n\theta}^{d(\theta)} + \overbrace{\sum x_i \log\theta}^{T(x)\,.\,c(\theta)}}$$

---

4) Seja $X_1, \dots, X_n$ a.a. de $N(\mu, 1)$.

Resolução:

$$L(\mu, x) = f(x_1 / \mu) \dots f(x_n / \mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}} = (2\pi)^{-n/2} e^{-1/2 \sum (x_i-\mu)^2}$$

Então, $\ell(\mu, \underset{\sim}{x}) = \log L(\mu, x) = \frac{-n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum (x_i-\mu)^2$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu}(\mu, \underset{\sim}{x}) = -\frac{1}{2}\left[(x_1-\mu)^2 + \dots + (x_n-\mu)^2\right] = \sum (x_i - \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \sum x_i - n\mu = 0 \qquad \hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

Como $\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2}(\mu, \underset{\sim}{x}) = \frac{\partial(\sum(x_i - \mu))}{\partial \mu} = -1 < 0$

Conclui-se que $\hat{\mu} = \bar{x}$ é o ponto de máximo para $L(\mu, \underset{\sim}{x})$

tilibra

5) Seja $X_1, \ldots, X_n$ a. a. de Bernoulli (θ)

Resolução:

$$f(x_i|\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$$

$$L(\theta, \underset{\sim}{x}) = \theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \ldots \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n} = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

$$l(\theta, \underset{\sim}{x}) = \sum x_i \log\theta + (n - \sum x_i)\log(1-\theta)$$

$$\frac{\partial l}{\partial\theta}(\theta, \underset{\sim}{x}) = \frac{\sum x_i}{\theta} + \frac{(n-\sum x_i)}{(1-\theta)} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{\theta} = \frac{(n-\sum x_i)}{1-\theta} \Rightarrow (1-\theta)(\sum x_i) = \theta(n-\sum x_i)$$

$$\sum x_i - \cancel{\theta\sum x_i} = n\theta - \cancel{\theta\sum x_i} \Rightarrow \sum x_i = n\theta$$

$$\theta = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{X}$$

tilibra