

Inferência Bayesiana em Modelo Composicional Espacial

Ana Beatriz Tozzo Martins - PPGMNE-LEG/UFPR
DES/UEM

Paulo Justiniano Ribeiro Junior - LEG/UFPR

Wagner Hugo Bonat - PPGMNE-LEG/UFPR

Antônio Carlos Andrade Gonçalves - DAG/UEM

PPGMNE-LEG/UFPR

18 de dezembro de 2009

Motivação

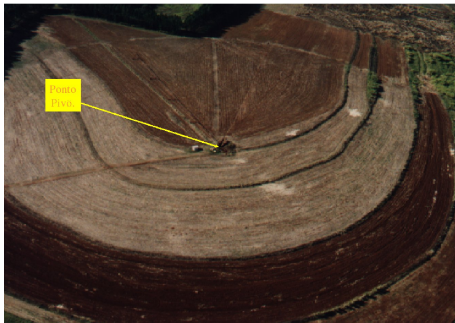


Figura: Quadrante irrigado por sistema pivô-central no campo experimental da ESALQ-USP.

SOLO

frações granulométricas
(composição)



propriedades físico-hídricas



prática agrícola



agricultura de precisão

TESE

1. Introdução
2. Revisão da Literatura:
 - Modelo Geoestatístico Gaussiano;
 - Predição Linear Espacial - Clássica e Bayesiana;
 - Modelo Multivariado;
 - Dados Composicionais;
3. Material e Métodos:
 - Modelo Geoestatístico Composicional - Clássica e Bayesiana;
 - Análise de Dados Composicionais Simulados;
4. Resultados: Análise de Frações Granulométricas de um Solo;
5. Conclusão e Sugestões de Trabalhos Futuros.

Dados Composicionais - Aitchison (1986)

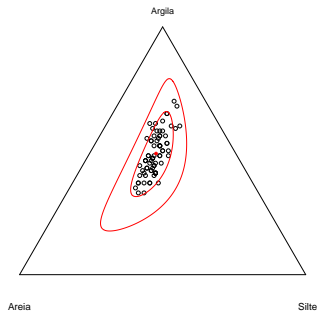


Figura: Diagrama Ternário das composições.

• **Composição:** $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_B)'$

$$X_1 \geq 0, \dots, X_B \geq 0$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_B = 1$$

$$\mathbb{S}^B = \{ \underline{X} \in \mathbb{R}^B; X_i > 0, i=1, \dots, B; \mathbf{1}'\underline{X} = 1 \}$$

• **Base:** $\underline{W} = (W_1, W_2, \dots, W_B)'$

$$\mathbb{R}_+^B = \{ \underline{W} \in \mathbb{R}^B; W_i > 0, i = 1, \dots, B \}$$

• **Operador fechamento:**

$$\mathcal{C} : \mathbb{R}_+^B \longrightarrow \mathbb{S}^B$$

$$\underline{W} \longrightarrow \mathcal{C}[\underline{W}] = \frac{\underline{W}}{\mathbf{1}'\underline{W}}$$

- **Dados composicionais:**
 - Aitchison (1986).
- **Modelos espaciais uni e multivariados:**
 - Diggle e Ribeiro Jr (2007);
 - Schmidt e Gelfand (2003);
 - Banerjee, Carlin e Gelfand (2004);
 - Schmidt e Sansó (2006).
- **Combinação de dados composicionais e espaciais:**
 - Pawlowsky e Olea (2004);
 - Lark e Bishop (2007);
 - Tjelmeland e Lund (2003).

Objetivo

- Estender o modelo geoestatístico bivariado para dados composicionais, derivando e implementando estimação bayesiana baseada na verossimilhança;
- Obter preditores espaciais no simplex que permitam a construção de mapas de predição das frações do solo na área de estudo.

Fundamentos Para Análise de Dados Composicionais

Composição: $\underline{X}(\underline{x}) = (X_1(\underline{x}), X_2(\underline{x}), X_3(\underline{x}))' = (\text{Areia}, \text{Silte}, \text{Argila})'$

Transformação razão log-aditiva (alr):

$$\text{alr} : \mathbb{S}^B \longrightarrow \mathbb{R}^{B-1}$$

$$\underline{X}(\underline{x}) \longrightarrow \text{alr}(\underline{X}(\underline{x})) = \underline{Y}(\underline{x}) = \left(\ln \frac{X_1(\underline{x})}{X_3(\underline{x})}, \ln \frac{X_2(\underline{x})}{X_3(\underline{x})} \right)'$$

$$\underline{Y}(\underline{x}) = (Y_1(\underline{x}), Y_2(\underline{x}))'$$

Transformação logística generalizada aditiva (agl):

$$\text{agl} = \text{alr}^{-1}$$

Pawlowsky e Olea (2004).

