

Introdução à Probabilidade

Silvia Shimakura
silvia.shimakura@ufpr.br

Material inspirado no curso “Ensino da Estatística”
por Lisbeth Cordani (IME-USP)

Probabilidade

- **O que é probabilidade?**

É uma medida que **quantifica a incerteza** frente a um possível acontecimento futuro.

- **Como quantificar incerteza?**

Visão clássica: relaciona eventos favoráveis com eventos possíveis.

Visão frequentista: baseada em repetições de um experimento, sob condições semelhantes, um grande número de vezes.

Visão subjetiva: baseada na opinião pessoal.

Problema

- Um pacote de balas contém balas de uva e morango e limão.
- Uma bala é retirada do pacote ao acaso.
- Qual é a probabilidade da bala ser de uva?



Visão clássica de probabilidade

- **Espaço amostral:** conjunto de todos os resultados possíveis

$$E = \{\text{uva, morango, limão}\}$$

- **Evento:** subconjunto do espaço amostral

$$A = \{\text{uva}\}$$

- Se os eventos simples forem equiprováveis

- Probabilidade do evento A ocorrer é

$$P(A) = (\# \text{ favoráveis a } A) / (\# \text{ total de resultados})$$

- **Ex:** Probabilidade de retirar uma bala de uva do pacote é $1/3$.

Visão frequentista de probabilidade

- E se os eventos simples não forem equiprováveis?
 - Define-se probabilidade como o **limite da frequência relativa** de ocorrência do evento quando aumentamos o número de sorteios
 - Suponha que balas sejam sorteadas com reposição do pacote e os sabores sejam anotados.
 - Após um grande número de sorteios, espera-se uma frequência relativa de balas de uva próxima da probabilidade de sortear uma bala de uva.
-
-

Vamos trabalhar com a definição frequentista de probabilidade

- Peguem uma moeda do próprio bolso – olhem bem e digam se é honesta ou não!
- Como você poderia sugerir caminhos para buscar uma resposta?



Exemplo

- C: Cara O: Coroa

Resultado	C	C	C	O	C	O	O	O	O	O	O	C
Frequência acumulada de Caras	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5
Número de lançamentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Freq. relativa de caras	1/1	2/2	3/3	3/4	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10	4/11	5/12
%	100	100	100	75	80	67	57	50	44	40	36	42

Matemática x Probabilidade x Estatística

- **Sentença matemática (SM)**

“Todos os números primos são ímpares.”

- **Sentença probabilística (SP)**

“A probabilidade de se obter uma bala de leite clara num pacote com 100 balas sendo 85 claras é 0,85.”

- **Sentença estatística (SE)**

“Dois sorteios com reposição de duas balas do pacote resultou em duas balas claras, então todas as balas do pacote são claras.”

Analizando as sentenças

- **SM é falsa:** basta um único contra-exemplo para que ela possa ser considerada falsa. Não há dúvida sobre a falsidade da sentença.
 - **SP é verdadeira:** se existem 100 balas no pacote com 85 balas claras então a probabilidade de retirar uma bala clara é $85/100=0,85$. Não há nenhum risco em declarar que a sentença é verdadeira.
 - **SE é**
-
-

Sentença Estatística

- Não se pode dizer com certeza se é verdadeira ou falsa. Para cada resposta que se dê, corre-se um **risco de errar**.
 - Quantas vezes terei que sortear uma bala para não correr risco nenhum? Não há como não correr riscos!
 - O risco pode até diminuir à medida que se aumenta o número de sorteios, **mas nunca será zero**.
-
-

Sorteios independentes com reposição

Assuma que a proporção de balas claras é 0,85
 $P(\text{Sortear bala clara})=P(C)=0,85$

Número de sorteios	Um dos resultados possíveis	Probabilidade
2	2 claras (CC)	$0,85 \times 0,85 = 0,72$
3	3 claras (CCC)	$0,85 \times 0,85 \times 0,85 = 0,61$
4	4 claras (CCCC)	$0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times 0,85 = 0,52$
5	5 claras (CCCCC)	$0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times 0,85 = 0,44$
6	6 claras (CCCCCC)	$0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times 0,85 = 0,38$
...

Em estatística...

- As conclusões são sempre tomadas com um certo risco que é quantificado com auxílio da **Teoria de Probabilidades**.



Teoria x Prática

- Meu técnico disse que minha chance de ganhar uma corrida é 10% (1 em 10).
 - Como esta é a minha 10a corrida e não ganhei nas outras 9, já podemos comemorar pois é certo que ganharei esta!!!
 - Importante diferenciar o que é definido na **teoria** (probabilidade) e o resultado **prático** (estatística).
-
-

Propriedades de probabilidade

- Probabilidade varia entre 0 e 1. Quando o evento nunca acontece a probabilidade é 0, quando sempre acontece a probabilidade é 1.

- Para dois eventos A e B quaisquer, a probabilidade de que A ou B ocorra:

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

- Se A e B são mutuamente exclusivos, ou seja, quando um ocorre o outro não pode ocorrer. A probabilidade de que A ou B ocorra é a soma das probabilidades.

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade condicional

- É a probabilidade de B dado que A ocorreu.
Notação: $P(B|A)$

- Para A e B quaisquer

$$P(B|A) = P(A \text{ e } B) / P(A)$$

$$P(A \text{ e } B) = P(A) P(B|A)$$

- Para A e B independentes

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \text{ e } B) = P(A) P(B)$$

Exemplo: Distribuição de peso e pressão arterial

Pressão arterial	Peso			Total
	Excesso	Normal	Deficiente	
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

- Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso naquele grupo ter pressão elevada?
 - Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso naquele grupo ter pressão elevada e excesso de peso?
 - Diante da informação de que a pessoa tem excesso de peso, qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão elevada?
-
-

Exemplo: Distribuição de peso e pressão arterial (cont.)

- Pressão arterial e peso são independentes?
- Peso em excesso e pressão arterial normal são eventos mutuamente exclusivos?

Pressão arterial	Peso			Total
	Excesso	Normal	Deficiente	
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1