Introdução à Probabilidade

Silvia Shimakura

silvia.shimakura@ufpr.br

Probabilidade

- **O que é probabilidade?**

  Medida que quantifica a incerteza de um acontecimento futuro.

- **Como quantificar incerteza?**

  Definição clássica x Definição frequentista

Problema 1

- Experimento 1: Lançamento de uma moeda balanceada

- Espaço amostral: conjunto de todos os resultados possíveis

$$E=\{Cara, Coroa\}$$

- Evento A: Cair cara voltada para cima

$$A=\{Cara\}$$

Cálculo de probabilidades

- Se os eventos simples de E forem equiprováveis a probabilidade de um evento A ocorrer:

$$P(A) = \frac{\textit{número de elementos em } A}{\textit{número de elementos em } E}$$

- Experimento 1: E={cara, coroa} → 2 elementos
  - Evento A: A={cara} → 1 elemento
  - P(A)=1/2

Problema 2

- Experimento 2: Lançamento de uma moeda
- Espaço amostral: E={Cara, Coroa}
- Evento A: Cara

  A={Cara}

- Eventos simples são equiprováveis?
- P(C)=?

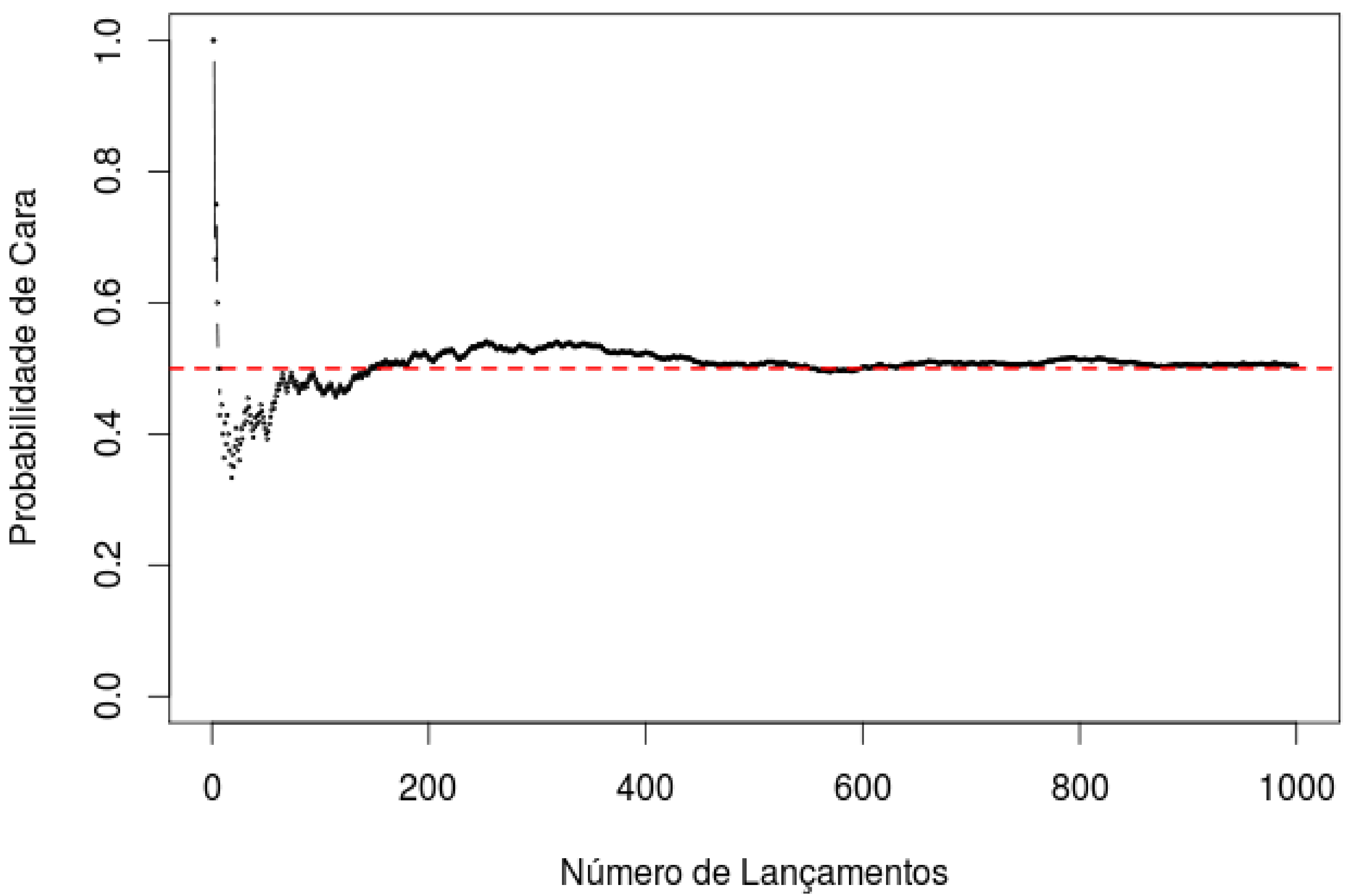
Visão frequentista de probabilidade

- Se os eventos simples não forem equiprováveis
- Probabilidade: frequência relativa de ocorrência do evento para um grande número de ensaios

Frequência relativa

- C: Cara   O: Coroa

Resultado	C	C	C	O	C	O	O	O	O	O	O	C
Frequência acumulada de Caras	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5
Número de lançamentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Freq. relativa de caras	1/1	2/2	3/3	3/4	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10	4/11	5/12
%	100	100	100	75	80	67	57	50	44	40	36	42


Probabilidade de Cara
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
200
400
600
800
1000
Número de Lançamentos

Tipos especiais de eventos

- **Evento complementar de A:** elementos do espaço amostral E que não estão em A

E={1, 2, 3, 4, 5, 6}   A={1, 3}

$$\bar{A} = \{2, 4, 5, 6\}$$

- **Evento interseção:** elementos estão em A e em B

A={1, 3}   B={2, 4, 6}   A∩B=∅

- **Evento união:** elementos que estão em A ou B

A∪B={1, 2, 3, 4, 6}

Tipos especiais de eventos

