UFPR - CE085 - Inferência Estatística. Lista tópico 4.
Aluno: Rogério de Jesus Hultmann Filho GRR20137589.

① Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma $N(\theta, 1)$.
Teste $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$.
θ_0 é fixo, então o numerador de $\lambda(x)$ vai ser $L(\theta_0/x)$ e o denominador $L(\underbrace{\hat{\theta}}_{\bar{x}}/x)$

$$\lambda(x) = \frac{L(\theta_0/x)}{L(\bar{x}/x)} = \frac{\prod \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp[(-x-\theta_0)^2/2\sigma^2]}{\prod \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp[(-x-\bar{x})^2/2\sigma^2]} \quad , \sigma^2 = 1$$

$$\lambda(x) = \frac{\cancel{(2\pi)^{-n/2}} \exp[-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2/2]}{\cancel{(2\pi)^{-n/2}} \exp[-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/2]}$$

$$\lambda(x) = \exp\left[\left(-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)/2\right] \geq k$$

Então a região de rejeição pode ser escrita como
$\{x : (\bar{x}-\theta_0) \geq k\}$

② Seja $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ e σ^2 desconhecidos. Testar $\mu = \mu_0$ vs $\mu \neq \mu_0$

$\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2); \sigma^2 > 0\}$ e $\Theta = \{(\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad e \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$\hat{\mu}_0 = \mu_0 \quad e \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum(X_i - \mu_0)^2}{n}$$

$$\lambda(x) = \frac{\prod \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp[(-x-\mu_0)^2/2\sigma_0^2]}{\prod \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[(-x-\bar{x})^2/2\sigma^2]}$$

$$\lambda(x) = \frac{(2\pi)^{-n/2}\, \hat{\sigma}_0^{2\,-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum(x_i-\mu_0)^2\right)}{(2\pi)^{-n/2}\, \sigma^{2\,-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\bar{x})^2\right)} = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}$$

Como $\sum(x_i-\mu_0)^2 = \sum(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2$;

Então rejeita-se H_0 se

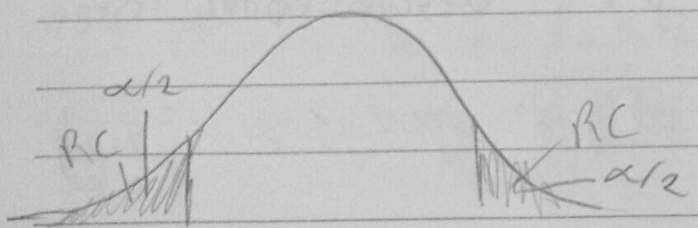
$$\left(\frac{1}{1+\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\right)^{n/2} \leq k$$

③ Os sistemas de escapamento de uma aeronave funcionam devido a um propelente sólido. A taxa média de queima tem que ser, em média, 50 cm/s. Sabemos que o desv-padrão da queima $\sigma = 2$ cm/s. É especificada uma prob. do erro do tipo I, $\alpha = 0{,}05$. $n = 25$ e $\bar{x} = 51{,}3$. Quais as conclusões que podem ser tiradas?

Ou $\mu = \mu_0$ ou $\mu \neq \mu_0$

$\alpha = 0{,}05$

$\alpha/2 = 0{,}025$



Est. do teste $Z_0 = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Para 95%, $Z = 1{,}96$.

Então rejeita H_0 se $Z > 1{,}96$ ou $Z < -1{,}96$

$Z_{0,975} = \dfrac{51,3 - 50}{2/\sqrt{25}} = 3,25$

Como $3,25 > 1,96$; Rejeita-se H_0.
Concluímos então que há forte evidência de que a taxa média de queima exceda 50cm/s

(4) Considere o mesmo problema anterior, mas agora deseja-se achar um intervalo de 95% de confiança.
Vimos q $z = 1,96$ $\alpha = 0,05$ $1-\alpha = 0,95$

$l_{\text{inf./sup}} = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$
$= 51,3 \pm 1,96 \cdot 2/\sqrt{25}$
$l = 50,52$
$52,08$ $50,52 \leq \mu \leq 52,08$.

(5) Para decidirmos se os habitantes de uma ilha são descendentes da civilização A ou B, procede-se.
i) selecionar uma amostra de 100 moradores adultos da ilha e pegar a média.
ii) Se a média > 176, são descendentes de B, c.c., de A.
A: $\mu = 175$ e $\sigma = 10$
B: $\mu = 177$ e $\sigma = 10$
Erro do tipo I → dizer que são de B, quando são de A.
Qual deve ser a regra de decisão se quisermos fixar a α em 0,05. Qual a prob. do erro II nesse caso?

$P(\bar{X} > k / \mu = 175) = P\left(Z > \sqrt{100}\, \dfrac{k-175}{10}\right) = 1 - \Phi(k-175) = 0,05$

/ /

$\Phi(z) = 0{,}95$ implica em $z = 1{,}64$.
Então $k - 175 = 1{,}64$
$k = 176{,}64$.
Então, se a altura for superior a 176,64 → descendente de B.

Prob do erro do tipo II -
$P(\bar{X} \leq 176{,}64 / \mu = 177) = \Phi\left(\sqrt{100} \cdot \frac{176{,}64 - 177}{10}\right) = 0{,}359$