CE-003: Estatística II - Turma AMB - Avaliações Semanais (1^o semestre 2013)

1. Considere que será feita uma pesquisa aplicando-se um questionário sobre o curso e aos alunos da Eng. Ambiental para avaliar opiniões e impressões dos alunos.

   (a) Liste possíveis questões deste questionário certificando-se que sejam incluídas ao menos duas de cada tipo de variáveis conforme discutido em aula (qualitativas nominal/ordinal e quantitativas discreta/contínua).

   (b) Imagine agora que o questionário foi aplicado e as respostas tabuladas para análises. Indique/esboce como seria analisada (separadamente) cada uma das variáveis do questionário.

   (c) Indique ao menos três questões de interesse envolvendo duas ou mais variáveis a serem investigadas no questionário e qual análise dos dados permitiria investigar estas questões.

---

2. Foram coletados dados[1] sobre indicadores sociais em 97 países. Os atributos[2] são: *Nat: taxa de natalidade (1.000 hab.)*, *Mort: taxa de mortalidade (1.000 hab.)*, *MI: mortalidade infantil (1.000 hab)*, *ExpM: expectativa de vida para homens*, *ExpF: expectativa de vida para mulheres*, *Renda: renda per capta anula* e *Região: região geográfica* sendo consideradas: "EUOr"(Europa Oriental),"SA"(América Latina e México),"PM"("Primeiro Mundo"),"OrMd"(Oriente Médio), "Asia"e "Africa". A renda *per capta* foi também dividida em classes: $[0, 500)$, $[500, 2.000)$, $[2.000, 10.000)$ e $[10.000, 35.000)$. Um cabeçalho do arquivo de dados e um resumo das variáveis são mostrados a seguir.

```
                   Nat Mort   MI ExpM ExpF Renda Regiao    GrupoRenda
Albania           24.7  5.7 30.8 69.6 75.5   600   EUOr   (500,2e+03]
Bulgaria          12.5 11.9 14.4 68.3 74.7  2250   EUOr (2e+03,1e+04]
Czechoslovakia    13.4 11.7 11.3 71.8 77.7  2980   EUOr (2e+03,1e+04]
Former_E._Germany 12.0 12.4  7.6 69.8 75.9    NA   EUOr          <NA>
Hungary           11.6 13.4 14.8 65.4 73.8  2780   EUOr (2e+03,1e+04]
Poland            14.3 10.2 16.0 67.2 75.7  1690   EUOr   (500,2e+03]

      Nat            Mort             MI              ExpM            ExpF
 Min.   : 9.7   Min.   : 2.2   Min.   :  4.5   Min.   :38.1   Min.   :41.2
 1st Qu.:14.5   1st Qu.: 7.8   1st Qu.: 13.1   1st Qu.:55.8   1st Qu.:57.5
 Median :29.0   Median : 9.5   Median : 43.0   Median :63.7   Median :67.8
 Mean   :29.2   Mean   :10.8   Mean   : 54.9   Mean   :61.5   Mean   :66.2
 3rd Qu.:42.2   3rd Qu.:12.5   3rd Qu.: 83.0   3rd Qu.:68.6   3rd Qu.:75.4
 Max.   :52.2   Max.   :25.0   Max.   :181.6   Max.   :75.9   Max.   :81.8

     Renda            Regiao             GrupoRenda
 Min.   :   80   EUOr  :11   (0,500]          :24
 1st Qu.:  475   SA    :12   (500,2e+03]      :24
 Median : 1690   PM    :19   (2e+03,1e+04]    :22
 Mean   : 5741   OrMd  :11   (1e+04,3.5e+04]:21
 3rd Qu.: 7325   Asia  :17   NA's            : 6
 Max.   :34064   Africa:27
 NA's   :6
```

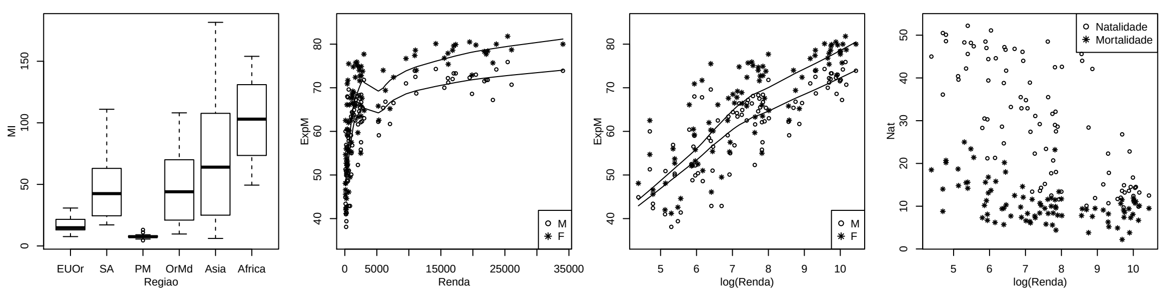
A seguir são mostrados alguns gráficos e resumos dos dados. Inicialmente são mostrados resumos das taxas de natalidade (`NAT`) para cada faixa de renda. A seguir uma tabela relaciona o grupo de renda com a região geográfica. Os gráficos ilustram relacionamentos entre algumas variáveis. As últimas matrizes são de correlação de Pearson e Spearman respectivamente.

