Introdução à Probabilidade

Silvia Shimakura

silvia.shimakura@ufpr.br

Probabilidade

- **O que é probabilidade?**

  Medida que quantifica a incerteza frente a um acontecimento futuro

- **Como quantificar incerteza?**
  - **Definição Clássica**
  - **Definição Frequentista**

Exemplo 1

- Experimento: Lançamento de um dado balanceado

- Espaço amostral: conjunto de todos os resultados possíveis

$$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Evento A: face par

$$A=\{2, 4, 6\}$$

Tipos especiais de eventos

- Evento complementar de A: elementos de E que não estão em A

E={1, 2, 3, 4, 5, 6}   A={2, 4, 6}

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

- Evento interseção: elementos estão em A e em B

A={2, 4, 6}   B={1, 3} $A \cap B = \emptyset$

- Evento união: elementos que estão em A ou B

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Tipos especiais de eventos

- Eventos mutuamente exclusivos: não existem elementos comuns em A e B

$$A=\{2, 4, 6\} \quad B=\{1, 3\} \quad A \cap B = \emptyset$$

Definição Clássica de Probabilidade

- Se os elementos de E forem equiprováveis a probabilidade de um evento A ocorrer:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos em } A}{\text{número de elementos em } E}$$

- Exemplo 1:

E={1,2,3,4,5,6} → 6 elementos (equiprováveis)

A={2,4,6} → P(A)=3/6

Definição Clássica de Probabilidade

- Evento complementar de A:

$$\bar{A}=\{1,3,5\}\Rightarrow P(\bar{A})=3/6$$

- Evento interseção:

$$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0$$

- Evento união:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,6\}\Rightarrow P(A\cup B)=5/6$$

Propriedades de Probabilidade

- $0 \leq P(A) \leq 1$, para qualquer evento A
- $P(E)=1$, em que E é o espaço amostral
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Para dois eventos A e B quaisquer, a probabilidade de que A ou B ocorra:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Se A e B são mutuamente exclusivos, a probabilidade de que A ou B ocorra é a soma das probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade condicional

- P(A|B)=P(A ocorrer dado que B ocorreu)

- Para A e B quaisquer:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

- Para A e B independentes: P(A|B)=P(A)

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$$

Exemplo 2: Lançamento de dois dados não viciados

- Espaço amostral:

$E=\{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (2,6), \ldots, (6,6)\}$

36 elementos $\rightarrow$ equiprováveis com prob 1/36 cada

- Evento A: soma dos dados é 8

- A=?

- P(A)=?

Exemplo 2: Lançamento de dois dados não viciados

- Espaço amostral:

  E={(1,1), (1,2), …, (1,6), (2,1), (2,2), …, (2,6), …, (6,6)}

  36 elementos → equiprováveis com prob 1/36 cada

- Evento A: soma dos dados é 8

- A={(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)}

- P(A)=?

Exemplo 2: Lançamento de dois dados não viciados

- Espaço amostral:

E={(1,1), (1,2), …, (1,6), (2,1), (2,2), …, (2,6), …, (6,6)}

36 elementos → equiprováveis com prob 1/36 cada

- Evento A: soma dos dados é 8

- A={(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)}

- P(A)=5/36

Exemplo 2: Lançamento de dois dados não viciados

- Espaço amostral: 36 elementos com prob 1/36 cada
- Evento A: soma dos dados é 8
- A={(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)}
- P(A)=5/36

Se soubermos que o resultado no primeiro dado é 3, qual será a probabilidade da soma dos dois dados ser 8?

Exemplo 2 (cont.)

- Evento A:

  $A=\{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \rightarrow P(A)=5/36$

- Evento B: primeiro dado é 3

  $B=\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} \rightarrow P(B)=6/36$

- Evento interseção: $A \cap B=\{(3,5)\} \rightarrow P(A \cap B)=1/36$

- $P(A|B)=?$

Exemplo 2 (cont.)

- Evento A:

  $A=\{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \rightarrow P(A)=5/36$

- Evento B: primeiro dado é 3

  $B=\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} \rightarrow P(B)=6/36$

- Evento interseção: $A \cap B=\{(3,5)\} \rightarrow P(A \cap B)=1/36$

- $P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)=(1/36)/(6/36)=1/6$

- A e B são independentes?
- A e B são mutuamente exclusivos?

