Nome: Agatha Pequeno de Mello
GRR: 20137524 Materia: Estatistica Inferencial

Exercício 1 - Família exponencial normal

Seja $f(x/\mu,\sigma^2)$ a família $n(\mu,\sigma^2)$ de f.d.p.s, onde $\theta=(\mu,\sigma)$, $-\infty<\mu\leq\infty, \sigma>0$

$$f(x/\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu x}{\sigma^2}\right)$$

definimos $h(x)=1$ para todo x

$$c(\theta)=c(\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}\right), -\infty<\mu<\infty, \sigma>0$$

$$w_1(\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma^2}, \sigma>0; \quad w_2(\mu,\sigma)=\frac{\mu}{\sigma^2}, \sigma>0$$

$$t_1(x)=-x^2/2 \quad e \quad t_2(x)=x$$

Então, $f(x/\mu,\sigma^2)=h(x)\,c(\mu,\sigma)\exp[w_1(\mu,\sigma)t_1(x)+w_2(\mu,\sigma)t_2(x)]$ que é a forma $f(x/\theta)=h(x)c(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^{k}w_i(\theta)t_i(x)\right)$ com $k=2$

Observe novamente que as funções de parâmetro são definidas somente sobre o domínio do parâmetro

Exercício 2 (Estatística Suficiente)

(Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com parâmetro θ. Vamos verificar que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ. Sabemos que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $n\theta$. Assim, para $x_i = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, n$ e $t = 0, 1, \dots,$ temos

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid T = t] = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i \neq t \\ \dfrac{P[X_1 = x_1, \dots X_n = x_n]}{P[T = t]} & \sum_{i=1}^{n} x_i = t \end{cases}$$

de modo que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, então

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid T = t] =$$

$$\frac{P[X_1 = x_1] \dots P[X_n = x_n]}{P[T = t]} = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!} \dots \frac{e^{-\theta}\theta^{x_n}}{x_n!} \frac{t!}{e^{-n\theta}(n\theta)^t}$$

$$= \frac{t!}{x_1!, \dots, x_n!} \cdot \frac{1}{n^t}$$ que é independente de θ. Segue, então, da Definição "Dizemos que a estatística $T = T(X_1, \dots, X_n)$ é suficiente para θ, quando a distribuição condicional de $X_1, \dots X_n$ dado T for independe de θ

Exercício 3

Sejam $X_1 \ldots X_n$ observações independentes e identicamente distribuídas de uma distribuição uniforme discreta em $1, \ldots \theta$. Desta forma, a função de probabilidade de X_i é

$$f(x/\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & \text{se } x = 1, 2, \ldots \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a função de probabilidade conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ é

$$f(x/\theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & \text{se } x_i \in \{1, 2, \ldots, \theta\} \text{ p/ } i = 1 \ldots n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considerando a estatística de ordem $T(x) = (x_n) = \max x_i$ e as funções $h(x)$ e $g(t/\theta)$ dadas, respectivamente por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in \{1, 2, \ldots\} \text{ p/ } i = 1, \ldots, n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$g(t/\theta) \begin{cases} 1/\theta^n, & \text{se } t \leq \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é imediato verificar que $f(x/\theta) h(x)$ para todo x e θ. Portanto, pelo Teorema da Fatoração, $T(x)$ é uma estatística suficiente

Exercício 4

Assuma novamente que $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra independente e igualmente distribuída de uma distribuição Normal com média μ e variância σ^2, porém agora, ambos os parâmetros são desconhecidos. Neste caso temos vetor de parâmetros $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Neste caso, temos q a função densidade de probabilidade depende da amostra x somente dos valores $T_1(x) = \bar{X}$ e $T_2(x) = s^2$. De fato, temos que

$$f(x/\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{2\sigma^2} - \frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

de onde segue que

$$f(x/\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)$$

e então, definindo $h(x) = 1$ e

$$g(t_1, t_2/\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(\frac{-(n(t_1-\mu)^2 + (n-1)t_2)}{2\sigma^2}\right)$$

segue que

$$f(x/\mu, \sigma^2) = g(T_1(x, T_2(x)/\mu, \sigma^2)\, h(x)$$

e, pelo Teorema da Fatoração, $T(x) = (T_1(X, T_2(x)) = (\bar{X}, s^2)$ é uma estatística suficiente para $\theta = (\mu, \sigma^2)$

Exercício 5

Sejam $X_1, \ldots X_n \sim$ Poisson (λ). Então

$$p(x/\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_x(\{0,1,\ldots\}) = \frac{1}{x!} \exp\{-\lambda + x \log \lambda\} I_x(\{0,1,\ldots\})$$

$$\Rightarrow p(x/\lambda) = \frac{1}{\prod x_i!} \exp\{\exp\{-n\lambda + \sum x_i \log \lambda\} I_x(\{0,1,\ldots\}^n)$$

Conclusão: A Poisson pertence a família exponencial e $U = \sum_{i=1}^n X_i$ é estatística suficiente para λ