   (a) Faça interpretações estatísticas, no contexto do problema, de cada um dos resultados mostrados.

   (b) Comente ao menos mais duas (2) questões de interesse que poderiam ser investigadas e não foram abordadas nos resultados já mostrados. Indique como seriam utilizados os dados (tipo de análise) para abordar estas questões.

[1] http://www.amstat.org/publications/jse/datasets/poverty.dat.txt
[2] http://www.amstat.org/publications/jse/datasets/poverty.txt

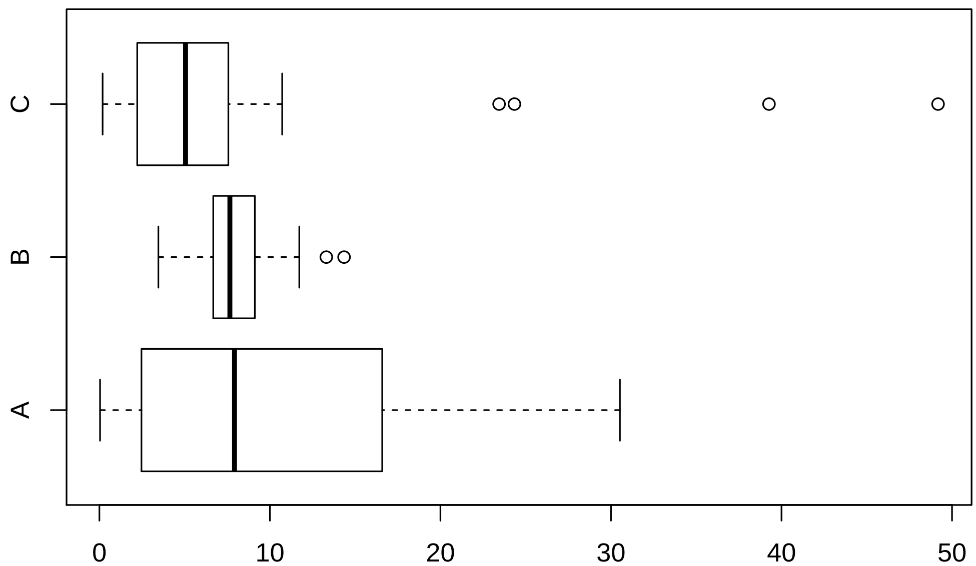
```
$`(0,500]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   21.2    38.6    44.8    41.7    48.3    52.2

$`(500,2e+03]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   13.4    24.4    32.9    31.8    39.6    47.2

$`(2e+03,1e+04]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   10.1    15.8    28.5    27.7    40.4    48.5

$`(1e+04,3.5e+04]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
    9.7    12.0    13.6    14.7    14.9    26.8

                 Regiao
GrupoRenda        EUOr SA PM OrMd Asia Africa
  (0,500]            0  1  0    0    8     15
  (500,2e+03]        5  6  0    2    3      8
  (2e+03,1e+04]      4  5  3    5    1      4
  (1e+04,3.5e+04]    0  0 16    3    2      0

X-squared
    87.64
```




```
          Nat    Mort      MI    ExpM    ExpF   Renda
Nat    1.0000  0.4862  0.8584 -0.8665 -0.8944 -0.6291
Mort   0.4862  1.0000  0.6546 -0.7335 -0.6930 -0.3028
MI     0.8584  0.6546  1.0000 -0.9368 -0.9554 -0.6016
ExpM  -0.8665 -0.7335 -0.9368  1.0000  0.9826  0.6430
ExpF  -0.8944 -0.6930 -0.9554  0.9826  1.0000  0.6500
Renda -0.6291 -0.3028 -0.6016  0.6430  0.6500  1.0000

          Nat    Mort      MI    ExpM    ExpF   Renda
Nat    1.0000  0.4045  0.8861 -0.8823 -0.9018 -0.7342
Mort   0.4045  1.0000  0.4930 -0.5942 -0.5346 -0.4473
MI     0.8861  0.4930  1.0000 -0.9481 -0.9622 -0.8363
ExpM  -0.8823 -0.5942 -0.9481  1.0000  0.9784  0.8240
ExpF  -0.9018 -0.5346 -0.9622  0.9784  1.0000  0.8391
Renda -0.7342 -0.4473 -0.8363  0.8240  0.8391  1.0000
```

---

3. (a) Os tempos de atendimento e solução de problemas foram medidos em três *call-centers* distintos de uma mesma empresa e os dados foram representados no gráfico a seguir. Baseando-se no gráfico, avalie cada uma das afirmações a seguir, dizendo se está certa ou errada, justificando sua resposta e corrigindo as afirmações erradas.



( ) Os valores no local C possuem uma distribuição simétrica.
( ) Os dados discrepantes do local A afetam (aumentam) a mediana do local.
( ) Os locais B e C possuem médias e desvios padrão semelhantes.
( ) O local B possui o menor coeficiente de variação.
( ) As médias dos três locais devem ser semelhantes.

(b) Uma cidade recebeu críticas à sua excessiva descarga de esgoto não tratado em um rio. Um microbiologista tomou 45 amostras na água depois da passagem pela planta de tratamento de esgoto e mediu a quantidade de coliformes (bactéria) presente nas amostras.