Exemplo 2 (cont.)

- Evento A:

  A={(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)} → P(A)=5/36

- Evento B: primeiro dado é 3

  B={(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)} → P(B)=6/36

- Evento interseção: $A \cap B = \{(3,5)\} \rightarrow P(A \cap B) = 1/36$

- $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = (1/36)/(6/36) = 1/6$

- A e B são independentes? Não, pois $P(A|B) \neq P(A)$
- A e B são mutuamente exclusivos?

Exemplo 2 (cont.)

- Evento A:

  A={(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)} → P(A)=5/36

- Evento B: primeiro dado é 3

  B={(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)} → P(B)=6/36

- Evento interseção: $A \cap B = \{(3,5)\} \rightarrow P(A \cap B) = 1/36$

- $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = (1/36)/(6/36) = 1/6$

- A e B são independentes? Não, pois $P(A|B) \neq P(A)$
- A e B são mutuamente exclusivos? Não, pois $\mathbf{A \cap B \neq \emptyset}$

Exemplo 3

- Experimento: Lançamento de uma moeda
- Espaço amostral: E={Cara, Coroa}
- Evento C: Cara

$$C=\{Cara\}$$

- Elementos de E são equiprováveis?
- P(C)=?

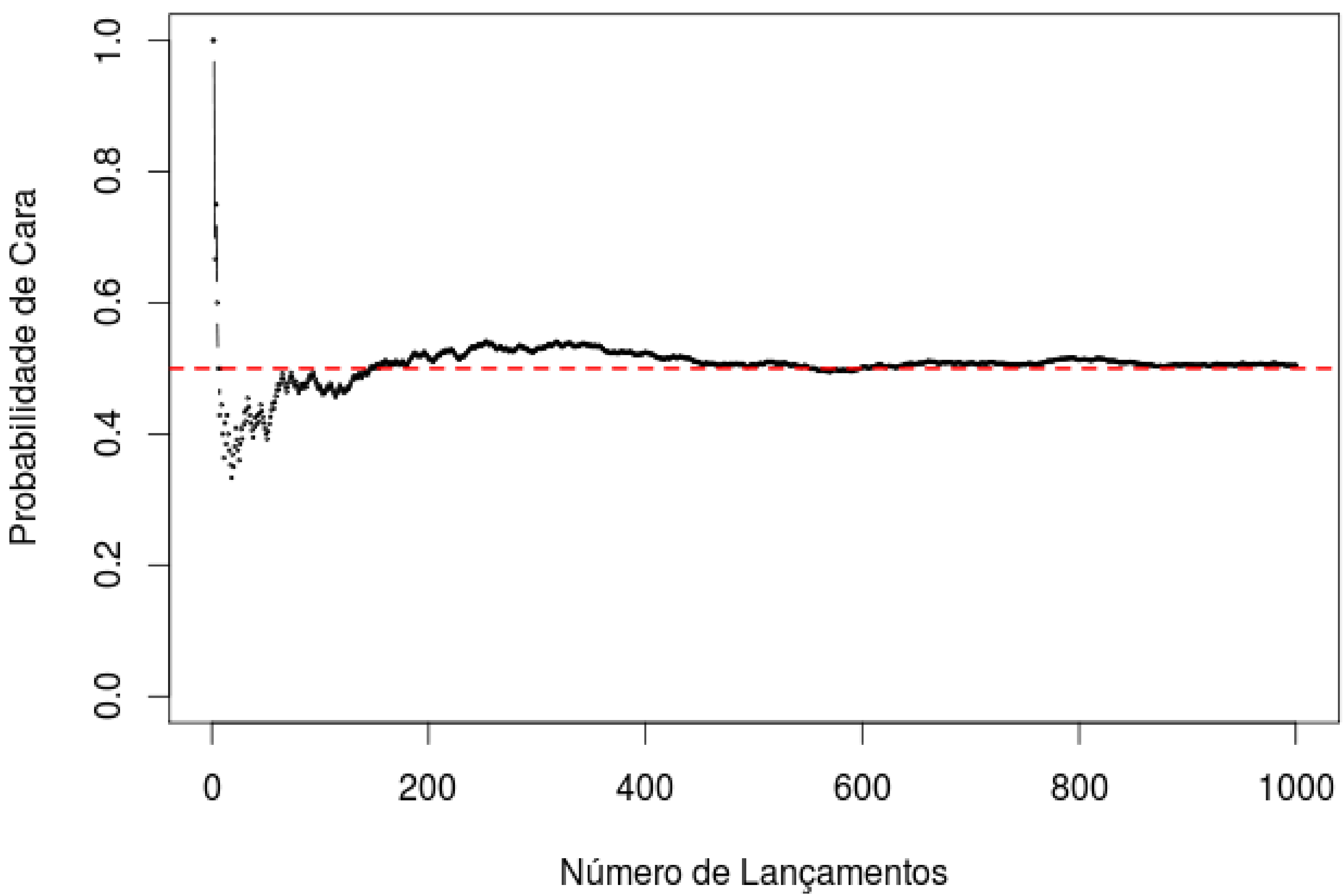
Visão frequentista de probabilidade

- Probabilidade: frequência relativa de ocorrência do evento para um grande número de sorteios

Frequência relativa

- C: Cara   O: Coroa

Resultado	C	C	C	O	C	O	O	O	O	O	O	C
Frequência acumulada de Caras	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5
Número de lançamentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Freq. relativa de caras	1/1	2/2	3/3	3/4	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10	4/11	5/12
%	100	100	100	75	80	67	57	50	44	40	36	42



Probabilidade de Cara
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
200
400
600
800
1000
Número de Lançamentos

Exemplo 4: Distribuição de peso e pressão arterial

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

- E=?
- P(pressão elevada)=?
- P(pressão elevada e excesso de peso)=?
- P(pressão elevada|excesso de peso)=?

Exemplo 4: Distribuição de peso e pressão arterial

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

- E={(pae,pe), (pae,pn), (pae,pd), (pan,pe), (pan,pn), (pan,pd)}
  não equiprováveis

- P(pressão elevada)=P(pae)=?

- P(pressão elevada e excesso de peso)=P(pae $\cap$ pe)=?

- P(pressão elevada|excesso de peso)=P(pae|pe)=?