Modelo Espacial

Modelo geoestatístico bivariado para dados composicionais:

$$\begin{cases} Y_1(\underline{x}_i) &= \mu_1(\underline{x}_i) + \sigma_1 U(\underline{x}_i; \phi) + \tau_1 Z(\underline{x}_i; \rho) \\ Y_2(\underline{x}_{i'}) &= \mu_2(\underline{x}_{i'}) + \sigma_2 U(\underline{x}_{i'}; \phi) + \tau_2 Z(\underline{x}_{i'}; \rho) \end{cases}$$

- $\underline{x}_i, \underline{x}_{i'} \in \mathbb{R}^2$; $i, i' = 1, \dots, n_1, n_1$ tamanho amostral;
- $\underline{Y}_{n \times 1}(\underline{x}) = (Y_1(\underline{x}_1), Y_2(\underline{x}_1), \dots, Y_1(\underline{x}_{n_1}), Y_2(\underline{x}_{n_1}))'$;
- $U \sim N(\underline{0}; \Sigma_U)$, Σ_U : variâncias unitárias e covariâncias em função de $\rho_U(\phi)$, exponencial;
- $Z \sim N(\underline{0}; \Sigma_Z)$, Σ_Z : variâncias unitárias e covariâncias em função de ρ induzida pela estrutura composicional.

Modelo Espacial

- $\underline{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \phi, \rho)' \rightarrow \underline{\theta}^* = (\eta, \nu_1, \nu_2, \phi, \rho)'$
- **Log-Verossimilhança** \rightarrow **Normal multivariada com EMV:**

$$\hat{\underline{\mu}} = (\mathbf{D}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{D}'\mathbf{V}^{-1}\underline{Y}) \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_1 = \sqrt{\hat{Q}e/n}$$

$$\hat{Q}e = (\underline{Y} - \mathbf{D}\hat{\underline{\mu}})'\mathbf{V}^{-1}(\underline{Y} - \mathbf{D}\hat{\underline{\mu}})$$

- **Log-verossimilhança concentrada** \rightarrow **solução numérica:**

$$l(\underline{\theta}^*, \underline{Y}) = -0,5 \left[\ln(|\mathbf{V}|) + n \left(\ln(2\pi) + \ln(\hat{Q}e) - \ln(n) + 1 \right) \right]$$

Inferência Bayesiana

- $\underline{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \phi, \rho)'$ → variáveis aleatórias
- **Dist. conjunta** = veros. \times *priori*: $P(\underline{Y}, \underline{\theta}) = P(\underline{Y}|\underline{\theta})P(\underline{\theta})$.
- **Teorema de Bayes** \Rightarrow distribuição à *posteriori* de $\underline{\theta}$:

$$P(\underline{\theta}|\underline{Y}) = \frac{P(\underline{\theta}, \underline{Y})}{P(\underline{Y})} = \frac{P(\underline{Y}|\underline{\theta})P(\underline{\theta})}{P(\underline{Y})} = \frac{P(\underline{Y}|\underline{\theta})P(\underline{\theta})}{\int P(\underline{\theta}, \underline{Y})d\underline{\theta}} \propto P(\underline{Y}|\underline{\theta})P(\underline{\theta}),$$

- **Resumos estatísticos** como esperanças à *posteriori* de funções de $\underline{\theta}$:

$$E(f(\underline{\theta})|\underline{Y}) = \frac{\int f(\underline{\theta})P(\underline{\theta})P(\underline{Y}|\underline{\theta})d\underline{\theta}}{\int P(\underline{\theta})P(\underline{Y}|\underline{\theta})d\underline{\theta}} \propto \int f(\underline{\theta})P(\underline{\theta})P(\underline{Y}|\underline{\theta})d\underline{\theta}.$$

Inferência Bayesiana (cont.)