Número de Bactérias	Número de amostras
20-30	5
30-40	20
40-50	15
50-60	5

i. Obtenha a média
ii. Obtenha a mediana

Solução:

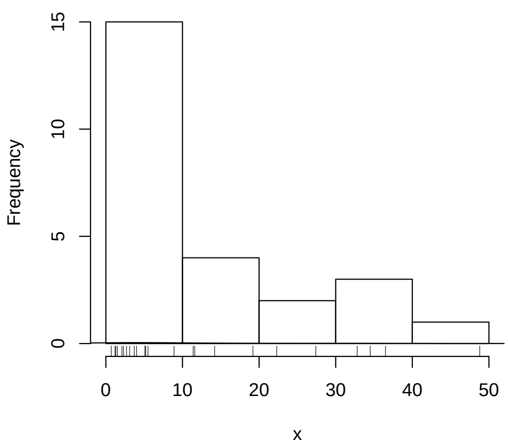
i. $\overline{x} = 39.44$
ii. $\text{md}(x) = 30 + \frac{10*(22{,}5-5)}{20} = 38.75$

(c) Em um levantamento geológico foram coletadas amostras de sedimentos de fundo de rios de uma bacia hidrográfica. Os teores obtidos de um certo elemento são mostrados a seguir.

`2.3 4.0 2.7 34.5 48.8 11.6 36.5 32.8 22.3 2.1 3.1 0.7 5.2`

`1.5 11.4 3.7 5.1 5.1 1.2 8.9 19.2 5.5 1.3 14.2 27.4`

i. obtenha o teor médio e o desvio padrão,
ii. obtenha os quantis e a amplitude,
iii. obtenha o coeficiente de variação,
iv. obtenha um histograma,
v. obtenha um box-plot,
vi. obtenha um diagrama de ramo-e-folhas,
vii. comente sobre o padrão da distribuição dos dados e se voce consideraria alguma outra forma de analisa-los.



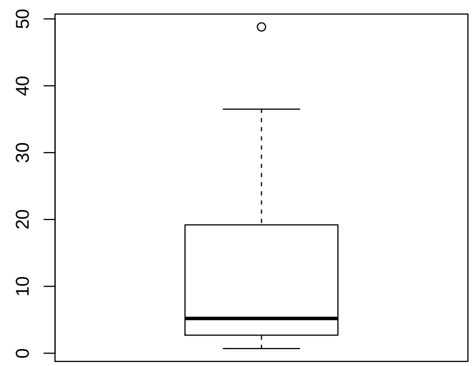


Figura 1: (d) histograma (esquerda) e (e) *box-plot* (direita) dos dados

Solução:

i. $\overline{x} = 12.44$ e $S_x = 13.6$

ii.
```
      Q1        md        Q3 Amplitude
     2.7       5.2      19.2      48.1
```

iii. $C.V. = 109\%$

iv.

v.

vi. > *stem(x)*

```
The decimal point is 1 digit(s) to the right of the |

0 | 111222334455569
1 | 1249
2 | 27
3 | 357
4 | 9
```

vii. comentários

---

4. (a) Dois dados são lançados. Calcule a probabilidade de:
   i. sairem dois números iguais,
   ii. o produto dos números que sairam ser ímpar,
   iii. o produto dos números que sairam ser ímpar ou a soma ser maior ou igual a 10,
   iv. a soma dos valores ser maior ou igual a sete, sabendo-se que em um dos dados saiu três,
   v. a soma ser maior que sete sabendo que sairam dois números iguais.

Solução:

$$X_1 : \text{resultado do primeiro dado} \quad X_2 : \text{resultado do segundo dado}$$

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots(6,6)\} \quad n(\Omega) = 36$$

i. $P[X_1 = X_2] = \frac{n(X_1=X_2)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = 0.167$

$$\text{evento } A : X_1 = X_2$$

$$P[A] = \frac{n(X_1 = X_2)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.167$$

ii.

$$\text{evento } B : X_1 \cdot X_2 \text{ é impar}$$
$$P[B] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25$$

iii.

$$\begin{aligned}
&\text{evento } C_1 : X_1 \cdot X_2 \text{ é impar}\\
&\text{evento } C_2 : X_1 + X_2 \geq 10\\
&P[C_1 \cup C_2] = P[C_1] + P[C_2] - P[C_1 \cap C_2] = \frac{9}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = 0.389
\end{aligned}$$

iv. a soma dos valores ser maior ou igual a sete, sabendo-se que em um dos dados saiu três,

$$\begin{aligned}
&\text{evento } D_1 : X_1 + X_2 \geq 7\\
&\text{evento } D_2 : X_1 = 3 \cup X_2 = 3\\
&P[D_1 \cup D_2] = P[D_1] + P[D_2] - P[D_1 \cap D_2] = \frac{21}{36} + \frac{11}{36} - \frac{6}{36} = \frac{26}{36} = 0.722
\end{aligned}$$

v. a soma ser maior que sete sabendo que sairam dois números iguais.

$$\begin{aligned}
&\text{evento } E_1 : X_1 + X_2 \geq 7\\
&\text{evento } E_2 : X_1 = X_2\\
&P[E_1|E_2] = \frac{P[E_1 \cap E_2]}{P[E_2]} = \frac{3/36}{6/36} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5
\end{aligned}$$

