AUTOVALORES,AUTOVETORES E BASE.

EXERCÍCIOS:

Lembrar que: Autovetores de A associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

1) Ache os autovalores e autovetores ,se possível:

a) $A = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

b) $B = \begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

c) $A = \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$

2)Ache os autovalores e os autovetores e uma base de autovetores para as matrizes

a) $A = \begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

b) $A = \begin{matrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$

RESPOSTAS:

1) a)Primeiro achar os autovalores:

$|A-\lambda I| = \det \begin{matrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{matrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda3=\lambda1=2 \quad e \quad \lambda2=1$

Segundo,achar os autovetores:

* para $\lambda=2$ $\quad N(A-2I) =\{ x \text{ E } R^3; (A-2I)x =0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x2=0, \text{para todo } x1,x3 \in R$$

N(A-2I)={ (x1,0,x3) = x1(1,0,0)+ x3(0,0,1) }= [(1,0,0) , (0,0,1)]

*para $\lambda=1$ N(A-I)={ x E R^3; (A-I)x=0}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x1=0 \text{ e } x3=0$$

N(A-I)={ (0,x2,0) = x2(0,1,0); x2 E R}=[0,1,0)]

b) Autovalores:

$$| B-\lambda I |= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda1=\lambda3=2 \quad e \quad \lambda2=1$$

autovetores:

*para $\lambda=1$ N(B-I) = {x E R^3;(B-I)x=0 }

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x1+x2-x3=0 \\ x3=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x1=-x2 \text{ e } x3=0 \text{ para todo } x2 \in R$$

N(B-I)= { (-x2,x2,0) = x2(-1,1,0) ; x2 E R }=[(-1,1,0)]

*para $\lambda=2$ N(B-2I) = { x E R^3; (B-2I)x=0 }

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x2-x3=0 \\ -x2+x3=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x2=x3 \text{ para todo } x3,x1 \in R$$

$N(B-2I)= \{ (x1,x3,x3) = x1(1,0,0) + x3 (0,1,1) ; x1,x3 \in R \}=[(1,0,0) , (0,1,1)]$

c) autovalores:

$$| A- \lambda I | = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2= -1 \Rightarrow \lambda= \pm (\lambda)^{1/2} \Rightarrow \lambda 1=i \text{ e } \lambda 2=-i$$

Não tem autovalores reais => Não preserva a direção de nenhum vetor do R^2 .

2) a) autovalores:

$$| A-\lambda I | = \det \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)-10=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda 1=-1 \text{ e } \lambda 2=6$$

autovetores:

*para $\lambda= -1$ $N(A+I) = \{ x \in R^2; (A+I)x=0 \}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5x1+5x2=0 \\ 2x1+2x2=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x1+x2=0 \\ 2x1+2x2=0 \end{matrix} \Rightarrow x1=-x2 \text{ para todo } x2 \in R.$$

$N(A+I)= \{ (-x2,x2) = x2(-1,1) ; x2 \in R^2 \}=[(-1,1)]$

*para $\lambda= 6$ $N(A-6I) = \{x \in R^2, (A-6I)x=0 \}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x1+5x2=0 \\ 2x1-5x2=0 \end{matrix} \Rightarrow x1= 5/2\ x2 \text{ para todo } x2 \in R$$

$N(A-6I)= \{ (5/2\ x2,x2) = x2(5/2,1) ;x2 \in R \}=[(5/2,1)]$

Como os autovetores são linearmente independentes e formam um conjunto gerador,uma base de autovetores seria:

β= { (-1,1) , (5/2,1) }

b)autovalores:

$$|A-\lambda I| = \det \begin{matrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{matrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda 1=\lambda 2=3 \text{ e } \lambda 3=-1$$

autovetores;

*para $\lambda=3$ $N(A-3I) = \{ x \text{ E } R^3; (A-3I)x=0 \}$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix} * \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -4x3=0 \\ 5x3=0 \\ -4x3=0 \end{matrix} \Rightarrow x3=0 \text{ para todo } x1,x2 \text{ E R.}$$

$N(A-3I) = \{ (x1,x2,0) = x1(1,0,0)+x2(0,1,0) ; x1,x2 \text{ E } R \}= [(1,0,0) , (0,1,0)]$

*para $\lambda=-1$ $N(A+I) = \{ x \text{ E } R^3; (A+I)x=0 \}$

$$\begin{matrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} * \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x1-4x3=0 \\ 4x2+5x3=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x1=x3 \\ x2= -5/4\ x3 \end{matrix} \text{ para todo } x3 \text{ E R.}$$

$N(A+I) = \{ (x3, -5/4x3,x3) = x3(1, -5/4 ,1); x3 \text{E } R \} = [(1, -5/4 , 1)]$

Como os autovetores são linearmente independentes e formam um conjunto gerador,uma base de autovetores seria:

β= $\{ (1,0,0) , (0,1,0) , (1, -5/4 ,1) \}$