- **Resolução:**
 - **aproximação de Laplace:**

Nott, Fielding e Leonte (2009),
Gelman, Carlin, Stern e Rubin (2003),
Gilks, Richardson e Spiegelhalter (1996);
 - **quadratura de Gauss-Hermite:**

Gamerman (2006),
Paulino, Turkman e Murteira (2003),
Abramowitz e Stegun (1972);
 - **integração Monte Carlo - Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC):**

Gamerman (2006),
Lee (2004),
Gelman, Carlin, Stern e Rubin (2003),
Gill (2002),
Gilks, Richardson e Spiegelhalter (1996).

Inferência Bayesiana (cont.)

- $\underline{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \phi, \rho)'$
- $\underline{\theta}^* = (\eta, \nu_1, \nu_2, \phi, \rho)$ e $(\underline{\mu}, \sigma_1^2)$ independentes
- **Distribuição à posteriori** de $\underline{\theta}$:

$$P(\underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^* | Y) \propto P(Y | \underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*) P(\underline{\mu}, \sigma_1^2) P(\underline{\theta}^*)$$

Inferência Bayesiana (cont.)

Prioris:

- **Conjugadas:** levam a uma posteriori da mesma família de distribuições.
- **Casos extremos:**
 - parâmetros conhecidos \Rightarrow distribuições degeneradas ($V \equiv 0$);
 - prioris vagas:
 - prioris **não informativas** (de Jeffrey's) - $P(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$ ou $P(\underline{\theta}) \propto |I(\underline{\theta})|^{1/2}$;
 - **flat** - $P(\theta) \propto 1$;
 - **imprópria** - $P(\theta) \propto 1/\sigma^2$.

Ribeiro Jr e Diggle (1999)



IB (cont.) - Priors

Priors:

- $P(\underline{\mu}, \sigma_1^2) \propto \frac{1}{\sigma_1^2}$;
- $P(\underline{\mu} | \sigma_1^2) = 1$;
- $P(\eta)$, $P(\nu_1)$ e $P(\nu_2)$ → lognormais com parâmetros correspondentes às razões das estimativas de máxima verossimilhança.;
- $P(\phi) = \text{Gama}(66, 1)$;
- $P(\rho) = 1$

IB (cont.) - Distribuições à Posteriori

- $$\int_{\underline{\theta}^*} P(\underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^* | \underline{Y}) d\underline{\theta}^* \propto \int_{\underline{\theta}^*} P(\underline{Y} | \underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*) P(\underline{\mu}, \sigma_1^2) P(\underline{\theta}^*) d\underline{\theta}^*$$

- $$P(\underline{\mu}, \sigma_1^2 | \underline{Y}) \propto P(\underline{Y} | \underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*) \frac{1}{\sigma_1^2} \int_{\underline{\theta}^*} P(\underline{\theta}^*) d\underline{\theta}^*.$$

- $$\propto \frac{1}{\sigma_1^2} P(\underline{Y} | \underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*)$$

- $$[\underline{\mu} | \underline{Y}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*] \sim N \left(\hat{\underline{\mu}} | \underline{\theta}^*; \sigma_1^2 \left(\mathbf{D}' \mathbf{V}_Y^{-1} \mathbf{D} \right)^{-1} \right) \quad \hat{\underline{\mu}} | \underline{\theta}^* = (\mathbf{D}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{D}' \mathbf{V}^{-1} \underline{Y})$$

$$[\sigma_1^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}^*] \sim \chi_{\text{Sinv}}^2 \left(n - n_{\underline{\mu}}; S^2 | \underline{\theta}^* \right) \quad S^2 | \underline{\theta}^* = \frac{(\underline{Y} - \mathbf{D} \hat{\underline{\mu}})' \mathbf{V}_Y^{-1} (\underline{Y} - \mathbf{D} \hat{\underline{\mu}})}{n - n_{\hat{\underline{\mu}}}}.$$

IB (cont.) - Algoritmo Metropolis-Hastings

- $\theta^{(t)} \Rightarrow \theta^{(t+1)}$: θ' de $q(\cdot|\theta^{(t)})$ com probabilidade $\alpha(\theta^{(t)}, \theta')$

- **Passos:**

1. Escolher número de simulações - n
2. Iniciar o contador de iterações - $t=1$
3. Valor inicial $\theta^{(t)}$
4. Gerar θ' de $q(\cdot|\theta^{(t)})$
5. Gerar $u \sim U(0; 1)$
6. $\alpha(\theta; \theta') = \min \left\{ 1; \frac{P(\underline{Y}|\theta') P(\theta') q(\theta|\theta')}{P(\underline{Y}|\theta) P(\theta) q(\theta'|\theta)} \right\}$
7. Se $u < \alpha(\theta; \theta') \Rightarrow \theta^{(t)} = \theta'$, cc $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$.
8. Se $t = n$, FIM.
9. Incrementar o contador t fazendo $t = t + 1$.
10. Voltar para o passo 4. FIM.
11. FIM.