(b) Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma de quatro questões, cada uma com cinco alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

Solução:

$$\begin{aligned}
A_i &: \text{acerta a } i\text{-ésima questão} \;\; i = 1, \ldots, 4\\
P(A_i) &= 0,2 \;\; P(\overline{A}_i) = 0,8 \;\; \forall i\\
P(\text{acertar alguma}) &= 1 - P(\text{errar todas}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) \overset{ind}{=} 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4})) =\\
&= 1 - (0,8)^4 = 0.59
\end{aligned}$$

(c) Um reservatório recebe água de três fontes diferentes. A primeira tem 5% de chance de apresentar alguma contaminação, a segunda tem 6,5% e a terceira tem 12%. Qual a probabilidade do reservatório ser contaminado?

Solução:
Evento A : a água da primeira fonte é contaminada
Evento B : a água da segunda fonte é contaminada
Evento C : a água da terceira fonte é contaminada
Dados:

$$\begin{aligned}
P[A] &= 0,05 \;\; ; P[\overline{A}] = 0,95\\
P[B] &= 0,065 \;\; ; P[\overline{B}] = 0,935\\
P[C] &= 0,12 \;\; ; P[\overline{C}] = 0,88
\end{aligned}$$

$$P[\text{contaminação}] = P[A \cup B \cup C] = 1 - P[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}] \overset{ind}{=} P1 - [\overline{A}] \cdot P[\overline{B}] \cdot P[\overline{C}] = 1 - 0.95 \cdot 0.935 \cdot 0.880.2183$$

---

5. (a) Considere o problema a seguir de uma avaliação semanal anterior.
Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma de quatro questões, cada uma com cinco alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

i. Indique como fica o espaço amostral do experimento (sem necessariamente listar todos os elementos).
ii. Defina a variável aleatória (v.a) adequada ao interesse do problema.
iii. Monte uma tabela com a distribuição de probabilidades desta variável
iv. Caso possível identifique a distribuição de probabilidades desta variável e fornecendo a equação da distribuição.
v. Mostre como obter a probabilidade solicitada a partir do resultado de alguns dos itens anteriores.
vi. Qual o valor esperado va v.a ? Como este valor deve ser interpretado?

Solução:

i. $\Omega = (\overline{AAAA}), (\overline{AAA}A), (\overline{AA}A\overline{A}), \ldots (AAA\overline{A}), (AAAA) \quad n(\Omega) = 2^4 = 16$
ii. X : número de acertos
iii.

x	0	1	2	3	4
$P[X = x]$	$(0,8)^4$	$\binom{4}{1}(0,2)^1(0,8)^3$	$\binom{4}{2}(0,2)^2(0,8)^2$	$\binom{4}{3}(0,2)^3(0,8)^2$	$(0,2)^4$

iv. $X \sim B(n = 4, p = 0,2) \quad P[X = x] = \binom{4}{x}(0,2)^x(1-0,8)^{4-x}$
v. $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{4}{0}(0,2)^0(1-0,2)^{4-0} = 0.59$
vi. interpretação de $E[X]$

(b) Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

i. Mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida.
ii. Obtenha $P[0,5 < X < 1,5]$.
iii. Obtenha $P[X > 1,2]$.
iv. Obtenha $P[X > 1,2 | X > 0,5]$.
v. Obtenha o valor experado de X.

Solução:

i.

$$\text{Mostrar que: } f(x) \geq 0 \forall x \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\frac{3}{8}\frac{2^3 - 0^3}{3} = 1$$

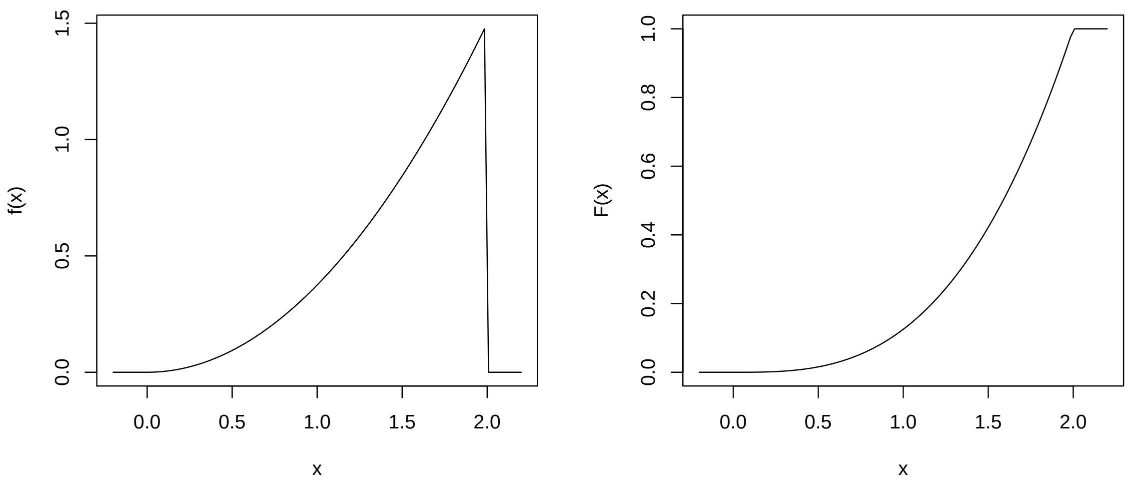
$$F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\frac{x^3 - 0^3}{3} = \frac{x^3}{8}$$

ii. $P[0,5 < X < 1,5] = \int_{0,5}^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = Fx(1,5) - Fx(0,5) = 0.406$
iii. $P[X > 1,2] = \int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1 - Fx(1,2) = 0.784$
iv. $P[X > 1,2 | X > 0,5] = \frac{\int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{0,5}^{2} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{1 - Fx(1,2)}{1 - Fx(0,5)} = 0.796$
v.

