REGRA DE CHIÓ - Abaixamento de ordem de um determinnate

Consideremos uma matriz M de ordem $n \geq 2$, tal que $a_{11} = 1$, isto é:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adicionemos à 2^a coluna, a 1^a multiplicada por $-a_{12}$.
Adicionemos à 3^a coluna, a 1^a multiplicada por $-a_{13}$.
$\vdots$
Adicionemos à j-ésima coluna, a 1^a multiplicada por $-a_{1j}$.
$\vdots$
Adicionemos à n-ésima coluna, a 1^a multiplicada por $-a_{1n}$.
Obteremos a matriz N, tal que $detN = detM$.

$$detN = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} & a_{23} - a_{21} \cdot a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21} \cdot a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31} \cdot a_{12} & a_{33} - a_{31} \cdot a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31} \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1} \cdot a_{12} & a_{n3} - a_{n1} \cdot a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1} \cdot a_{1n} \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Laplace temos:

$$detN = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} & a_{23} - a_{21} \cdot a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21} \cdot a_{1n} \\ a_{32} - a_{31} \cdot a_{12} & a_{33} - a_{31} \cdot a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31} \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} - a_{n1} \cdot a_{12} & a_{n3} - a_{n1} \cdot a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1} \cdot a_{1n} \end{vmatrix}$$

em que $detN$ é de ordem $(n-1)$.

Isso pode ser resumido através da regra conhecida como *regra de Chió*:

1. Desde que M tenha $a_{11} = 1$, suprimimos a 1^a linha e a 1^a coluna de M.

2. De cada elemento restante na matriz subtraímos o produto dos elementos que se encontram na "extremidades das perpendiculares" traçadas do elemento considerado à 1^a linha e à 1^a coluna.

3. Com as diferenças obtidas, construímos uma matriz de ordem $(n-1)$ cujo determinante é igual ao de M.

OBSERVAÇÕES:

1. Se na matriz M, $a_{11} \neq 1$ e existir algum outro elemento igual a 1, podemos através de troca de filas paralelas transformar M em outra matriz que tenha $a_{11} = 1$.

2. Se não existir em M nenhum elemento igual a 1. podemos, usando o teorema de Jacobi, obter uma nova matriz N que tenha um elemento igual a 1.

MATRIZ DE VANDERMONDE (OU DAS POTÊNCIAS)

Definição Chamamos de *matriz de Vandermonde*, ou das potências, toda matriz de ordem $n \geq 2$, do tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Isto é, as colunas de M são formadas por potências de mesma base, com expoente inteiro, variando desde 0 até $n-1$ (os elementos de cada coluna formam uma progressão geométrica cujo primeiro elemento é 1).

Os elementos da 2^a linha são chamados *elementos característicos* da matriz.

Indiquemos o determinante de uma matriz de Vandermonde por $V(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

Propriedade O determinante $V(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é:

$$V(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \prod_{i>j}(a_i - a_j), \quad i \in 1, 2, \dots, n \quad j \in 1, 2, \dots, n$$

CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA POR MEIO DE DETERMINANTES

Matriz dos cofatores: Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos de *matriz dos cofatores de M*, e indicamos por M', a matriz que se obtém de M, substituindo cada elemento de M por seu cofator.

Assim, se $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, então $M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$.

Matriz adjunta: Seja M uma matriz quadrada de ordem n e M' a matriz dos cofatores de M. Chamamos de *matriz adjunta de M* e indicamos por $\overline{M}$, a transposta da matriz M', isto é, $\overline{M} = (M')^t$.

Em resumo:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots \end{bmatrix}$$

Teorema

Se M é uma matriz quadrada de ordem n e I_n é a matriz identidade de ordem n, então $M \cdot \overline{M} = \overline{M} \cdot M = detM \cdot I_n$.

Teorema

Se M é uma matriz quadrada de ordem n e $detM \neq 0$, então a inversa de M é:

$$M^{-1} = \frac{1}{detM} \cdot \overline{M}$$

.

Corolário

Seja M uma matriz quadrada de ordem n A inversa de M existe se, e somente se, $detM \neq 0$.