1. Seja $[X_1, X_2, X_3]$ uma a.a de uma população de Bernoulli com parâmetro θ

$X_i \sim b(1;\theta) \Rightarrow f_{X_i}(x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, \; I_{(0;1)}(x)$

A Est. $T = \sum x_i$ é suficiente para estimar θ?

$$\frac{p(x|\theta)}{q(T(x)|\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}}{\binom{n}{t}\theta^{t}(1-\theta)^{n-t}} = \frac{\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{\sum(1-x_i)}}{\binom{n}{t}\theta^{t}(1-\theta)^{n-t}} = \frac{\theta^{t}(1-\theta)^{n-t}}{\binom{n}{t}\theta^{t}(1-\theta)^{n-t}} =$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

2- Seja $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ uma a. a. ind com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.
A média amostral $T(x) = \bar{X}$ é suficiente para estimar μ?

$$f(x|\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(x|\mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2\right)}{2\sigma^2}\right)$$

$\bar{X}$ possui $N(\mu; \sigma^2/n)$

$$\frac{f(x|\mu)}{q(T(x)|\mu)} = \frac{(2\pi\sigma^2)^{n/2} \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2\right)/(2\sigma^2)\right)}{(2\pi\sigma^2/n)^{-1/2} \exp\left(-n(\bar{X}-\mu)^2/(2\sigma^2)\right)}$$

$$\frac{f(x|\mu)}{q(T(x)|\mu)} = n^{-1/2}(2\pi\sigma^2)^{-(n-1)/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{X})^2}{2\sigma^2}\right)$$

Portanto $\bar{X}$ é uma estatística suficiente p/ μ

3- Sejam $X_1, \dots, X_n$ observações independentes e identicamente distribuídas de uma dist. uniforme discreta em $1, \dots, \theta$. Desta forma, a função de probabilidade de X_i é

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & \text{se } x = 1, 2, \dots, \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a função de probabilidade conjunta de $X_1, \dots, X_n$ é

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & \text{se } x_i \in \{1, \dots, \theta\} \text{ para } i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considerando a estatística de ordem $T(x) = x_{(n)} = \max_i x_i$ e as funções $h(x)$ e $g(t|\theta)$ dadas, respectivamente, por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in \{1, 2, \dots\} \text{ para } i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$ e

$$g(t|\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & \text{se } t \leq \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

4- Assuma novamente que $X_1, \dots, X_n$ é uma amostra independente e igualmente distribuída de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2, porém agora, ambos os parâmetros são desconhecidos. Neste caso, temos que a função densidade de probabilidade depende da amostra x somente dos valores $T_1(x) = \bar{X}$ e $T_2(x) = s^2$. De fato, temos que

$$f(x|\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{2\sigma^2} - \frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

de onde segue que

$$f(x|\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)$$

e então, definindo $h(x) = 1$ e

$$g(t_1, t_2 | \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{(n(t_1-\mu)^2 + (n-1)t_2)}{2\sigma^2}\right)$$

segue que

$$f(x|\mu, \sigma^2) = g(T_1(x, T_2(x)|\mu, \sigma^2) h(x)$$

e, pelo teorema da fatoração, $T(x) = (T_1(X, T_2(X)) = (\bar{X}, s^2)$ é uma estatística suficiente para $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

5- Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória independente e igualmente distribuída de uma distribuição de Bernoulli com parâmetro $0 < \theta < 1$. A distribuição de Bermoulli pertence à família exponencial. De fato, temos que

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} = \exp\{\log(\theta^x (1-\theta)^{1-x})\} =$$
$$= \exp\{x \log \theta + (1-x) \log(1-\theta)\}$$

de onde podemos escrever

$$f(x|\theta) = \exp\left\{x \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \log(1-\theta)\right\} = (1-\theta) \exp\left\{x \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right\}$$

e então, basta tomar $c(\theta) = 1-\theta$, $t(x) = x$ e $w(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$. Como $t(x) = x$, segue que $T(x) = \sum_{j=1}^n t(X_j) = \sum_{j=1}^n X_j$ é uma estatística suficiente para o parâmetro θ.