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}[\frac{2^4 - 0^4}{4}] = \frac{3}{2} = 1,5$$

Resoluções computacionais:

```
> require(MASS)
> ## a)
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, (3*x^2)/8, 0)
> integrate(fx, 0, 2)$value

[1] 1

> Fx <- function(x) ifelse(x>0, ifelse(x<=2, (x^3)/8,1), 0)
> Fx(2)

[1] 1

> ## b)
> integrate(fx, 0.5, 1.5)$value
```



H!

Figura 2: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição.

```
[1] 0.4062
> Fx(1.5)-Fx(0.5)
[1] 0.4062
> ##c)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value
[1] 0.784
> 1-Fx(1.2)
[1] 0.784
> ## d)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value/integrate(fx, 0.5, 2)$value
[1] 0.7964
> (1-Fx(1.2))/(1-Fx(0.5))
[1] 0.7964
> ## e)
> efx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, x*(3*x^2)/8, 0)
> integrate(efx, 0, 2)$value
[1] 1.5
```

---

6. Alguns biólogos fizeram estudos de laboratório sobre o comportamento de animais quando submetidos a um estímulo, o quais poderiam apresentar ou não resposta positiva. Em particular estavam interessados nas respostas positivas os estímulo. Considera-se que na população destes animais, 10% sejam sensíveis ao estímulo.

   O biologo A possuia um grupo em que 10 animais eram sensíveis e 20 eram insensíveis. Ele selecionou ao acaso 8 animais para teste.

   O biólogo B dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar o terceiro sensível ao estímulo.

   O biólogo C tomou fazia testes diários e encontrava uma média de 2,8 animais sensíveis a cada dia.

   O biólogo D submeteu 10 animais ao estímulo.

   O biólogo E dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar um sensível ao estímulo.

   (a) Qual a probabilidade do biólogo A encontrar ao menos 2 animais sensíveis?
   (b) Qual a probabilidade do biólogo B precisar testar no máximo 6 animais?
   (c) Qual a probabilidade do biólogo C encontrar menos que dois sensíveis em um determinado dia?
   (d) Qual a probabilidade do biólogo D encontrar mais que 3 animais sensíveis?
   (e) Qual a probabilidade do biólogo E precisar testar mais que 3 animais?

   Sugestão: especifique a(s) variável(eis) aleatória, sua(s) distribuição(ções) e pressuposições feitas.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
&X_a : \text{número de sensíveis entre os 8 selecionados}\\
&x_a \in \{0,1,2,\ldots 8\}\\
&X_a \sim HG(N=30, K=10, n=8)\\
P[X_a = x] &= \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-x}}{\binom{30}{8}}\\
P[X_a \geq 2] &= 1 - P[X_a \leq 1] = 1 - (P[X_a = 0] + P[X_a = 1]) = 0.846
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&X_b : \text{número de não sensíveis examinados até encontrar o terceiro sensível}\\
&x_b \in \{0,1,\ldots\}\\
&X_b \sim BN(k=3, p=0,1)\\
P[X_b = x] &= \binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x = \binom{x+2}{x} 0,1^3 0,9^x\\
P[X_b \leq 3] &= P[X_b = 0] + P[X_b = 1] + P[X_b = 2] + P[X_b = 3] = 0.016
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
&X_c : \text{número de sensíveis encontrados em um dia}\\
&x_c \in \{0,1,\ldots\}\\
&X_c \sim P(\lambda = 2,8)\\
P[X_c = x] &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{\mathrm{e}^{-2,8} 2,8^x}{x!}\\
P[X_c < 2] &= P[X_c = 0] + P[X_c = 1] = 0.231
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
&X_d : \text{número de sensíveis entre os 10 examinados}\\
&x_d \in \{0,1,\ldots 10\}\\
&X_d \sim B(n=10, p=0,1)\\
P[X_d = x] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{10}{x} 0,1^x 0,9^{10-x}\\
P[X_d > 3] &= 1 - P[X_d \leq 3] = 1 - (P[X_d = 0] + P[X_d = 1] + P[X_d = 2] + P[X_d = 3]) = 0.013
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
&X_e : \text{número de não sensíveis examinados até encontrar o primeiro sensível}\\
&x_e \in \{0,1,\ldots\}\\
&X_e \sim G(p=0,1)\\
P[X_e = x] &= p(1-p)^x = 0,1 \cdot 0,9^x\\
P[X_e > 3] &= 1 - P[X_e \leq 3] = 1 - (P[X_e = 0] + P[X_e = 1] + P[X_e = 2] + P[X_e = 3]) = 0.656
\end{aligned}$$

