Verossimilhança para modelos para variáveis transformadas

PJ

24 de setembro de 2015

Densidade de variável transformada

Seja uma v.a. Y com f.d.p. $f_Y(y)$ e uma transformação dada por uma função monótona $Y^* = h(Y)$. A f.d.p. de Y^* é dada por:

$$f_{Y^*}(y^*) = f_Y(h^{-1}(y^*)) \left| \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}Y^*} \right|,$$

equivalentemente

$$f_Y(h^{-1}(y^*)) = f_{Y^*}(y^*) \left| \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}Y^*} \right|^{-1}.$$

Daqui em diante denotamos:

$$J = \left| \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}Y^*} \right|.$$

Função de verossimilhança

Consideramos aqui que Y denota um conjunto de dados (variável resposta) na escala original e modelos em que assume-se uma densidade conhecida para Y^*. Para fins de comparação de modelos (com e sem transformação) é necessário obter a verossimilhança em uma escala comum, ou seja, na escala da variável original.

Considerando-se observações pontuais e independentes, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta; y) \equiv f(y; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_Y(y_i) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y^*}(y_i^*)(J_i)^{-1}$$

e a log-verossimilhança

$$\begin{aligned} l(\theta; y) = \sum_{i=1}^{n} \log(f_Y(y_i)) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\log\left(f_{Y^*}(y_i^*)\right) - \log(J_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log\left(f_{Y^*}(y_i^*)\right) - \sum_{i=1}^{n} \log(J_i) \\ &= l(\theta; y^*) - \sum_{i=1}^{n} \log(J_i) \end{aligned}$$

Ou seja, na prática, obtém-se a verossimilhança para o modelo ajustado com a variável transformada e subtrai-se a soma dos log-Jacobianos para as observações individualmente.

Transformação Box-Cox

A transformação Box-Cox é dada por:

$$Y^* = \begin{cases} \frac{Y^\lambda - 1}{\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log(Y) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

e portanto a transformação inversa $h^{-1}(\cdot)$ fica

$$Y = \begin{cases} (\lambda Y^* + 1)^{(1/\lambda)} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \exp\{Y^*\} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

o Jacobiano

$$J = \begin{cases} (\lambda Y^* + 1)^{(1/\lambda)-1} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \exp\{Y^*\} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

e o log-Jacobiano utilizado no cálculo da log-verossimilhança é:

$$\log(J) = \begin{cases} (\frac{1}{\lambda} - 1)\log(\lambda Y^* + 1)) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ Y^* & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Modelos de independência condicional

Esta classe é muito utilizada para modelar observações que são correlacionadas. Nesta classe de modelos, assume-se que, as observações y_i são independentes dado o valor x_i de uma variável latente. Desta forma a estrutura de dependência é dada assumindo-se uma distribuição multivariada para x, tipicamente assume-se uma normal multivariada. Desta forma para um vetor y^* de observações e densidade fica

$$f(y^*) = f(x) \cdot \prod_{i=1}^{n} f(y_i^*|x_i)$$

em que $f(x)$ é a distribuição multivariada que define a estrutura de dependência. A verossimilhança paraa modelos de efeitos latentes é dada para distribuição conjunta das variáveis aleatórias (observadas e latentes) integrada em relação à variável latente.

$$L(\theta; y) = \int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \int f_X(x) f_Y(y|x)\mathrm{d}x = \int f_X(x) \prod_{i=1}^{n} f_Y(y_i|x_i)\mathrm{d}x.$$

Para o modelo de variável transformada obtém-se então a verossimilhança

$$\begin{aligned} L(\theta; y) &= \int f_X(x) \prod_{i=1}^{n} f_{Y^*}(y_i^*|x_i) J_i^{-1} \mathrm{d}x \\ &= \left[\int f_X(x) \prod_{i=1}^{n} f_{Y^*}(y_i^*|x_i)\mathrm{d}x \right] \prod_{i=1}^{n} J_i^{-1} \\ &= L(\theta; y^*) \prod_{i=1}^{n} J_i^{-1}, \end{aligned}$$

e log-verossimilhança fica da seguinte forma:

$$l(\theta; y) = l(\theta; y^*) - \sum_{i=1}^{n} J_i.$$

Assim como anteriormente, obtém-se a verossimilhança para o modelo ajustado com a variável transformada e simplesmente subtrai-se a soma dos log-Jacobianos para as observações individualmente.

Exercício 1: distribuição para a transformação de uma variável aleatória

Seja um conjunto de dados abaixo aos quais se ajustou uma distribuição normal à uma transformação Box-Cox destes dados com $\lambda = 0,2$.

1. Obter a verossimilhança maximizada para os dados na escala transformada.

2. Obter a verossimilhança maximizada para os dados na escala original.

3. Comparar o ajuste dos dados com ajustes: da distribuição normal, da distribuição log-normal e da distribuição gamma (as dados originais)

```
 5,0  9,5   9,8   7,4  18,2   8,3  7,0  8,2  7,4  4,9
12,5 15,3   8,9  12,2  22,2   1,0  8,9  7,3  4,6  3,9
```

Exercício 2: Ajustar modelo transformado (Box-Cox) para os dados fornecidos no curso (regressão)

Exercício 3: Procurar uma outra família de transformação de variáveis e desenvolver os resultados para obter ajuste e verossimilhança na escala dos dados originais.