CE-084: Probabilidades A

Lista 7

1. Suponha que o tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico siga uma distribuição normal de média de 8 minutos e desvio padrão de 2 minutos.

   (a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?

   (b) E mais do que 9,5 minutos?

   (c) E entre 7 e 10 minutos?

   (d) 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?

2. Uma enchedora automática de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1000 cm^3 e desvio padrão de 10 cm^3. Admita que o volume siga uma distribuição normal.

   (a) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume é menor que 990 cm^3?

   (b) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume não se desvia da média em mais do que dois desvios padrão?

3. Uma empresa produz televisores de 2 tipos, tipo A (comum) e tipo B (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal sendo que, no tipo A, com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses e no tipo B, com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo A e B são produzidos com lucro de 1200 $u.m.$ e 2100 $u.m.$ respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 $u.m.$ e 7000 $u.m.$ Respectivamente.

   (a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do B.

   (b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo A e do tipo B.

   (c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

4. A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição Normal, com média 5 kg e desvio padrão 0,9 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso do seguinte modo: 15% dos mais leves como pequenos, os 50% seguintes como médios, os 20% seguintes como grandes e os 15% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação?

5. Seja uma função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x/2 \ , & -1 \leq x \leq 0 \ ; \\ x/2 \ , & 0 < x \leq 1 \ ; \\ 1/2 \ , & 1 < x \leq 2 \ ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida;

   (b) Calcule $P[X < 0,5]$

   (c) Calcule $P[X > -0,5]$

   (d) Calcule $P[X < 1,5 | X > 0]$

6. Em um laticínio, a temperatura ideal do pasteurizador deve ser de 75°C. Se a temperatura ficar inferior a 70°C, o leite poderá ficar com bactérias indesejáveis ao organismo humano. Observações do processo mostram que na forma de operação atual os valores da temperatura seguem uma distribuição normal com média de $74,2$°C e desvio padrão de $2,2$°C. Qual a probabilidade de que em 20 pasteurização, alguma(s) dela(s) não atinja a temperatura de 70°C?

7. A vida útil de um certo componente eletrônico é, em média, 10.000 horas e apresenta distribuição exponencial.

   (a) Qual a probabilidade de algum componente falhar antes de 10.000 horas?

   (b) Após quantas horas se espera que 25% dos componentes tenham falhado?

8. O tempo para que um sistema computacional execute determinada tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal, com média 320 segundos e desvio padrão de 7 segundos. Se a tarefa é colocada para execução 200 vezes, qual a probabilidade de ela demorar mais que 325 segundos em pelo menos 50 vezes?

9. Seja uma função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} \ , & -2 \leq x < 0 \ ; \\ \frac{1}{10} + \frac{3x}{125} \ , & 0 \leq x < 5 \ ; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Calcule $P[X > 1]$

   (b) Calcule $P[-0,5 < X < 4,5]$

   (c) Calcule $P[X < 3 | X > -1]$

10. Supondo que a expectativa de vida, em anos, tenham distribuição exponencial com média de 60 anos:

    (a) Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de viver pelo menos até os 70 anos.

    (b) Idem para morrer antes dos 70, sabendo que o indivíduo acabou de completar 50 anos (use a propriedade de falta de memória).

11. Suponha que um componente eletrônico tenha um tempo de vida (em unidades de 1000 horas) que é considerado uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade $f(x) = e^{-x} \mathrm{I}_{(0,+\infty)}(x)$. Suponha também que o custo de fabricação de um item seja de R$ 2,00 e o preço de venda seja de R$5,00. O fabricante garante a devolução total do dinheiro se $x \leq 0,9$. Qual o lucro esperado do fabricante em 10.000 itens a serem produzidos?

12. Para se ajustar uma máquina, a correia deve ter entre 60 e 62 cm de comprimento. Tendo em vista o processo de fabricação, o comprimento destas correia pode ser considerado como uma variável aleatória com distribuição normal, de média 60,7 e desvio padrão 0,8 cm. Pergunta-se:

    (a) Qual a probabilidade de uma correia, escolhida ao acaso, poder ser usada na máquina?

    (b) Um grande revendedor dessas correias estabelece um controle de qualidade nos lotes que compra da fábrica: ele sorteia 4 correias do lote e só aceita o lote se o comprimento médio estiver dentro do tamanho aceito pela máquina. Calcule a probabilidade de aceitação do lote.

13. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2+1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (5-3x)/2 & \text{se} \quad 1 < x \leq 5/3 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 5/3 \end{cases}$$

   (a) Encontre a função de densidade acumulada $F(x)$

   (b) Suponha agora que X representa teores de um determinado elemento em amostras de água que determinam o tratamento químico a ser adotado em um volume de água. Se o custo do tratamento é de $R\$100,00$ para teores abaixo de $0,5$, $R\$120,00$ para teores entre $0,5$ e $1,5$ e $R\$200,00$ para teores acima de $1,5\%$, qual o custo esperado para o tratamento de 1,000 unidades de volume?

14. Mostre como a *função geradora de momentos* pode ser utilizada para encontrar momentos de uma variável aleatória, ilustrando com pelo menos uma distribuição discreta e uma contínua.

15. Dizemos que uma v.a bidimensional (X,Y) tem distribuição uniforme em uma região A do plano real se sua função de densidade conjunta é

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Área}} & \text{se} \quad (x,y) \in R \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

   Seja A a região do plano limitada pela curva $y = x^2$, o eixo y e a reta $y = 1$. Determine:

   (a) A densidade conjunta de (X,Y);

   (b) As densidades marginais de X e de Y;

   (c) As densidades condicionais de X dado $Y = y$ e de Y dado $X = x$.

16. Para cada cliente que entra na fila do caixa de uma loja de roupas:

   - O tempo de espera na fila segue uma exponencial com média de 5 minutos;
   - O tempo de atendimento segue uma exponencial com média de 3 minutos;
   - Os dois tempos são v.a.'s independentes.

   Para a variável "tempo total do cliente no caixa" (que inclui a espera na fila e o atendimento), determine a *f.d.a.*

17. Uma pessoa investe um total de $C = 10000$ reais em duas aplicações cujas taxas de retorno são variáveis aleatórias independentes X_1 e X_2, com médias 5% e 14% e desvios padrão 1% e 8%, respectivamente. O desvio padrão $\sigma(R)$ do seu retorno total $R = C_1X_1 + C_2X_2$, será usado aqui como uma medida do risco envolvido em selecionar essa dada carteira de aplicações.

   (a) Caso se deseje manter o risco no mínimo possível, que quantias C_1 e C_2 devem ser investidas nas respectivas aplicações? Quais são a média do retorno e o risco correspondentes a essa carteira?

   (b) Qual é o tamanho do risco a ser corrido para se atingir uma carteira cujo retorno médio seja de 770 reais?

   (c) Através da Desigualdade de *Chebyshev*, obtenha um intervalo simétrico em torno de 770 reais que, com probabilidade superior a 80%, conterá o retorno R da carteira obtida no item (b).