- Eventos mutuamente exclusivos: não existem elementos comuns em A e B

$$A=\{1, 3\} \quad B=\{2, 4, 6\} \quad A \cap B = \emptyset$$

Propriedades de probabilidade

- $0 \leq P(A) \leq 1$, para qualquer evento A

- $P(E)=1$, em que E é o espaço amostral

- $$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- Para dois eventos A e B quaisquer, a probabilidade de que A ou B ocorra:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Se A e B são mutuamente exclusivos, a probabilidade de que A ou B ocorra é a soma das probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade condicional

- É a probabilidade de B dado que A ocorreu. Notação: $P(B|A)$

- Para A e B quaisquer

$$P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$$

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

- Para A e B independentes

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$$

Exemplo: Lançamento de um dado não viciado

- Espaço amostral: 6 elementos com prob 1/6 cada

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

- Evento B: face 5 ou 6

- B=?

- P(B)=???

Exemplo: Lançamento de um dado não viciado

- Espaço amostral: 6 elementos com prob 1/6 cada

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

- Evento B: face 5 ou 6

$$B=\{5, 6\}$$

- $P(B)=?$

Exemplo: Lançamento de um dado não viciado

- Espaço amostral: 6 elementos com prob 1/6 cada

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

- Evento B: face 5 ou 6

$$B=\{5, 6\}$$

- $P(B)=2/6$

Exemplo: Lançamento de um dado não viciado

- Espaço amostral: 6 elementos com prob 1/6 cada

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

- Evento B: face 5 ou 6

$$B=\{5, 6\}$$

- $P(B)=2/6$

Se soubermos que o resultado no primeiro dado é maior do que 3, qual será a probabilidade da face ser 5 ou 6?

Exemplo (cont.)

- Evento B:

  $B=\{5, 6\} \rightarrow P(B)=2/6$

- Evento A: face é maior do que 3

  $A=\{4, 5, 6\} \rightarrow P(A)=3/6$

- Evento interseção: $A \cap B=\{5, 6\} \rightarrow P(A \cap B)=2/6$

- $P(B|A)=?$

Exemplo (cont.)

