Questões de Inferência

1) Seja $X_1, \dots X_n$ uma a.a iid de uma variável $X \sim BIN(10, \theta)$ verifique se $T = \Sigma x_i$ é estatística suficiente para θ.

I $P(X_1 = x_i, \dots, X_n = x_i / T = \Sigma x_i)$ é independente de θ, então:

$$\begin{cases} 0, \text{ se } \Sigma x_i \neq t \\ \dfrac{P(X_i = x_i, \dots, X_n = x_i)}{P(T=t)} \text{ se } \Sigma x_i = T \end{cases}$$

$$\therefore \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_n = x_n)}{P(T=t)} \text{ é iid}$$

(APLICANDO PRODUTÓRIO)

$$= \frac{P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot P(X_n = x_n)}{P(T=t)}$$

Para uma binomial $(10, \theta)$

$\boxed{\binom{N}{x} p^x q^{n-x}}$ OBS

$$P(X_1 = x_1) = \frac{\binom{10}{x_1} n \theta^{x_i} (1-\theta)^{10-x_1}}{\binom{10}{t} n \theta^t \; 1-\theta^{10-t}} \dots$$

$$\dots \therefore \frac{n \theta^{\Sigma x_i} \cdot (1-\theta)^{10 - \Sigma x_i}}{\binom{10}{t} n \theta^t (1-\theta)^{10-t}} = \frac{1}{\binom{10}{t}}.$$

2) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma a.a. iid de uma variável $X \sim BIN(10, \theta)$ verifique se $T = \Sigma x_i$ é estatística suficiente para θ.

Pelo teorema da fatoração à estatística suficiente:

$$L(\theta, x) = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_\theta(T(x_1, \dots, x_n))$$

$$f(x|\theta) = \binom{10}{x} \theta^x (1-\theta)^{10-x}$$

$$L(\theta, x) = \binom{10}{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{10-x_i} \cdot \binom{10}{x_n} \theta^n (1-\theta)^{10-x_N}$$

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{n} \binom{10}{x_i}}_{h} \underbrace{\theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{10-\Sigma x_i}}_{g(\theta)}$$

3) Analie as afirmativas a seguir:

I) Uma estatística é suficiente minimal se é suficiente e se é uma função de ALGUMA OUTRA estatística suficiente

II) Se um estimador de máxima verossimilhança é uma estatística suficiente então ele é uma estatística suficiente minimal.

III) Se um estimador de Bayes é uma estatística suficiente, então ele é uma estatística suficiente minimal.

a) II correta
b) I e II correta
c) I e III correta
d) II e III correta
e) todas corretas

Def. $T(x)$ é estatística suficiente minimal para θ se for suficiente e se for função de qualquer outra estatística suficiente para θ.

- Estatísticas suficientes minimais são únicas.

(4) Seja $X_1, \ldots, X_N$ uma a.a. iid. de uma variável binomial X_N BIN (n, θ). Verifique se é estatística suficiente minimal

→ Pelo teorema de Schaffe'

$$p(x^N, \theta) = \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n - \Sigma x_i}$$

$$p(y^n, \theta) = \theta^{\Sigma y_i} (1-\theta)^{n - \Sigma y_i}$$

$$\frac{p(x^N,\theta)}{p(y^N,\theta)} = \frac{\theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n-\Sigma x_i}}{\theta^{\Sigma y_i} (1-\theta)^{n-\Sigma y_i}} =$$

$$= \theta^{\Sigma x_i - \Sigma y_i} (1-\theta)^{(n - \Sigma x_i) - (n - \Sigma y_i)}$$

$$= \theta^{\Sigma x_i - \Sigma y_i} (1-\theta)^{\Sigma y_i - \Sigma x_i}$$

(5) Verifique se a distribuição binomial pertence à família exponencial.

$$f(x, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{\theta^x (1-\theta)^n}{(1-\theta)^x}$$

$$= \binom{n}{x} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x (1-\theta)^X = \binom{n}{x} (1-\theta)^n \exp\left\{ \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-x} \right\}$$