ESPAÇOS VETORIAIS:INDEPENDÊNCIA LINEAR, BASE E DIMENSÃO

EXERCÍCIOS:

1)Mostre que (1,-1), (1,2) e (2,1) são linearmente dependentes.

2)Dados V=R² e v1=(1,-1) , v2=(1,2) e v3=(3,6).

a) v1 e v2 são linearmente independentes?
b) v1,v2 e v3 são linearmente independentes?

3)Dados V=R²*² $v1 = \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$ $v2 = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$ e $v3 = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

v1,v2 e v3 são linearmente independentes?

4)Determine se os vetores dados são ou não linearmente independentes em R².

a) v1= (2,1) e v2=(3,2)
b) v1= (-2,1) , v2= (1,3) e v3= (2,4)

5)Indique se os vetores dados no exercício 4 formam ou não uma base para R².

6)Dados x1= (2,1) e x2= (4,3) .Mostre que x1 e x2 formam uma base para R² e diga qual é a dimensão desta base.

7)Encontre a dimensão do subespaço de P_3 , gerado pelos vetores dados:
S=[x, -1+x , 1+x²] C P_3.

8)Dados V=R²*² $v1 = \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$ $v2 = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ $v3 = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$ e $v4 = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$

{ v1 , v2 , v3 , v4 } é uma base para R²*² ?

RESPOSTAS:

1) $v_1 = (1,-1);\ \ v_2 = (1,2);\ \ v_3 = (2,1);$

Os vetores v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes se, e somente se, existe um conjunto de números complexos $a_i, \ldots, a_n$ com $a_i \neq 0$ para pelo menos um valor de i, tal que $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$, ou seja

$$a_1(1,-1) + a_2(1,2) + a_3(2,1) = 0$$

Podemos verificar que se $a_1 = a_2 = 1$ e $a_3 = -1$, então:

$$1.(1,-1) + 1.(1,2) - 1.(2,1) = 0$$

Logo, os vetores v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes.

2) a) São linearmente independentes,pois:

a1v1+a2v2=0 => a1(1,-1) + a2(1,2)=(0,0)

a1+a2=0

-a1+2 a2=0

Reduzindo a matriz na forma escada, veremos que o posto da matriz dos coeficientes é igual ao posto da aumentada, portanto a1=0 e a2=0 => os vetores são linearmente independentes.

b) Não são linearmente independentes, pois:

a1v1+a2v2+a3v3=0 => a1(1,-1) + a2(1,2) + a3(3,6)=(0,0)

a1+a2+3 a3=0

-a1+2 a2+ 6 a3=0

O sistema é consistente e indeterminado, pois o posto da aumentada é diferente do posto da matriz dos coeficientes => os vetores não são linearmente independentes.

3)Sim, são linearmente independentes, pois:

$$a1v1+a2v2+a3v3=0 \Rightarrow a1 * \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} + a2 * \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} + a3 * \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

a1+2 a2=0

a1+a2+a3=0

-a1+a2+2 a3=0

a1+3 a2+a3=0

O posto da matriz dos coeficientes é igual ao posto da aumentada, então o sistema é consistente e determinado => os vetores são linearmente independentes.

4)a)São linearmente independentes.

a1v1+a2v2=0

a1(2,1)+a2(3,2)=0

2 a1+3 a2=0

a1+2 a2=0

Se o determinante da matriz dos coeficientes for igual à zero, a matriz é singular e se for diferente de zero, é inversível.

Então podemos também resolver o problema de independência linear achando o determinante da matriz.

Neste caso, o determinante é igual a um => os vetores são linearmente independentes.

b)São linearmente dependentes,pois:

$a_1(-2,1)+a_2(1,3)+a_3(2,4)=$

$-2a_1+a_2+2a_3=0$

$a_1+3a_2+4a_3=0$

O sistema vai ter variável livre => os vetores são linearmente dependentes.

5)a)Sim,pois são geradores e linearmente independentes.

b)Não,pois se são linearmente dependentes,já foge da condição para ser base.

6)dimensão =2.

Primeiro verificando se são linearmente independentes:

$a_1(2,1)+a_2(4,3)=(0,0)$

$2a_1+4a_2=0$

$a_1+3a_2=0$

O determinante da matriz dos coeficientes é dois => os vetores são linearmente independentes.

Segundo,verifica-se se forma um conjunto gerador:

$a_1(2,1)+a_2(4,3)=(x,y)$

$2a_1+4a_2=x$

$a_1+3a_2=y$

Esse sistema tem uma única solução para qualquer x e y, portanto é gerador.

Conclusão: Os vetores formam uma base, então a dimensão dessa base é 2.

7)dim S= 3

$a_1x+a_2(-1+x)+a_3(1+x^2)=0+0x+0x^2$

- ⇨ $-a2+a3+(a1+a2)x+a3\,x^2 = 0+0x+0x^2$
- ⇨ $-a2+a3=0$

  $a1+a2=0$

  $a3=0$

$a1=0, a2=0, a3=0$

- ⇨ Os vetores são linearmente independentes e pode-se notar também que formam um conjunto gerador.Portanto,temos uma base e a sua dimensão é 3.

8)Sim, é uma base, pois:

Primeiro, verifica-se se formam um conjunto gerador:

$$\begin{matrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{matrix} = a1 * \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} + a2 * \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} + a3 * \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} + a4 * \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a1-a3 & -a1+a2 \\ a1+2\,a2 & a1+a2+2\,a3+2\,a4 \end{matrix} = \begin{matrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{matrix}$$

- ⇨ $a1-a3=x1$

  $-a1+a2=x2$

  $a1+2\,a2=x3$

  $a1+a2+2\,a3+2\,a4=x4$

Oposto da matriz dos coeficientes é igual da matriz aumentada => Formam um conjunto gerador.

Segundo, verifica-se se são linearmente independentes:

$a1v1+a2v2+a3v3+a4v4=0$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = a1 * \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} + a2 * \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} + a3 * \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} + a4 * \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

- ⇨ $a1-a3=0$

$-a1+a2=0$

$a1+2\ a2=0$

$a1+a2+2\ a3+2\ a4=0$

Oposto da matriz dos coeficientes é igual da matriz aumentada => São linearmente independentes.

Portanto,formam uma base para R^{2*2} .