Exemplo 4: Distribuição de peso e pressão arterial

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

- E={(pae,pe), (pae,pn), (pae,pd), (pan,pe), (pan,pn), (pan,pd)}
  não equiprováveis

- P(pae)= 0,2

- P(pae ∩ pe)= 0,10

- P(pae|pe)= ?

Exemplo 4: Distribuição de peso e pressão arterial

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

- E={(pae,pe), (pae,pn), (pae,pd), (pan,pe), (pan,pn), (pan,pd)}
  não equiprováveis

- P(pae)= 0,2

- P(pae ∩ pe)= 0,1

- P(pae|pe)= 0,10/0,25= 0,4

Exemplo 4: Distribuição de peso e pressão arterial (cont.)

- Peso em excesso e pressão arterial elevada são eventos mutuamente exclusivos?

- Pressão arterial e peso são independentes?

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico

Num estudo sobre a qualidade do teste ergométrico, Wrinner et al. (1979) compararam os resultados obtidos entre indivíduos com (D+) e sem (D-) doença coronariana.

- T+:teste positivo T-:teste negativo

- **T+**: mais de 1mm de depressão ou elevação do segmento ST, por pelo menos 0,08s, em comparação com paciente em repouso.
- **D+** e D-: angiografia (teste padrão ouro).

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico

Doença coronariana	Teste Ergométrico		
	T+	T-	Total
D+	815	208	1023
D-	115	327	442
Total	930	535	1465

Temos interesse em conhecer as probabilidades de acerto do teste:

- Probabilidade de teste positivo num paciente doente
- Probabilidade de teste negativo num paciente não doente

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico

Doença coronariana	Teste Ergométrico		
	T+	T-	Total
D+	815	208	1023
D-	115	327	442
Total	930	535	1465

Temos interesse em conhecer as probabilidades de acerto do teste:

- Probabilidade de teste positivo num paciente doente
  $P(T+|D+)$ = sensibilidade = s
- Probabilidade de teste negativo num paciente não doente
  $P(T-|D-)$ = especificidade = e

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico

Doença coronariana	Teste Ergométrico		
	T+	T-	Total
D+	815	208	1023
D-	115	327	442
Total	930	535	1465

Temos interesse em conhecer as probabilidades de acerto do teste:

- Probabilidade de teste positivo num paciente doente
  $s = 815/1023 = 0{,}80$
- Probabilidade de teste negativo num paciente não doente
  $e = 327/442 = 0{,}74$

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico (cont.)