- Evento B: face 5 ou 6

$B=\{5, 6\} \rightarrow P(B)=2/6$

- Evento A: face é maior do que 3

$A=\{4, 5, 6\} \rightarrow P(A)=3/6$

- Evento interseção: **$A \cap B=\{5, 6\} \rightarrow P(A \cap B)=2/6$**

$$P(B|A)=P(A \cap B)/P(A)=(2/6)/(3/6)=2/3$$

- A e B são independentes?
- A e B são mutuamente exclusivos?

Exemplo: Distribuição de peso e pressão arterial

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

- Prob. de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão elevada?

- Prob. de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão elevada e excesso de peso?

- Sabendo que a pessoa tem excesso de peso, qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão elevada?

Exemplo: Distribuição de peso e pressão arterial (cont.)

- Peso em excesso e pressão arterial normal são eventos mutuamente exclusivos?

- Pressão arterial e peso são independentes?

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico

- Suponha que existam dois estados de saúde mutuamente exclusivos e exaustivos: D+ doente e D- não doente

- Seja T+ teste positivo e T- teste negativo

- Num estudo sobre o teste ergométrico, Wriner et al. (1979) compararam os resultados obtidos entre indivíduos com e sem doença coronariana.

- **T+**: mais de 1mm de depressão ou elevação do segmento ST, por pelo menos 0,08s, em comparação com paciente em repouso.
- **D+** e **D-**: angiografia (teste padrão ouro).

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico

Doença coronariana			Teste Ergométrico			
	T+		T-		Total	
D+	815	a	208	b	1023	a+b
D-	115	c	327	d	442	c+d
Total	930	a+c	535	b+d	1465	n

Temos interesse em responder as perguntas:

- Qual a probabilidade do teste ser positivo dado que o paciente é doente?
- Qual a probabilidade do teste ser negativo dado que o paciente não é doente?

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico

Doença coronariana			Teste Ergométrico			
	T+		T-		Total	
D+	815	a	208	b	1023	a+b
D-	115	c	327	d	442	c+d
Total	930	a+c	535	b+d	1465	n

Temos interesse em responder as perguntas:

- Qual a probabilidade do teste ser positivo dado que o paciente é doente? $P(T+|D+)=s$
- Qual a probabilidade do teste ser negativo dado que o paciente não é doente? $P(T-|D-)=e$

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico (cont.)

- Qual a probabilidade de que uma pessoa com resultado de teste positivo realmente tenha a doença?

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico (cont.)

- Qual a probabilidade de que uma pessoa com resultado de teste positivo realmente tenha a doença? $P(D+|T+)=VPP$

Teorema de Bayes

- Se A1, A2, … An são n eventos mutuamente exclusivos e exaustivos, tais que:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

- Pelo Teorema de Bayes:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{P(A_1) P(B | A_1) + \ldots + P(A_n) P(B | A_n)}$$

Teorema de Bayes

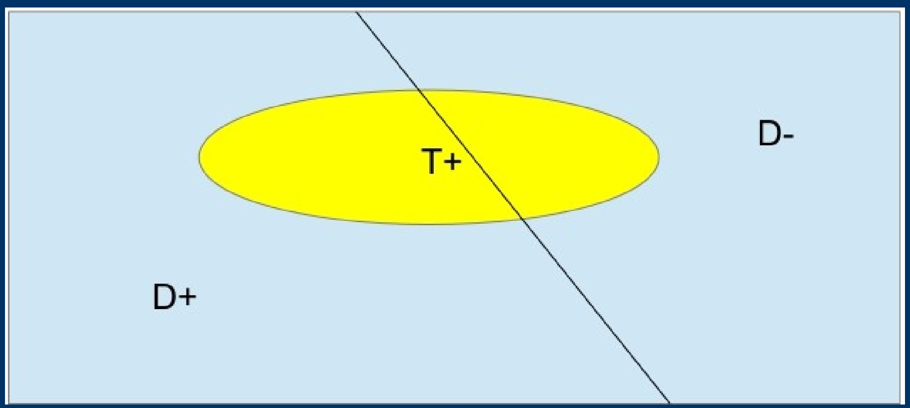
- Se A1 e A2 são 2 eventos mutuamente exclusivos e exaustivos, tais que:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 1$$