IB (cont.) - Passos Para Inferência Bayesiana

1. Algoritmo Metropolis-Hastings \Rightarrow matriz de covariância do modelo;
2. Calcular $\hat{\underline{\mu}}$ e S^2 e amostrar σ_1^2 de $[\sigma_1^2 | \underline{Y}] \sim \chi_{\text{Sin}}^2(n - n_{\underline{\mu}}; S^2)$;
3. Calcular $\text{Var}(\underline{\mu})$: $[\underline{\mu} | \underline{Y}, \sigma_1^2] \sim N\left(\hat{\underline{\mu}}; \sigma_1^2 \left(\mathbf{D}' \mathbf{V}_{\underline{Y}}^{-1} \mathbf{D}\right)^{-1}\right)$;
4. Amostrar um valor de $\underline{\mu}$ de $[\underline{\mu} | \underline{Y}, \sigma_1^2]$;
5. Repetir tantas vezes quanto o número de simulações;

IB (cont.) - Passos Para Inferência Bayesiana

- $\int_{\underline{\theta}^*} P(\underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^* | \underline{Y}) d\underline{\theta}^* \propto \int_{\underline{\theta}^*} P(\underline{Y} | \underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*) P(\underline{\mu}, \sigma_1^2) P(\underline{\theta}^*) d\underline{\theta}^*$
- $P(\underline{\mu}, \sigma_1^2 | \underline{Y}) \propto P(\underline{Y} | \underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*) \frac{1}{\sigma_1^2} \int_{\underline{\theta}^*} P(\underline{\theta}^*) d\underline{\theta}^* \propto \frac{1}{\sigma_1^2} P(\underline{Y} | \underline{\mu}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*)$
- $[\underline{\mu} | \underline{Y}, \sigma_1^2, \underline{\theta}^*] \sim N\left(\hat{\underline{\mu}} | \underline{\theta}^*; \sigma_1^2 \left(\mathbf{D}' \mathbf{V}_Y^{-1} \mathbf{D}\right)^{-1}\right)$ $\hat{\underline{\mu}} | \underline{\theta}^* = (\mathbf{D}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{D}' \mathbf{V}^{-1} \underline{Y})$
 $[\sigma_1^2 | \underline{Y}, \underline{\theta}^*] \sim \chi_{\text{Sinv}}^2(n - n_{\underline{\mu}}; S^2 | \underline{\theta}^*)$ $S^2 | \underline{\theta}^* = \frac{(\underline{Y} - \mathbf{D} \hat{\underline{\mu}})' \mathbf{V}_Y^{-1} (\underline{Y} - \mathbf{D} \hat{\underline{\mu}})}{n - n_{\underline{\mu}}}$

IB (cont.) - Passos Para Inferência Bayesiana (cont.)

6. Predição espacial:

6.1 **Cokrigagem** de \underline{Y}_0 em $\underline{x}_0 = (\underline{x}_{10}, \underline{x}_{20}, \dots, \underline{x}_{n_20})$ com cada conjunto de parâmetros simulados:

- $\underline{\mu}_{\underline{Y}_0|\underline{Y}} = \underline{\mu}_{\underline{Y}_0} + \Sigma_{\underline{Y}_0\underline{Y}}\Sigma_{\underline{Y}\underline{Y}}^{-1}(\underline{Y} - \underline{\mu}_{\underline{Y}})$
- $\Sigma_{\underline{Y}_0|\underline{Y}} = \Sigma_{\underline{Y}_0\underline{Y}_0} - \Sigma_{\underline{Y}_0\underline{Y}}\Sigma_{\underline{Y}\underline{Y}}^{-1}\Sigma_{\underline{Y}\underline{Y}_0}$

6.2 Gerar uma amostra de $NM \sim (\underline{\mu}_{\underline{Y}_0|\underline{Y}}; \Sigma_{\underline{Y}_0|\underline{Y}})$ para cada conjunto de parâmetros simulados.