---

7. (a) Um biólogo percorre uma trilha de 5 km procurando avistar um exemplar de uma determinada ave. A chance de avistar a ave durante uma passada no percurso é de 25% e constante em todo o percurso.
   i. Qual a probabilidade avistar a ave e que seja nos primeiros 2 km do percurso?
   ii. Se ele avista a ave, qual a probabilidade de que seja nos últimos 500 metros do percurso?
   iii. Se ele avista a ave, qual a probabilidade de que seja no primeiro ou último quilometro do percurso?
   iv. Se ele avistou a ave e sabe-se que não foi nos primeiros 2 km qual a probabilidade de que tenha sido nos últimos 1.500 metros do percurso?
   v. É adotada a seguinte classificação para uma campanha: A: ave avistada nos primeiros 1.500 metros; B: ave avistada entre 1.500 e 4.000 metros; C: ave avistada nos últimos 1.000 metros; X: ave não avistada. Monte a distribuição de probabilidades da classificação da campanha.

Solução:

$$
\begin{aligned}
A &: \text{a ave é vista} \quad P[A] = 0,25 \\
X &: \text{posição onde a ave é avistada} \\
X|A &\sim U_c[0,5] \\
f(x|A) &= \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5}\mathrm{I}_{[0,5]}(x) \qquad F(x) = \frac{x-0}{5-0} = \frac{x}{5}
\end{aligned}
$$

i. $P[A \cap X < 2] = P[A] \cdot P[X < 2|A] = 0,25 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10} = 0.1$

ii. $P[X > 4,5|A] = \frac{0,5}{5} = \frac{1}{10} = 0.1$

iii. $P[X < 1 \cup X > 4|A] = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$

iv. $P[X > 3,5|A \cap X > 2] = \frac{\frac{5-3,5}{5}}{\frac{5-2}{5}} = \frac{1}{2} = 0.5$

v.

$$Y \sim \text{classificação da campanha} \quad y \in \{A, B, C, X\}$$

y	A	B	C	X
$P[Y=y]$	$P[A \cap X < 1,5]$	$P[A \cap 1,5 < X < 4]$	$P[A \cap X > 4]$	$P[\overline{A}]$
$P[Y=y]$	$P[A] \cdot P[X < 1,5\|A]$	$P[A] \cdot P[1,5 < X < 4\|A]$	$P[A] \cdot P[X > 4\|A]$	$P[\overline{A}]$
$P[Y=y]$	$0,25 \cdot 1,5/5 = 0.075$	$0,25 \cdot 2,5/5 = 0.125$	$0,25 \cdot 1/5 = 0.05$	0,75

(b) Assume-se que o tempo entre acessos a um blog tem uma distribuição com média de 1,5 segundos. Assumindo alguma distribuição responda os itens a seguir.

i. Qual a probabilidade de haver duas conexões com intervalo inferior a 1,5 segundos?

ii. Qual a probabilidade de se passarem 5 segundos sem conexão alguma?

iii. Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade da próxima conexão ocorrer entre 0,5 e 2,5 segundos?

iv. Se já se passou 1 segundo sem conexão, qual a probabilidade de se passar mais 0,5 segundos adicionais sem conexão?

v. Qual a probabilidade do intervalo entre conexões não superar 3,5 segundos se já se passaram 2 segundos sem conexão?

Solução:
Não se especificou a distribuição e vamos assumir a distribuição exponencial considerando: (i) que devem ser valores positivos, (ii) pela possibilidade de cálculos com as informações fornecidas.

$$
\begin{aligned}
X &: \text{intervalo de tempo entre conexões (segundos)} \\
X &\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1/1,5 = 2/3) \\
f(x) &= \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2x/3}\ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x) \qquad F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x/3}
\end{aligned}
$$

i. $P[X < 1,5] = \int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = F(1,5) = 0.63$

ii. $P[X > 5] = \int_5^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(5) = 0.036$

iii. $P[X < 0,5] = \int_{0,5}^{2,5} f(x)\mathrm{d}x = F(2,5) - F(0,5) = 0.53$

iv. $P[X > 1,5|X > 1] = \frac{\int_{1,5}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x}{\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} = {}^3P[X > 0,5] = 1 - F(0,5) = 0.72$

v. $P[X < 3,5|X > 2] = \frac{\int_2^{3,5} f(x)\mathrm{d}x}{\int_2^{3,5} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{F(3,5) - F(2)}{1 - F(2)} = {}^3P[X < 1,5] = F(1,5) = 0.63$

---

8. Um determinado elemento é medido regularmente em amostras de água e os valores possuem distribuição normal de média 500 e desvio padrão de 20 unidades.

(a) Se um grande número de amostras é processada, qual a proporção esperada com teores acima da 525 unidades?

(b) Se 6.000 amostras são processadas, quantas devem apresentar teores entre 470 e 510 unidades?

(c) Se uma amostra é considerada suspeita e enviada para reanálise se apresenta teor acima de 535 unidades, quantas dentre as 6.000 serão enviadas para reanálise?

(d) Considera-se como teores *usuais* 80% dos valores ao redor da média. Quais os valores que determinam a faixa de teores *usuais*.

(e) Qual deveria ser o teor médio para que 90% das amostras estivessem abaixo de 500 unidades?