- Pelo Teorema de Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

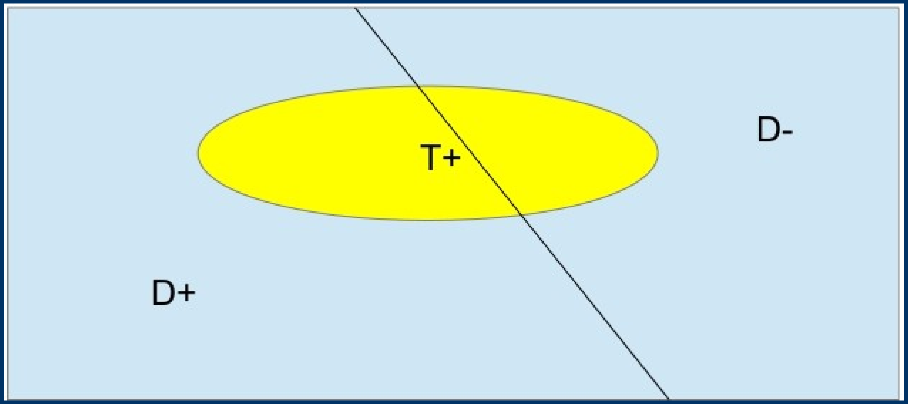
Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico



- D+ ∩ D- = Ø
- D+ ∪ D- = E
- Conhecidos:
  - **p=P(D+)**
  - **P(D-)=1-p**
  - **s=P(T+|D+)**
  - **e=P(T-|D-)**

$$P(D+|T+)=\frac{P(D+\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(D+\cap T+)}{P(D+\cap T+)+P(D-\cap T+)}=\frac{P(D+)P(T+|D+)}{P(D+)P(T+|D+)+P(D-)P(T+|D-)}$$

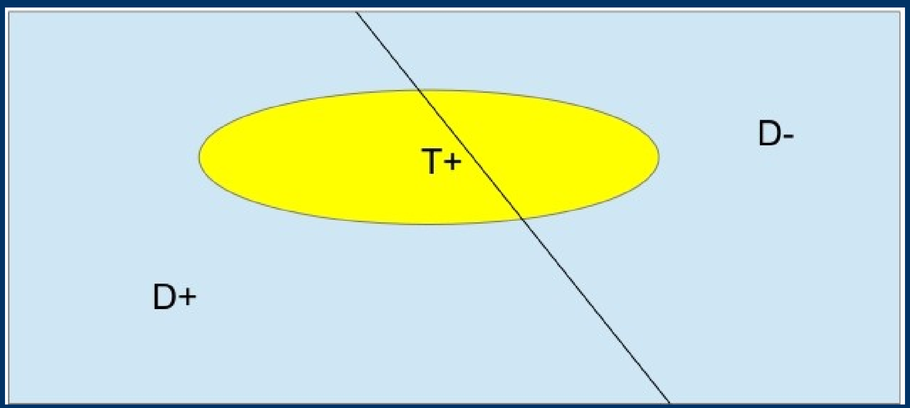
Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico



- D+ ∩ D- = Ø
- D+ ∪ D- = E
- Conhecidos:
  - **p=P(D+)**
  - **P(D-)=1-p**
  - **s=P(T+|D+)**
  - **e=P(T-|D-)**

$$P(D+|T+)=\frac{P(D+\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(D+\cap T+)}{P(D+\cap T+)+P(D-\cap T+)}=\frac{\overbrace{P(D+)}^{p}\,\overbrace{P(T+|D+)}^{s}}{P(D+)P(T+|D+)+\underbrace{P(D-)}_{(1-p)}\,\underbrace{P(T+|D-)}_{(1-e)}}$$

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico



- $D+ \cap D- = \emptyset$
- $D+ \cup D- = E$
- Conhecidos:
  - P(D+) e P(D-)
  - P(T+|D+) e P(T-|D-)

$$P(D+|T+)=\frac{P(D+\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(D+\cap T+)}{P(D+\cap T+)+P(D-\cap T+)}=\frac{P(D+)P(T+|D+)}{P(D+)P(T+|D+)+P(D-)P(T+|D-)}$$

$$VPP=P(D+|T+)=\frac{p\,s}{p\,s+(1-p)(1-e)}$$