6.3 Aplicar transformação agl.

6.4 Calcular a média das simulações para cada componente.

IB (cont.) - Diagnóstico de Convergência

- **Monitorar a convergência** é estimar o quanto a inferência baseada em simulações de cadeia de Markov diferem da distribuição posteriori;
- **Método inspirado na análise de variância**: formar uma super e uma subestimativa da variância da distribuição posteriori, com a propriedade que as estimativas serão grosseiramente iguais em convergência, mas não antes. Gilks, Richardson, Spiegelhalter (1996).

Métodos

- Autocorrelações dos parâmetros à posteriori, Gill (2002);
- Gráfico da trajetória da cadeia;
- Gráfico da densidade estimada do parâmetro à posteriori;
- Teste de Geweke: Gill (2002), Gamerman e Lopes (2006);
- Diagnóstico de sequência múltipla de Gelman e Rubin: Gill (2002), Gamerman e Lopes (2006).

IB (cont.) - Diagnóstico de Convergência

Teste de Geweke: teste de **diferença de médias** usando uma aproximação assintótica $p/$ o erro padrão da diferença.

Sejam $\{\theta_1, \dots, \theta_{m+n}\}$, $\bar{f}_b = \frac{1}{n_b} \sum_{i=m+1}^{m+n_b} f(\theta_i)$ e $\bar{f}_a = \frac{1}{n_a} \sum_{i=m+n-n_a+1}^{m+n} f(\theta_i)$

onde $n_b + n_a < n$.

Se m é o período de aquecimento, \bar{f}_a e \bar{f}_b são as médias ergódicas no fim e começo do período de convergência e deveriam se comportar de forma similar. À medida que n aumenta e as razões n_a e n_b permanecem fixas então

$$z_G = \frac{\bar{f}_a - \bar{f}_b}{\sqrt{\hat{\text{Var}}(f_a) + \hat{\text{Var}}(f_b)}} \rightarrow N(0; 1)$$

Sugestão: $n_b = 0.1 n$ e $n_a = 0.5 n$ **Preocupação:** $z_G > |2|$



IB (cont.) - Diagnóstico de Convergência

Diagnóstico de sequência múltipla de Gelman e Rubin:

$$\begin{array}{cccc} \theta_{(1)}^{[1]} & , & \theta_{(1)}^{[2]} & , \dots , \theta_{(1)}^{[n]} \\ \theta_{(2)}^{[1]} & , & \theta_{(2)}^{[2]} & , \dots , \theta_{(2)}^{[n]} \\ \vdots & & & \\ \theta_{(m)}^{[1]} & , & \theta_{(m)}^{[2]} & , \dots , \theta_{(m)}^{[n]} \end{array}$$

Variâncias entre e dentro das cadeias:

$$V_E = \frac{n}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{\theta}_{(j)} - \bar{\bar{\theta}})^2 \quad \text{e} \quad V_D = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\theta_{(j)}^{[i]} - \bar{\theta}_{(j)})^2$$

IB/DC (cont.) - Teste de Gelman e Rubin (cont.)

Sob convergência, todos os mn valores são selecionados da posteriori e a variância $\text{Var}(\theta)$ pode ser estimada por

$$\hat{\text{Var}}(\theta) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) V_D + \left(\frac{1}{n}\right) V_E.$$

- Se as cadeias ainda não convergiram, os valores iniciais estarão influenciando as trajetórias. Devido à sua superdispersão, eles forçarão $\hat{\text{Var}}(\theta)$ a superestimar $\text{Var}(\theta)$.
- Após a convergência, V_D tenderá a subestimar $\text{Var}(\theta)$ porque cada cadeia ainda não terá atravessado todo o espaço.

Indicador de convergência:

redução de escala estimado: $\sqrt{\hat{R}} = \sqrt{\frac{\hat{\text{Var}}(\theta)}{V_D}} < 1,2 \Rightarrow$ **convergência.**

IB (cont.)