[3] propriedade de falta de memória da exponencial

Solução:

$$X: \text{teores das amostras (unidades)}$$
$$X \sim N(\mu = 500, \sigma^2 = 20^2)$$

(a) $P[X > 525] = P[Z > \frac{525-500}{20}] = P[Z > 1.25] = 0,5 - P[0 < Z < 1.25] = 0,5 - 0.3944 = 0.1056$

(b)

$$P[470 < X < 510] = P[\frac{470-500}{20} < Z < \frac{510-500}{20}] = P[-1.5 < Z < 0.5] = P[0 < Z < 1.5] + P[0 < Z < 0.5] =$$

$0.4332 + 0.1915 = 0.6247$

$$\text{Número esperado}: n = 6.000 \cdot 0.6247 = 3748$$

(c)

$$P[X > 535] = P[Z > \frac{535-500}{20}] = P[Z > 1.75] = 0,5 - P[0 < Z < 1.75] = 0,5 - 0.4599 = 0.04006$$

$$\text{Número esperado}: n = 6.000 \cdot 0.04006 = 240$$

(d)

$$P[x_1 < X < x_2] = P[z_1 < Z < z_2] = 0,80$$
$$P[-1.282 < Z < 1.282] = 0,80$$
$$z = \frac{x-\mu}{s}$$
$$-1.282 = \frac{x_1 - 500}{20}$$
$$x_1 = 474.4$$
$$1.282 = \frac{x_2 - 500}{20}$$
$$x_2 = 525.6$$

(e)

$$P[X < 500] = 0,90$$
$$P[Z < 1.282] = 0,90$$
$$z = \frac{x-\mu}{s}$$
$$1.282 = \frac{500-\mu}{20}$$
$$\mu = 474.4$$

Solução Computacional:

```
> p.a <- pnorm(525, m=500, sd=20, low=F)
> p.b <- diff(pnorm(c(470,510), m=500, sd=20)); na <- 6000*p.b
> p.c <- pnorm(535, m=500, sd=20, low=F) ; n.c <- 6000*p.c
> q.d <- qnorm(c(0.10, 0.90), m=500, sd=20)
> mu.e  <- 500 - qnorm(0.90) * 20
```

---

9. Um determinado elemento é medido regularmente em amostras água coletadas um reservatório. Assume-se que os valores individuais das coletas possuem distribuição normal de média 500 e desvio padrão de 20 unidades. Em um programa de monitoramento são feitas periodicamente como rotina a amostragem com análise de cinco coletas. Se algum anomalia é detectada é feita uma inspeção detalhada. Adota-se considerar uma *anomalia* se o teor médio de uma amostra ultrapassa valor crítico de 512 unidades.

   (a) Qual a proporção de coletas que devem apresentar teores individuais entre 490 e 515 unidades?

(b) Qual a proporção de médias amostrais (das cinco coletas) que devem apresentar teores individuais entre 490 e 515 unidades?

(c) Entre quais valores de teores das coletas individuais ao redor da média de 500 unidades espera-se obter 90% das medidas?

(d) Entre quais valores ao redor da média de 500 unidades de teores médios das amostras de cinco coletas espera-se obter 90% das médias amostrais?

(e) Verificou-se em uma amostra o valor médio de 510 unidades. Voce considera que há uma anomalia e recomendaria uma inspeção detalhada? Justifique.

(f) Qual a probabilidade de encontrar um teor médio na amostra acima do valor crítico de 512 unidades, quando os valores do lago estão nos níveis usuais?

(g) Qual deveria ser o *valor crítico* para que a probabilidade de encontrar teores médios acima dele não ultrapasse 0,02?

(h) Se o *valor crítico* é mantido em 512 unidades qual deveria ser o número de coletas por amostra para que a probabilidade de encontrar teores médios acima de 512 unidades não ultrapasse 0,02?

(i) Suponha que tenha havido uma alteração no reservatório elevando a concentração média de 500 para 515 unidades. Qual seria a probabilidade de obter uma média amostras abaixo de 500 unidades?

(j) Ainda no contexto do item anterior, qual a probabilidade de não se recomendar uma inspeção detalhada?

Solução:

$$X : \text{tempo de processamentos (segundos)} \quad X \sim N(\mu_X = 500, \sigma^2_X = 20^2)$$
$$\overline{X} : \text{tempo de procesamentos (segundos)} \quad \overline{X} \sim N(\mu_{\overline{X}} = \mu_X, \sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2_X) \sim N(\mu_{\overline{X}} = 500, \sigma^2_{\overline{X}} = 20^2/5)$$

(a) $P[490 < X < 515] = P[\frac{490-500}{20} < Z < \frac{515-500}{20}] = P[-0.5 < Z < 0.75] = P[0 < Z < 0.5] + P[0 < Z < 0.75] = 0.4648$

(b) $P[490 < \overline{X} < 515] = P[\frac{490-500}{20/\sqrt{5}} < Z < \frac{515-500}{20/\sqrt{5}}] = P[-1.118 < Z < 1.677] = P[0 < Z < 1.118] + P[0 < Z < 1.677] = 0.8215$

