

Exercícios sobre Verossimilhança - II

1. Seja X uma v.a. com distribuição binomial negativa e definida como o número de falhas em uma sequência de ensaios de Bernoulli até que se obtenha o n -ésimo sucesso com função de probabilidade dada por:

$$P(X = x) = \binom{n+x-1}{x} \theta^n (1-\theta)^x ; x = 0, 1, 2, \dots ; n > 0 \text{ e } 0 < \theta \leq 1$$

Considere que o número desejado de sucessos é de $n = 3$.

- (a) Obtenha a função de verossimilhança para cada uma das observações a seguir e desenhe todas em um mesmo gráfico que pode ser escalonado, se necessário.
- Sabe-se que ocorreram exatamente cinco falhas, isto é, $x = 5$.
 - Sabe-se apenas que o número de falhas é no máximo nove, isto é $x \leq 9$.
 - Sabe-se que ocorreram entre duas e oito falhas, isto é, $2 \leq x \leq 8$.
- (b) Considere agora que nas condições do problema anterior são obtidas três observações independentes dadas pelos itens da questão anterior. Escreva e obtenha um gráfico de função de verossimilhança para o conjunto das observações. Faça o gráfico da função, se possível sobreposto as da questão anterior.
- (c) Encontre o valor da estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro θ para cada um dos itens de primeira questão e também para as condições da segunda questão.
- (d) Considere a reparametrização $\psi = \log(\theta/1 - \theta)$ e obtenha o gráfico da função de verossimilhança para $x = 5$.
- (e) Obtenha para $x = 5$ intervalos para θ das formas a seguir e discuta os resultados.
- Intervalo de verossimilhança para valores relativos de 20, 15, 10 e 4%.
 - Intervalo de confiança de Wilks (pela razão de verossimilhança) para 5 e 1%.
 - Intervalo de confiança de Wald (pela aproximação quadrática) para 5 e 1 %.
 - Intervalo obtido a partir da transformação inversa dos limites do intervalo de Wilks para ψ .
 - Intervalo obtido a partir da transformação do erro padrão de $\hat{\psi}$ obtido por aproximação quadrática (Wald).
- (f) Avalie graficamente a aproximação quadrática da verossimilhança para $x = 5$
- pelos gráficos de verossimilhança
 - fazendo um gráfico de $-I^{1/2}(\hat{\theta})S(\theta)$ versus $I^{1/2}(\hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})$