Do ponto de vista do médico que precisa fechar o diagnóstico além da sensibilidade e especificidade do teste é importante conhecer as seguintes probabilidades:

- Probabilidade de que uma pessoa com resultado positivo no teste realmente tenha a doença
- Probabilidade de que uma pessoa com resultado negativo no teste realmente não tenha a doença

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico (cont.)

Do ponto de vista do médico que precisa fechar o diagnóstico além da sensibilidade e especificidade do teste é importante conhecer as seguintes probabilidades:

- Probabilidade de que uma pessoa com resultado positivo no teste realmente tenha a doença

  $P(D+|T+)=VPP$
- Probabilidade de que uma pessoa com resultado negativo no teste realmente não tenha a doença

  $P(D-|T-)=VPN$

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico

Doença coronariana	Teste Ergométrico		
	T+	T-	Total
D+	815	208	1023
D-	115	327	442
Total	930	535	1465

Podemos obter VPP e VPN direto da tabela acima?

VPP=P(D+|T+)= VPN=P(D-|T-)=

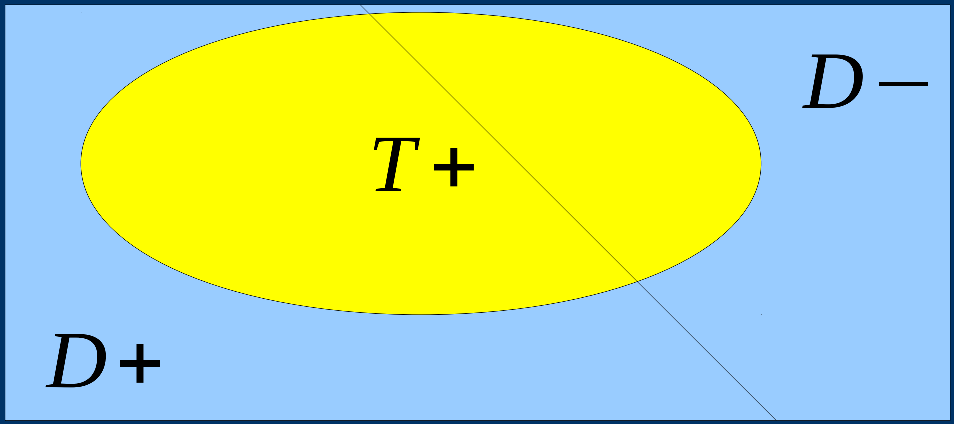
Teorema de Bayes

- Se D+ e D- são eventos mutuamente exclusivos e exaustivos ⇨ $P(D+ \cup D-)=P(D+)+P(D-)=1$

- Pelo Teorema de Bayes:

