Intervalo de confiança

Sugestão: fazer os exercícios da lista de T.H., agora calculando os IC's.

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, 9)$. Determine o coeficiente de confiança do intervalo de confiança para μ dado por $[\bar{X} - \frac{6}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{6}{\sqrt{n}}]$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de $X \sim exp(\theta)$. Sabendo que $V = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$, encontre um $IC(\theta, 0, 95)$.

3. Quando utilizamos uma quantidade pivotal $Q(X_1, \ldots, X_n, \theta)$ que tenha distribuição qui-quadrado, a construção de um intervalo de confiança é realizada a partir da relação $P(q_1 < Q < q_2) = 1 - \alpha$, em que q_1 e q_2 satisfazem as relações $P(Q < q_1) = \alpha/2$ e $P(Q > q_2) = \alpha/2$. Considerando uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, determine um intervalo de confiança para $\sigma^{3/2}$.

4. Uma máquina automática de refrescos é regulada de modo que a quantidade suprida de cada vez tenha distribuição aproximadamente normal com desvio padrão de $1,3dL$. Determine um intervalo de 96% de confiança para a quantidade média de todos os refrescos servidos, sabendo que uma amostra de 30 copos acusou conteúdo médio de $21,0dL$.

5. De 50.000 válvulas fabricadas por uma máquina, retira-se uma amostra de 400 válvulas e obtém-se a vida média de 800 horas e desvio padrão de 100 horas.

   (a) Qual o intervalo de confiança de 99% para a vida média da população?

   (b) Com que confiança dir-se-ia que a vida média é de $800 \pm 0,98$? Assuma normalidade dos dados.

6. Uma amostra aleatória de 625 donas-de-casa revela que 70% delas preferem a marca X de detergente. Construa o intervalo de confiança de 90% (intervalo conservador) para $p =$ proporção das donas-de-casa que preferem X.

7. Para uma amostra de tamanho 1, considere o intervalo $[L(X), U(X)] = [X, 2X]$. Discuta se o intervalo dado é um intervalo de confiança para μ quando:

   (a) $X \sim N(\mu, 1)$;

   (b) $X \sim exp(\mu)$.

   Dica: Verifique se $P(L(X) < U(X)) = 1$.

8. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\theta, \theta)$. Sugira uma quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança de $1 - \alpha$.

9. Para avaliar a tensão máxima suportada por uma barra de aço testaram-se n barras, obtendo-se $\bar{X} = 20$ e o limite superior do intervalo de confiança a 95% igual a 21,7. Sabendo-se que a tensão suportada por uma barra de aço é uma v.a. normal com desvio padrão $\sigma = 3$, determine o limite inferior do IC e o tamanho n da amostra.

10. Suponha que estejamos interessados em estimar a porcentagem de consumidores de certo produto. Se uma amostra de tamanho 300 forneceu 100 indivíduos que consomem o dado produto, determine:

    (a) O intervalo de confiança para p, com coeficiente de confiança 95%.

    (b) O tamanho da amostra para que o erro da estimativa não exceda 0.02 unidades com probabilidade de 95%.

11. Um caçador diz que abate 80% das aves nas quais atira. Concordaria com ele, se em determinado dia ele acertasse 9 tiros em um total de 15? Use o nível de significância de 0.05 e apresente as suposições necessárias (Note que não me interessa saber se ele abate mais de 80%).

12. Um investigador pretende estudar a incidência, a nível nacional, de uma doença que ataca os pinheiros. Observações efetuadas no país resultaram em 1233 casos de pinheiros afetados em um total de 4250 observações. Determine um intervalo de confiança a 95% para a verdadeira proporção de pinheiros afetados.

13. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de uma distribuição Gama com β desconhecido e $\alpha = r$ conhecido. Sabendo que

    $$T(\beta) = \frac{2}{\beta} \sum_{j=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2rn}$$

    Encontre um $IC(\beta, 0.95)$.

14. Considere a média amostral de uma a.a. de uma população com média μ e variância igual 10. Encontre o valor de n para que o intervalo aleatório $(\bar{X} - 0,5; \bar{X} + 0,5)$ tenha probabilidade aproximada de 0,954 de conter μ.

15. O tempo médio, por operário, para executar uma tarefa, tem sido de 100 minutos com desvio padrão de 15 minutos. Foi introduzida uma modificação para reduzir este tempo e após alguns meses foi selecionada uma amostra de 16 operários medindo-se o tempo de execução de cada um. Obteve-se um tempo médio amostral de 90 minutos e um desvio padrão de 16 minutos.

    (a) Determine um intervalo de confiança a 95% para o novo tempo médio de execução. Você diria que a modificação surtiu efeito?

    (b) Calcule um intervalo de confiança a 99% para a variância populacional do novo tempo de execução. É razoável concluir que a variância populacional se alterou?

16. Seja X uma população com distribuição normal, de média μ e desvio padrão $\sigma = 2$. Uma amostra aleatória de dimensão 25 foi extraída desta população, com média $\bar{X} = 78,3$.

    (a) Calcule o intervalo de confiança a 99% para μ. (b) Qual deverá ser o tamanho da amostra para que o erro máximo cometido, a 99% de confiança, ao estimar μ por $\bar{X}$, não exceda 0,1?

17. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal com media desconhecida μ e variância conhecida σ^2. Qual deve ser o tamanho da amostra n, tal que exista um intervalo de confiança para μ com coeficiente de confiança a 95% e comprimento menor do que $0,01\sigma$?

18. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de uma densidade $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$. Sabendo que o estimador de máxima verossimilhança de θ, $\bar{X}^{-1}$, tem distribuição assintóticamente normal com média θ e variância $\frac{\theta^2}{n}$. Encontre o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para θ.

19. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de uma distribuição Beta com $\beta = 1$ e $\alpha = \theta$, desconhecido. Sabendo que

    $$T(\theta) = -2\theta \sum_{j=1}^{n} log X_i \sim \chi^2_{2n}$$

    Encontre um $IC(\theta, 0.95)$.