Andryas Waurzenczak

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra independente e igualmente distribuída com distribuição de Bernoulli com parâmetro $\theta$. Neste caso, temos que a estatística $T(\mathbf{X}) = X_1 + \ldots + X_n$ é uma estatística suficiente para $\theta$.

Temos que $T(\mathbf{X})$ tem uma distribuição Binomial com parâmetros $n$ e $\theta$, isto é, $T(\mathbf{X}) \sim \text{Binomial}(n, \theta)$. Supondo que $\sum X_i = t$, segue que :

$T(x) \sim \text{Binomial}(n; \theta) =$

$\Sigma x_i = t$

por serem iid $n=1$

$$\frac{P(x \mid \theta)}{q(T(x) \mid \theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} = \frac{\theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{\Sigma(1-x_i)}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}}$$

$$\frac{\theta^t (1-\theta)^{n-t}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}.$$

desta forma $T(x)$ é suficiente para $\theta$.

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações independentes e identicamente distribuídas de uma distribuição uniforme discreta em $1, \ldots, \theta$. Desta forma, a função de probabilidade de $X_i$ é :

Função de probabilidade conjunta:

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \text{se } x_i \in \{1, \ldots, \theta\} \text{ p/ } i = 1 \ldots n \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

* Considerando $T(x) = X_{(n)} = \max_i X_i$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \in \{1, 2, \ldots\} \text{ p/ } i = 1, \ldots, n \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$$g(t \mid \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \text{se } t \leq \theta \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Logo pelo TMA da FATORAÇÃO $\{f(x \mid \theta) = g(T(x) \mid \theta) h(x)$ $T(x)$ é uma estatística suficiente.

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória independente e igualmente distribuída de uma distribuição de Bernoulli com parâmetro $0 < \theta < 1$. A distribuição de Bernoulli pertence à família exponencial. De fato, temos

$$f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} = e^{\{\log(\theta^x(1-\theta)^{1-x})\}} =$$

$$e^{\{\log(\theta^x \cdot (1-\theta)^1 \cdot (1-\theta)^{-x})\}} = e^{\{\log(\theta^x \cdot \frac{1}{(1-\theta)^x} \cdot (1-\theta))\}}$$

$$= e^{\{x\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \log(1-\theta)\}} =$$

$$e^{\{x\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\}} \cdot e^{\log(1-\theta)} = (1-\theta)\, e^{x\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)} \quad //$$

$$\begin{cases} c(\theta) = 1-\theta \qquad w(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \\ t(x) = x \end{cases}$$

Vemos que pertence a família exponencial e que $T(x)$ é uma est. suficiente.

Θ= Theta

Seja [X1,X2,...,Xn] uma a.a de distribuição N(0,Θ²), 0<Θ < INFINITO.

A- Escreva a f.d.p da variavel aleatoria X
B- Escreva a f.d.p da v.a X usando a variavel indicadora para seu dominio
C- Qual a f.d.c da a.a (X1,X2,...Xn)?
D- Qual estatistica suficiente para Θ?

a) $0 < \theta < \infty \qquad N(0, \theta^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{\frac{x^2}{2\theta^2}}$$

b) $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{\frac{x^2}{2\theta^2}} \cdot I_{(-\infty,\infty)}(x), \quad \theta \in R^+$$

c) $$f(\underline{X} \mid \theta) = f(X_1 = x_1 ; X_2 = x_2 \ldots X_n = x_n).$$

$$= f(X_1 = x_1 \mid \theta)\, f(X_2 = x_2 \mid \theta) \ldots f(X_n = x_n \mid \theta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{\frac{x_1^2}{2\theta^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{\frac{x_2^2}{2\theta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{\frac{x_n^2}{2\theta^2}} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\theta^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i)$$

d) $$f(\underline{x} \mid \theta) = g[T(x), \theta]\, h(x)$$

$$g[T(x), \theta] = (2\pi\theta^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\infty)}(x_i).$$

Suponha a chegada de n consumidores em um serviço sejam contadas seguindo um processo de Poisson com parametro de chegada Θ. Seja Xi o tempo de espera ate a chegada do i-ésimo consumidor.

A distribuição do tempo de espera Xi é Xi~ exp(Θ)

b) Escreva a maneira formal a f.d.p da v.a Xi

c) Escreva a f.d.p da v.a Xi usando a função I , que vale 1 quando X >0 e 0 C.C.

d)Qual a função densidade conjunta da a.a da pop X~exp(Θ)?

b) $f_X(x) = \dfrac{\theta e^{-\theta x}}{0!}$ , $x > 0$ , $\theta > 0$

$0$ , $x \leq 0$

c) $f_X(\underline{x}) = \theta e^{-\theta x} \cdot I_{(0,\infty)}(x)$ $\quad \theta > 0$

d) $f(\underline{x} \mid \theta t)$ $\quad f(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots X_n = x_n)$

$= f(X_1 = x_1 \mid \theta) \cdot f(X_2 = x_2 \mid \theta) \cdots f(X_n = x_n \mid \theta)$

$= \theta e^{-\theta x_1} \; \theta e^{-\theta x_2} \cdots \theta e^{-\theta x_n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i)$

$= \theta^n \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i)$ .