$$P(D+|T+)=\frac{P(D+)P(T+|D+)}{P(D+)P(T+|D+)+P(D-)P(T+|D-)}$$

Teorema de Bayes

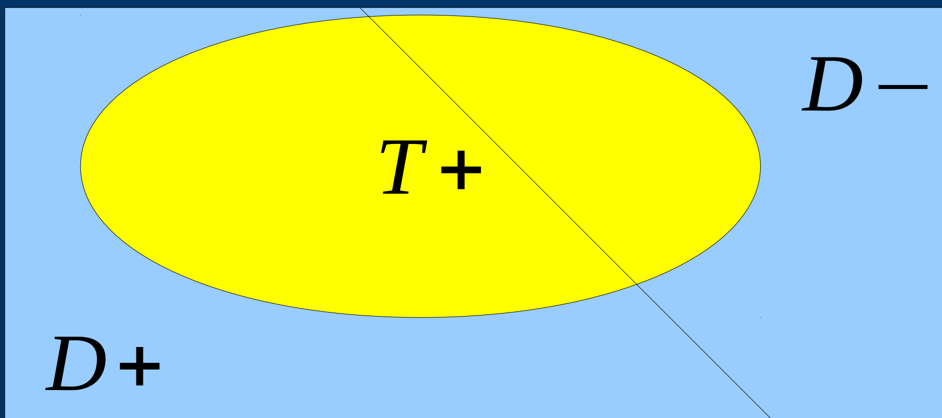


- $D+ \cap D- = \emptyset$
- $D+ \cup D- = E$
- Conhecidos: P(D+)=p

$P(T+|D+)=s \quad P(T-|D-)=e$

$$VPP = P(D+|T+) = \frac{P(D+ \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(T+ \cap D+)}{P(T+)}$$

Teorema de Bayes



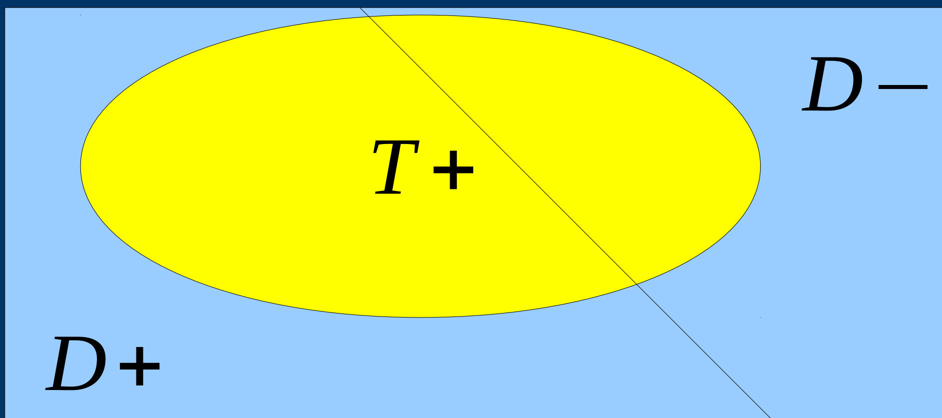
- $D+\cap D-=\varnothing$
- $D+\cup D-=E$
- Conhecidos: P(D+)=p

$$P(T+|D+)=s \quad P(T-|D-)=e$$

$$P(T+|D+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(D+)} \Rightarrow P(T+\cap D+)=P(T+|D+)P(D+)$$

$$VPP=P(D+|T+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(T+)}$$

Teorema de Bayes



- $D+ \cap D- = \emptyset$
- $D+ \cup D- = E$
- Conhecidos: P(D+)=p

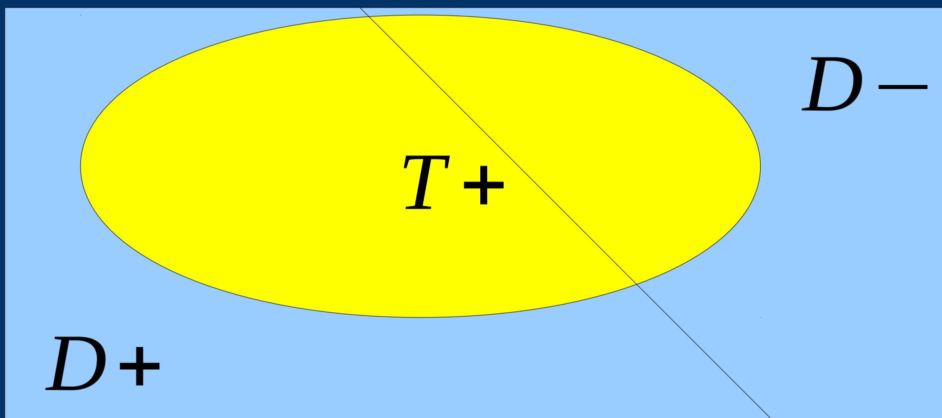
$$P(T+|D+) = s \quad P(T-|D-) = e$$

$$P(T+|D+) = \frac{P(T+\cap D+)}{P(D+)} \Rightarrow P(T+\cap D+) = P(T+|D+)P(D+)$$

