SISTEMAS LINEARES

Definições gerais

Equação linear: Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$. Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$, todos reais, são chamados *coeficientes* e b, também real, é o *termo independente* da equação.

Solução de uma equação linear: Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$

é solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Sistema linear: É um conjunto de $m(m \geq 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Assim, o sistema

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é linear.

Lembrando a definição de produto de matrizes, notemos que o sistema linear S pode ser escrito na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução de um sistema linear: Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$

é solução de um sistema linear S, se for solução de **todas** as equações de S, isto é:

$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1$ (sentença verdadeira)

$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2$ (sentença verdadeira)

$a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + \ldots + a_{3n}\alpha_n = b_3$ (sentença verdadeira)

. . . .

$a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + a_{m3}\alpha_3 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m$ (sentença verdadeira)

Sistema possível. Sistema impossível: Se um sistema linear S tiver pelo menos uma solução, diremos que ele é *possível* ou *compatível*; caso não tenha nenhuma solução, diremnos que S é um sistema *impossível* ou *incompatível*.

Sistema linear homogêneo: Chamamos de sistema linear homogêneo todo aquele em que o termo independente de todas as equações vale zero.

Exemplos:

$$S_1 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} 3x + 4y + z + t = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + 2y + z - 3t = 0 \end{cases}$$

É fácil notar que um sistema linear homogêneo admite sempre como solução a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ em que $\alpha_i = 0$, $\forall i \in 1, 2, 3, \ldots, n$. Nos exemplos dados $(0, 0, 0)$ é solução de S_1 e $(0, 0, 0, 0)$ é solução de S_2.

Matrizes de um sistema: Dado um sistema linear S de m equações e n incógnitas, A é a matriz incompleta do sistema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e B é a matriz completa do sistema

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

.

Teorema de Cramer: Consideremos um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas (isto é, $m = n$). Nestas condições, A é uma matriz quadrada e $D = det(A)$.

TEOREMA: Seja S um sistema linear com um número de equações igual ao de incógnitas. Se

$D \neq 0$, então o sistema será *possível* e terá *solução única* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, tal que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}, \quad \forall i \in 1, 2, 3, \ldots, n$$

em que D_i é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Sistema possível e determinado: Os sistemas lineares que têm solução única são chamados *possíveis e determinados.*

Sistemas escalonados: Dado um sistema linear

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo, dizemos que S está na forma *escalonada*, se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Exemplos:

$$S_1 \begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ y - z = 4 \\ 2z = 5 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} 4x - y + z + t + w = 1 \\ z - t + w = 0 \\ 2t - w = 1 \end{cases} \quad S_3 \begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Resolução de um sistema na forma escalonada: Há dois tipos de sistemas escalonados a considerar:

1^o caso: número de equações igual ao número de incógnitas. Nesse caso o sistema S terá a forma:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que $a_{ii} \neq 0$, $\forall i \in 1, 2, 3, \ldots, n$.

A matriz incompleta do sistema é a matriz triangular:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$D = det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} \neq 0$; logo, pelo teorema de Cramer, S é possível e determinado. Os valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ da solução podem ser obtidos resolvendo o sistema por substituição. Partindo da última equação, obtemos x_n; em seguida, substituindo esse valor na equação anterior, obtemos x_{n-1} e assim por diante.

2^o caso: número de equações é menor que o número de incógnitas. Nesse caso o sistema S terá a forma:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2j}x_j + \ldots + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 (j \geq 2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mr}x_r + \ldots + a_{mn}x_n = b_m (r > j) \end{cases}$$

com $m < n$.

Para resolvermos tal sistema, podemos tomar as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas *variáveis livres*) e transpô-las para o segundo membro. O novo sistema assim obtido pode ser visto como sendo um sistema contendo apenas as incógnitas do primeiro membro das equações. Nesse caso, atribuindo valores a cada uma das incógnitas do segundo membro, teremos um sistema do 1o tipo, portanto, determinando; resolvendo-o, obteremos uma solução do sistema. Se atribuirmos outros valores às incógnitas do segundo membro, teremos outro sistema, também determinado; resolvendo-o, obteremos outra solução do sistema. Como esse procedimento de atribuir valores às incógnitas do segundo membro pode se estender indefinidamente, segue-se que podemos extrair do sistema original um número infinito de soluções. Um tal sistema é dito *possível e indeterminado*. Chama-se *grau de indeterminação* o número de variáveis livres do sistema, isto é, $n - m$.

Sistema equivalentes: Dizemos que dois sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes, se toda solução de S_1 for solução de S_2 e toda solução de S_2 for solução de S_1.

Teorema 1: Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S por um número $k \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

Teorema 2: Se substituirmos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com outra, o novo sistema obtido, S', será equivalente a S.

Escalonamento de um sistema: Para escalonarmos um sistema, teremos que seguir vários passos, todos eles baseados no teoremas 1 e 2.

1^o passo: Colocamos como primeira equação aquela em que o coeficiente da primeira incógnita seja diferente de zero.

2^o passo: Anulamos o coeficiente da primeira incógnita de todas as equações (com execeção da primeira), substituindo a i-ésima equação ($i \geq 2$) pela soma da mesma multiplicada por um número conveniente.

3^o passo: Deixamos de lado a primeira equação e aplicamos o 1^o e 2^o passos nas equações restantes.

4^o passo: Deixamos de lado a primeira e segunda equações e aplicamos o 1^o e 2^o passos nas equações restantes, e assim por diante, até o sistema ficar escalonado.

Característica de uma matriz: Seja A uma matriz qualquer e A' uma matriz escalonada, linha-equivalente a A. Chamamos de *característica da matriz* A, e indicamos por $\rho(A)$, ao *número de linhas não nulas de* A'.

Teorema de Rouché-Capelli: Consideremos o sistema linear

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sejam A e B as matrizes incompleta e completa do sistema. O sistema linear S será consistente (possível ou compatível) se, e somente se, $\rho(A) = \rho(B)$.

Se $\rho(A) = \rho(B) = n =$ número de incógnitas então S será possível e determinado.

Se $\rho(A) = \rho(B) < n =$ número de incógnitas então S será possível e indeterminado.

Inversa Generalizada: Uma inversa generalizada de uma matriz $A_{n\times p}$ é qualquer matriz A^-, que satisfaz:

$$AA^-A = A. \tag{1}$$

Uma inversa generalizada *não é única* exceto quando A é não-singular, neste caso $A^- = A^{-1}$. Uma inversa generalizada que satisfaz (1) é também chamada *inversa condicional*.

Toda matriz (quadrada ou retangular) tem uma inversa condicional. Isto é garantido mesmo para vetores.

Teorema: Se A é $n \times p$ então qualquer *inversa generalizada* A^- é $p \times n$.

Algoritmo para encontrar uma inversa condicional A^-: Seja uma matriz $A_{n\times p}$ de posto r

1. Encontre qualquer submatriz não-singular $C_{r\times r}$. Não é necessário que os elementos de C ocupem posições (linhas e colunas) adjacentes em A.
2. Encontre C^{-1} e a sua transposta $(C^{-1})^T$.
3. Substitua em A os elementos de C pelos elementos de $(C^{-1})^T$.
4. Substitua todos os outros elementos de A por zeros.
5. Transponha a matriz resultante.

Teorema: Se o sistema de equações $Ax = b$ é consistente e se A^- é uma inversa generalizada de A, então $x = A^-b$ é uma solução.