20/09/15

Nome: Amanda Lisias Bodignon — Estatística Inferencial

Exercícios

01 Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x/\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de θ e de $g(\theta) = \frac{\theta}{(1+\theta)}$

$$L(\theta; x) = \theta x_1^{\theta-1} \dots \theta x_n^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}$$

Então:

$$l(\theta; x) = \log \theta^n + \log \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

Assim:

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$$

é o EMV para θ

$$\frac{d^2 l}{d\theta} = \frac{-n}{\theta^2} < 0$$

Para $\frac{\theta}{1-\theta}$, o EMV é:

$$g(\hat{\theta}) = \frac{\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}}{1 + \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i - n}$$

$$\boxed{= \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i - n}}$$

02 Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma a.a. de tamanho n de variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por: $f(x/\theta) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$, $\theta > 0$.

Encontre, usando o método dos momentos, um estimador para θ, dado que X segue uma distribuição Beta.

$Y \sim Beta(a,b) \Rightarrow f(y|a,b) = \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$

$b-1 = 1 \Rightarrow b = 2$ $\quad (\theta-1) = a-1 \Rightarrow a = \theta$

$E \quad \dfrac{1}{B(\theta,2)} = \dfrac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta)\Gamma(2)} = \dfrac{(\theta+1)!}{(\theta-1)!} = \theta(\theta+1)$

Então $X \sim Beta(\theta, 2)$.

$E(X) = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{\theta}{\theta+2}$

$m_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$, pelo método dos momentos.

$\mu_1 = m_1 \Rightarrow \dfrac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+2} = \bar{X} \Rightarrow \bar{X}\hat{\theta} + 2\bar{X} - \hat{\theta} = 0$

$\Rightarrow \hat{\theta}(\bar{X}-1) + 2\bar{X} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}(\bar{X}-1) = -2\bar{X}$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \dfrac{-2\bar{X}}{X-1} = \boxed{2\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}}$

03 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a de v.a $X \sim Bin(2, \theta)$
Encontre uma estatística suficiente para θ

$$L(\theta; x) = h(x_1, \ldots, x_n)\, g_\theta(T(x_1, \ldots, x_n))$$

Binomial $\rightarrow f(x|\theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x}$, $x = 0, 1, 2$

$$L(\theta; x) \rightarrow \binom{2}{x_1} \theta^{x_1} (1-\theta)^{2-x_1} \ldots \binom{2}{x_n} \theta^{x_n} (1-\theta)^{2-x_n}$$

$$= \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \binom{2}{x_i}}_{h(x_1, \ldots, x_n)} \theta \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot (1-\theta) \exp\left(2n - \sum x_i\right)$$

Pelo teorema de fatoração* surge a estatística suficiente.

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

*Tma de Fatoração: Uma est. $T(X)$ é suficiente para θ, se, e somente se, se existem funções $g(t|\theta)$ e $h(x)$ tais que para qualquer ponto amostral x e θ no espaço paramétrico, vale a igualdade $f(x|\theta) = g(T(x)|\theta)\, h(x)$

/ /

(04) Dados $X_1, \dots, X_n$ a.a. de tamanho n de uma v.a $X \sim Beta(\theta, 2)$ encontre o estimador de máx verossimilhança de θ.

$$L(\theta; x) = \theta(\theta+1)x_1^{\theta-1}(1-x_1)\dots\theta(\theta+1)x_n^{\theta-1}(1-x_n)$$
$$= \theta(\theta+1))^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$$

$$l(\theta; x) = n \log \theta(\theta+1) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \log X_i + \log \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$$

$$\Rightarrow l'(\theta; x) = \frac{n(2\theta+1)}{\theta(\theta+1)} + \sum_{i=1}^{n} \log X_i$$

$$\underbrace{\frac{2\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}(\hat{\theta}+1)}}_{\varepsilon} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} \log X_i}{n}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\hat{\theta}^2 + (\varepsilon+2)\hat{\theta} + 1 = 0$$ resolvendo a eq:

$$\hat{\theta} = \frac{2 - \varepsilon \pm \sqrt{4+\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$ $\hookrightarrow \theta > 0$, então

$$\hat{\theta} = \frac{2 - \frac{-\sum_{i=1}^{n} \log X_i}{n} + \sqrt{4 + \left(\frac{-\sum_{i=1}^{n} \log X_i}{n}\right)^2}}{\frac{2 - \sum_{i=1}^{n} \log X_i}{n}}$$