$$= s \times p$$

$$VPP = P(D+|T+) = \frac{P(T+\cap D+)}{P(T+)}$$

Teorema de Bayes



- $D+\cap D-=\emptyset$
- $D+\cup D-=E$
- Conhecidos: P(D+)=p

$$P(T+|D+)=s \qquad P(T-|D-)=e$$

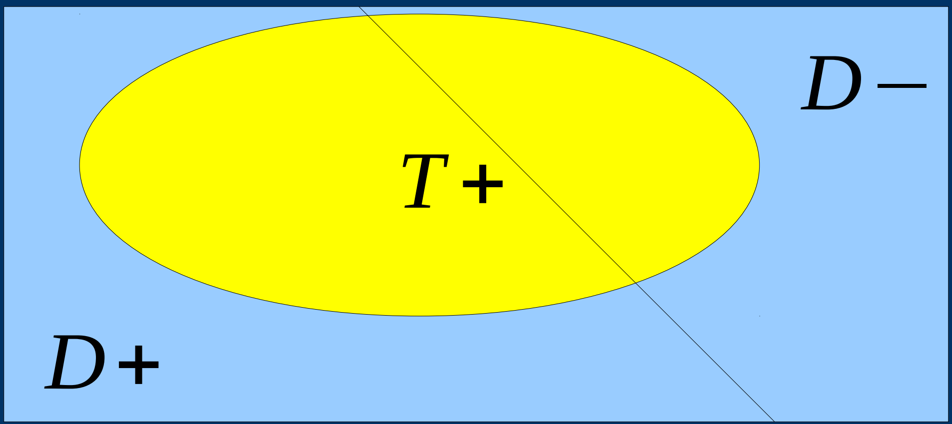
$$P(T+|D+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(D+)} \Rightarrow P(T+\cap D+)=P(T+|D+)P(D+)$$

$$=s\times p$$

$$VPP=P(D+|T+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(T+)}$$

$$P(T+)=P[(T+\cap D+)\cup(T+\cap D-)]$$

Teorema de Bayes



- $D+ \cap D- = \emptyset$
- $D+ \cup D- = E$
- Conhecidos: P(D+)=p

$P(T+|D+)=s \quad P(T-|D-)=e$

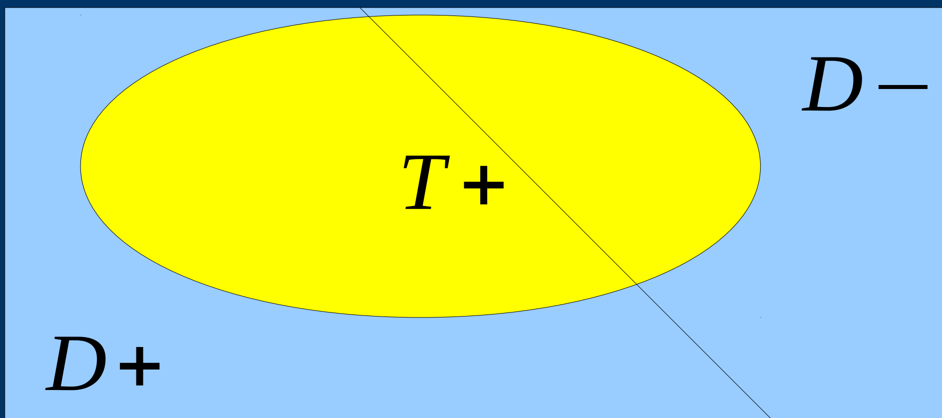
$$P(T+|D+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(D+)} \Rightarrow P(T+\cap D+)=P(T+|D+)P(D+)$$