Intervalo de Credibilidade: IC de $100(1 - \alpha)\%$ para $\underline{\theta}$ é C de Θ tal que

$$P(C|Y) = \int_C p(\underline{\theta}|Y) d\underline{\theta} \geq 1 - \alpha.$$

- “ \geq ”: considera conjuntos discretos em que a obtenção de um intervalo de cobertura de exatamente $1 - \alpha$ de probabilidade pode não ser possível.
- conjuntos contínuos deseja-se definir intervalos que têm exatamente a cobertura desejada \Rightarrow tamanho menor \Rightarrow estimativa mais precisa.

Um intervalo de credibilidade de **mais alta densidade à posteriori**:

$$C = \underline{\theta} \in \Theta : p(\underline{\theta}|Y) \geq k(\alpha)$$

onde $k(\alpha)$ é a maior constante satisfazendo $P(C|Y) \geq 1 - \alpha$.

Carlin, Louis (2009)



Análise de Frações Granulométricas de Um Solo

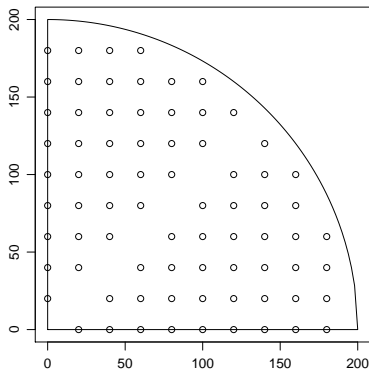


Figura: Distribuição das localizações na área de estudo.

- Gonçalves (1997):
Tese - ESALQ-USP;
 - Área: quadrante irrigado por um sistema pivô-central;
 - Grade de amostragem $20 \times 20\text{m}$
- ⇒ 76 amostras: $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Areia} \\ \textit{Silte} \\ \textit{Argila.} \end{array} \right.$

Análise de Frações Granulométricas de Um Solo

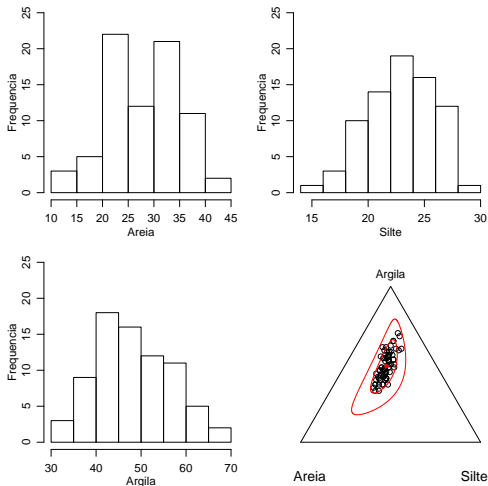


Figura: Distribuição de areia, silte e argila e diagrama ternário das composições.

Análise de Frações Granulométricas de Um Solo

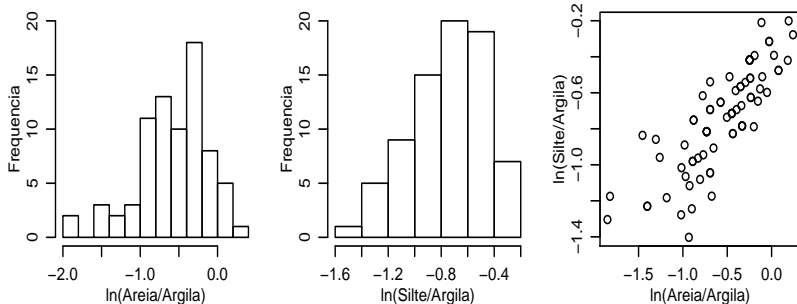


Figura: Distribuição das log-razão e correspondente diagrama de dispersão.

Análise de Frações Granulométricas de Um Solo

Tabela: Esperança das 1200 simulações da distribuição à *posteriori* de θ e intervalos de 95% de credibilidade obtidos por inferência Bayesiana considerando-se 12000 simulações, *burn-in*= 1000 e salto= 10.

