Exercícios para Quinta.

1) Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra iid de uma variável $X \sim Poisson(\theta)$. Verifique se $T = \Sigma x$ é uma estatística suficiente para θ.

~ Passos:

(I) Teorema. Se $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n / T = \Sigma x_i)$ é independente de θ, então T é suficiente.

$$\therefore, \begin{cases} 0, \text{ se } T \neq \Sigma x_i \\ \dfrac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)}{P(T = t)}, \text{ se } \Sigma x_i \neq t. \end{cases}$$

(II) $$\frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)}{P(T = t)} = \frac{P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)}{P(T = t)} =$$

$$= \frac{\dfrac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!} \cdot \dfrac{e^{-\theta}\theta^{x_2}}{x_2!} \dots \dfrac{e^{-\theta}\theta^{x_n}}{x_n!}}{\dfrac{e^{-n\theta} \cdot n\theta^{\Sigma x_i}}{t}} = \frac{\dfrac{e^{-n\theta}\theta^{\Sigma x_i}}{\Pi x_i!}}{\dfrac{e^{-n\theta} \cdot n\theta^{\Sigma x_i}}{\Sigma x_i}} =$$

$$\boxed{\frac{\Sigma x_i!}{\Pi x_i!}} \rightarrow \boxed{\text{é suficiente para } \theta}$$

2) Com base no exercício 1, descubra qual sua estatística suficiente pelo teorema do critério da fatoração de Fisher - Neyman.

~ Passos

I $L(\theta; x) = h(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot g_\theta(T(x_1, x_2, \dots, x_n))$

$\therefore L(\theta; x) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!} \cdots \frac{e^{-\theta}\theta^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!} =$

$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{\prod x_i!}}}_{h(x)} \cdot \underbrace{(e^{-\theta}\theta^{\sum x_i})}_{g_\theta(t)}$

Portanto, o teorema da fatoração nos diz que $T = \sum x_i$ é uma estatística suficiente para θ.

Outro jeito de resposta: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (e^{-n\theta}\theta^{n\bar{x}}$

$\frac{1}{x_1!\, x_2!\, x_3! \cdots x_n!)}$

3) De acordo com os exercícios anteriores, encontre uma estatística suficiente mínima.

→ Passos

(I) Teorema de Lehmann-Scheffé: Seja $f(x/\theta)$ a função de probabilidade ou função densidade de probabilidade de uma amostra X. Suponha que existe uma função $T(X)$ tal que, para quaisquer X e Y, a razão $f(x/\theta) / f(y/\theta)$ é constante se, e somente se, $T(X) = T(Y)$. Então $T(X)$ é uma estatística suficiente mínima para θ.

(II) ∴, $$P(y^n/\theta) = \frac{e^{-n\theta}\,\theta^{\Sigma yi}}{\Pi\, yi!}$$

$$P(x^n/\theta) = \frac{e^{-n\theta} \cdot \theta^{\Sigma xi}}{\Pi\, xi!}$$

∴, $$\frac{P(x^n/\theta)}{P(y^n/\theta)} = \frac{\dfrac{e^{-n\theta} \cdot \theta^{\Sigma xi}}{\Pi xi!}}{\dfrac{e^{-n\theta} \cdot \theta^{\Sigma yi}}{\Pi yi!}} =$$

$$\frac{\cancel{e^{-n\theta}} \cdot \theta^{\Sigma xi}}{\Pi xi!} \cdot \frac{\Pi yi!}{\cancel{e^{-n\theta}} \cdot \theta^{\Sigma yi}} = \frac{\theta^{\Sigma xi - \Sigma yi} \cdot \Pi yi!}{\Pi xi!}$$

4) Demonstre que a Poisson é participante da família exponencial:

~ Basicamente, é possível saber se a Poisson participa da família exponencial, se puder ser expressa como:

$$f(x,\theta) = h(x) \cdot c(\theta) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{m} w_i\theta \, t(x) \right\}$$

$h(x)$ e $t(x)$ são funções reais não dependentes de θ. $c(\theta)$, $w_1(\theta)$, $w_2(\theta)$... funções reais do vetor parâmetro θ.

① Transformando $\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ em $f(x) = \exp\left\{ \frac{\theta x - b(\theta)}{\underbrace{a(\phi)}_{\text{cte.}}} + c(x) \right\}$

$\log f(x) = x\log(\lambda) - (\lambda) - \log(x!) =$

$f(x) = \exp\{ x\log\lambda - (\lambda) - \log(x!) \}$

. $\theta x = x \log \lambda$

$\lambda = e^{\theta}$

. $a(\phi) = 1$

. $c(x;\phi) = -\log(x!)$

$\therefore f(x) = \exp\{ x\theta - b(\theta) + c(x,\phi) \}$ //

↳ transformado. $\therefore$ participa. //