$$=s\times p$$

$$VPP=P(D+|T+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(T+)}$$

$$P(T+)=P(T+\cap D+)+P(T+\cap D-)$$

Teorema de Bayes



- $D+ \cap D- = \emptyset$
- $D+ \cup D- = E$
- Conhecidos: P(D+)=p

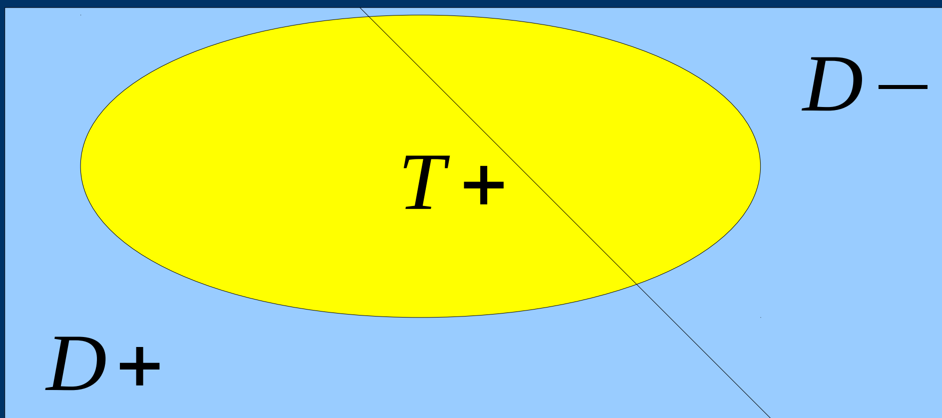
$$P(T+|D+)=s \qquad P(T-|D-)=e$$

$$P(T+|D+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(D+)} \;\Rightarrow\; P(T+\cap D+)=P(T+|D+)P(D+)$$
$$=s\times p$$

$$VPP=P(D+|T+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(T+)}$$

$$P(T+)=P(T+\cap D+)+P(T+\cap D-)$$
$$=P(T+|D+)P(D+)+P(T+|D-)P(D-)$$

Teorema de Bayes



- $D+ \cap D- = \emptyset$
- $D+ \cup D- = E$
- Conhecidos: P(D+)=p

$$P(T+|D+)=s \quad P(T-|D-)=e$$

$$P(T+|D+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(D+)} \Rightarrow P(T+\cap D+)=P(T+|D+)P(D+)$$

$$=s\times p$$

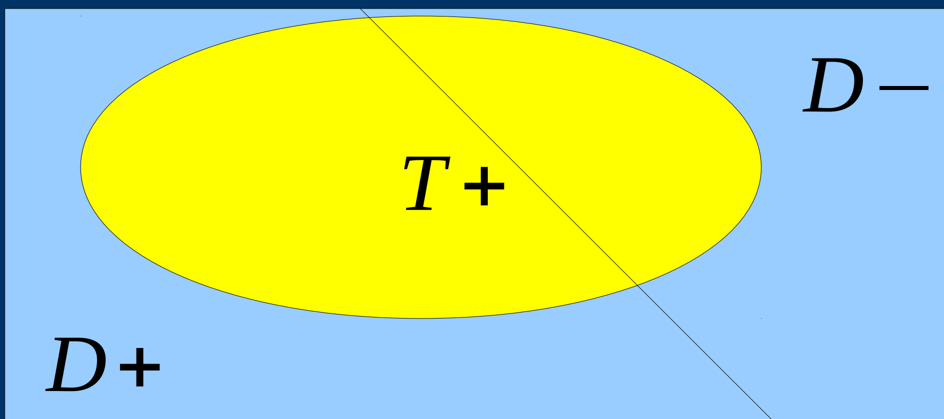
$$VPP=P(D+|T+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(T+)}$$