Parâmetros	Estimativas	LI. Delta	LS. Delta
μ_1	-0,7643910	-1,1951539	-0,3326118
μ_2	-0,7946658	-0,9350368	-0,6740090
σ_1	0,4427920	0,3409507	0,5573306
σ_2	0,1126342	0,0592708	0,1804150
τ_1	0,2871070	0,2220835	0,3567449
τ_2	0,2658107	0,2255757	0,3099205
ϕ	65,727842	51,5340474	84,4576982
ρ	0,9314342	0,8252095	0,9924404

Análise de Frações Granulométricas de Um Solo

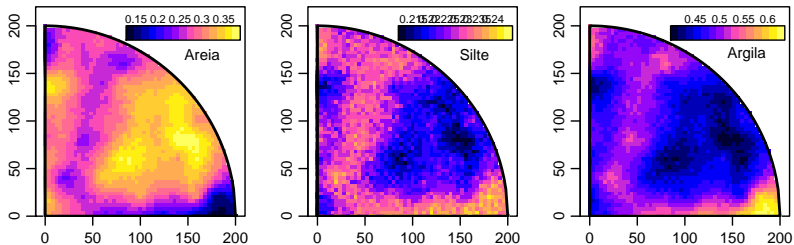


Figura: Mapas das porcentagens de areia, silte e argila obtidos por inferência Bayesiana.

Análise de Frações Granulométricas de Um Solo

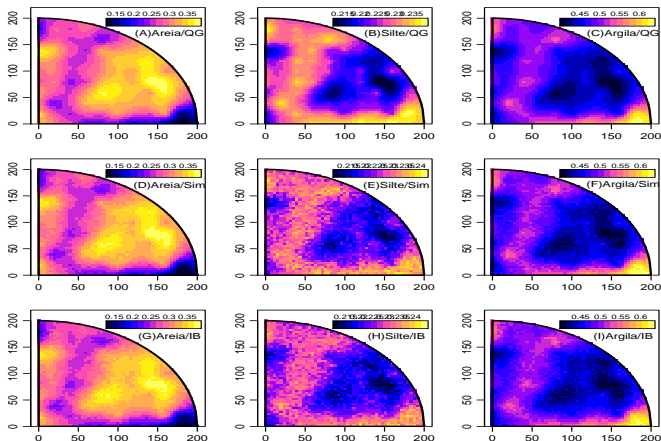


Figura: Mapas das porcentagens de areia, silte e argila obtidos por quadratura Gaussiana (GH), por simulação (Sim) e por inferência Bayesiana (IB).

Conclusão

- Construção de mapas de areia, silte e argila garantindo que as frações somem 1, nos pontos observados e preditos;
- Modelo captura variações espaciais, induzidas pelas composições e não estruturadas;
- Declaração explícita do modelo permite fazer inferências sobre parâmetros tanto pelo método clássico quanto por inferência Bayesiana considerando nas predições a incerteza associada à estimação dos parâmetros;
- Estimação de outros funcionais;
- Necessidade de investigar alternativas para computação mais eficiente e formas de especificação do modelo para um número maior de componentes.

Bibliografia

- AITCHISON, J., *The statistical analysis of compositional data*, New Jersey: The Blackburn Press, 1986.
- DIGGLE, P.J.; RIBEIRO JR, P.J., *Model-based geostatistics*, USA: Springer Series in Statistics, 2007.
- GONÇALVES, A.C.A., *Variabilidade espacial de propriedades físicas do solo para fins de manejo da irrigação*. 1997. 119p. Tese (Doutorado em Agronomia) - ESALQ-USP, São Paulo, Piracicaba.
- PAWLOWSKY-GLAHN, V.; OLEA, R.A., *Geostatistical analysis of compositional data*, New York: Oxford University Press, Inc., 2004.
- SCHMIDT, A.M.; GELFAND, A.E., A bayesian coregionalization approach for multivariate pollutant data. *Journal of Geophysical Research*, v. 108, p. 10-1-18-8, 2003.
- SCHMIDT, A.M.; SANSÓ, B., Modelagem bayesiana da estrutura de covariância de processos espaciais e espaço temporais, In: *17 SINAPE e ABE*, Caxambu: Associação Brasileira de Estatística, 2006, Minicurso.
- TJELMELAND, H.; LUND, K.V., Bayesian modelling of spatial compositional data. *Journal of Applied Statistics*, v. 30, n. 1, p. 87-100, 2003.

OBRIGADA PELA ATENÇÃO!

Agradecimentos

- DES - Departamento de Estatística, UEM.
- PPGMNE - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR.
- LEG - Laboratório de Estatística e Geoinformação, UFPR.
- CNPQ - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.
- FINEP projeto CT-INFRA/UFPR.