$$P(T+)=P(T+\cap D+)+P(T+\cap D-)$$

$$=P(T+|D+)P(D+)+P(T+|D-)P(D-)$$

$$=s\times p+(1-e)\times(1-p)$$

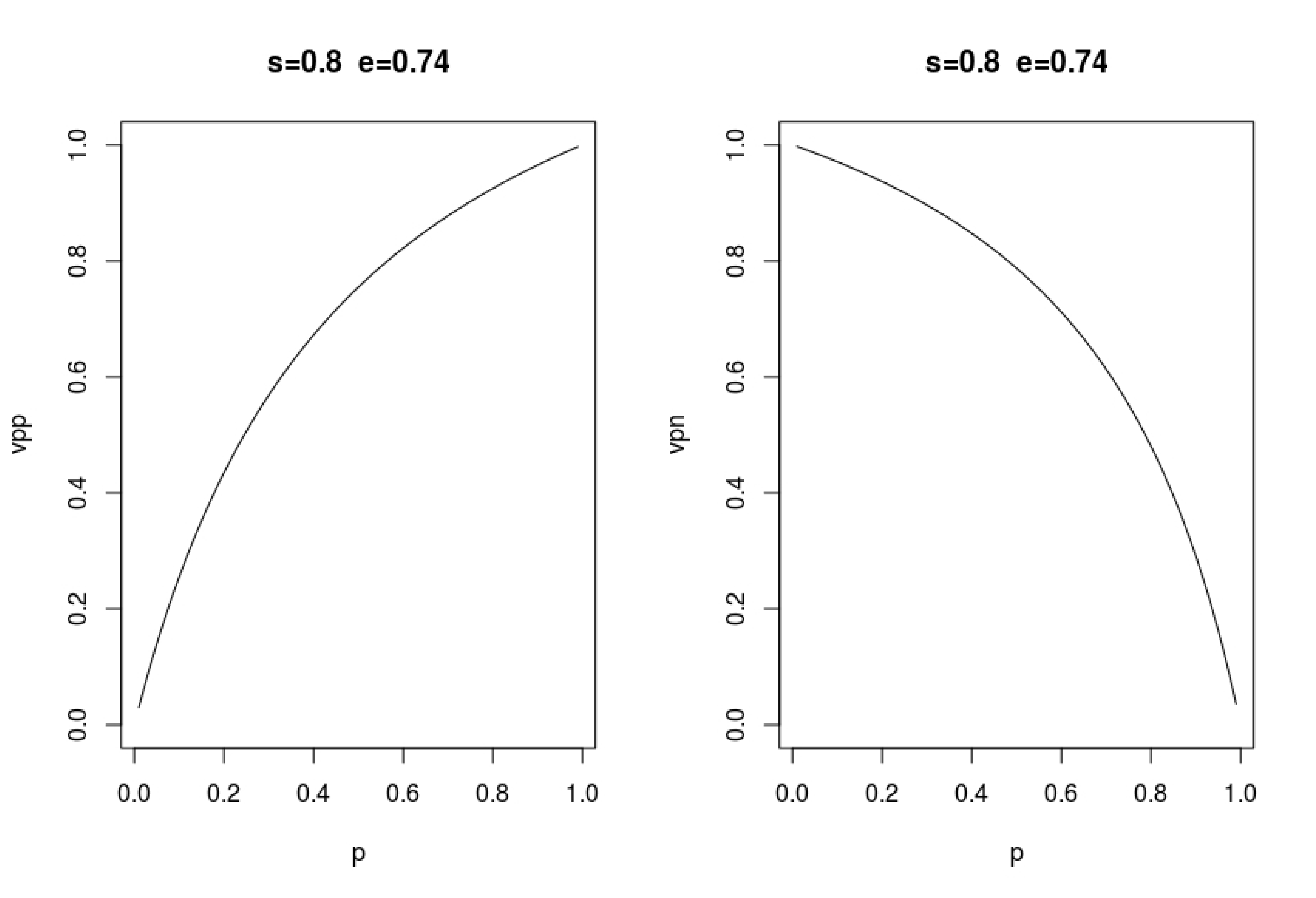
Teorema de Bayes



- $D+\cap D-=\emptyset$
- $D+\cup D-=E$
- Conhecidos: P(D+)=p

$$P(T+|D+)=s \quad P(T-|D-)=e$$

$$VPP=P(D+|T+)=\frac{P(T+\cap D+)}{P(T+)}=\frac{s\times p}{s\times p+(1-e)\times(1-p)}$$



s=0.8 e=0.74
vpp
p
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
s=0.8 e=0.74
vpn
p

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico

Doença coronariana	Teste Ergométrico		
	T+	T-	Total
D+	815	208	1023
D-	115	327	442
Total	930	535	1465

Podemos obter VPP e VPN direto da tabela acima?

$$VPP = P(D+ | T+) =$$

$$VPN = P(D- | T-) =$$

$$p = P(D+) = \frac{1023}{1465} = 0{,}70\,!!!$$

Exemplo 5: Qualidade de teste diagnóstico – tabela fictícia

Doença coronariana	Teste Ergométrico			
	T+	T-	Total	
D+	469	117	586	s=0,8
D-	229	650	879	e=0,74
Total	698	767	1465	p=0,4

Podemos obter VPP e VPN direto da tabela acima?

$$VPP = P(D+|T+) = 469/698 = 0{,}67$$

$$VPN = P(D-|T-) = 650/767 = 0{,}85$$