(c)

$$P[500 - \Delta_X < X < 500 + \Delta_X] = 0,90$$
$$z = \frac{(500 + \Delta_X) - 500}{20} = 1.64$$
$$\Delta_X = 32.9$$
$$P[467.1 < X < 532.9] = 0,90$$

(d)

$$P[500 - \Delta_{\overline{X}} < \overline{X} < 500 + \Delta_{\overline{X}}] = 0,90$$
$$z = \frac{(500 + \Delta_{\overline{X}}) - 500}{20/\sqrt{5}} = 1.64$$
$$\Delta_{\overline{X}} = 14.71$$
$$P[485.3 < \overline{X} < 514.7] = 0,90$$

(e) $P[\overline{X} > 510] = P[Z > \frac{510-500}{20/\sqrt{5}}] = P[Z > 1.118] = 0,5 - P[0 < Z < 1.118] = 0,5 - 0.368 = 0.132$

(f) $P[\overline{X} > 512] = P[Z > \frac{512-500}{20}] = P[Z > 1.342] = 0,5 - P[0 < Z < 1.342] = 0,5 - 0.41 = 0.0899$

(g)

$$P[\overline{X} < \overline{x}_c] = 0,02$$
$$z = \frac{\overline{x}_c - 500}{20/\sqrt{5}} = 2.05$$
$$\overline{x}_c = 518.4$$

(h)

$$P[\overline{X}_n < 512] = 0,02$$
$$z = \frac{512 - 500}{20/\sqrt{n}} = 2.05$$
$$n = \left\lceil \frac{2.05^2 20^2}{(512-500)^2} \right\rceil = 12$$

(i) $P[\overline{X} < 500|\mu = 515] = P[Z < \frac{500-515}{20/\sqrt{5}}] = P[Z < -1.677] = 0,5 - P[0 < Z < 1.677] = 0,5 - 0.4532 = 0.04677$

(j) $P[\overline{X} < 512|\mu = 515] = P[Z < \frac{512-515}{20/\sqrt{5}}] = P[Z < -0.3354] = 0,5 - P[0 < Z < 0.3354] = 0,5 - 0.1313 = 0.3687$

Solução Computacional:

```
> (it.a <- diff(pnorm(c(490,515), m=500, sd=20)))

[1] 0.4648

> (it.b <- diff(pnorm(c(490,515), m=500, sd=20/sqrt(5))))

[1] 0.8215

> (it.c <- qnorm(c(0.05,0.95), m=500, sd=20))

[1] 467.1 532.9

> (it.d <- qnorm(c(0.05,0.95), m=500, sd=20/sqrt(5)))

[1] 485.3 514.7

> (it.e <- pnorm(510, m=500, sd=20/sqrt(5), low=F))

[1] 0.1318

> (it.f <- pnorm(512, m=500, sd=20/sqrt(5), low=F))

[1] 0.08986

> (it.g <- qnorm(0.98, m=500, sd=20/sqrt(5)))

[1] 518.4

> (it.h <- ceiling((qnorm(0.98)^2)*20^2/(512-500)^2))

[1] 12

> (it.i <- pnorm(500, m=515, sd=20/sqrt(5)))

[1] 0.04677

> (it.j <- pnorm(512, m=515, sd=20/sqrt(5)))

[1] 0.3687
```

---

10. Foi feita uma pesquisa junto a proprietários rurais para verificar o conhecimento sobre uma determinada legislação ambiental. Para isto foi selecionada uma amostra aleatória de 800 proprietários e vamos considerar aqui simplesmente que cada um deles era classificado como *0 - sem conhecimento* ou *1 - com conhecimento*. Feita a pesquisa, 504 foram classificados como *com conhecimento*.

    (a) Obtenha a estimativa pontual e intervalar (95% de confiança) para a proporção de proprietários com conhecimento da legislação.

    (b) Antes da pesquisa tabalhava-se com a hipótese de que o nível de conhecimento era da 60% dos proprietários. Há evidências estatísticas baseadas no estudo de que o o conhecimento seja diferente deste? Justifique sua resposta.

    (c) Após a pesquisa e uma campanha publicitária decidiu-se refazê-la porém deseja-se uma margem de erro de no máximo 1,5%. Qual deveria ser o tamanho da nova amostra?

Solução:

$$X: \text{conhecimento sobre a legislação} \qquad X \sim \mathrm{B}(p)$$
$$\mathrm{E}[X] = p \qquad \mathrm{Var}[X] = p(1-p) \qquad \hat{p} \sim \mathrm{N}(p, p(1-p)/n)$$

(a)

$$\hat{p} = \frac{504}{800} = 0.63$$
$$\text{I.C.assinttico}:$$
$$IC_{95\%}: \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \longrightarrow (0.597, 0.663)$$
$$\text{I.C.conservador}:$$
$$IC_{95\%}: \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{1}{4n}} \longrightarrow (0.595, 0.665)$$

(b) Resposta e justificativa baseada no valor estar ou não contido no I.C..

(c)

$$\mathrm{ME} = z_{95\%}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$
$$0.015 = 1.96\sqrt{\frac{0.63(1-0.63)}{n}}$$
$$n = \lceil \frac{1.96^2}{0,015^2} 0.63(1-0.63)$$
$$n = 3980$$

---

11. O acompanhamento de uma área de reflorestamento foi feito tomando uma amostra de 15 parcelas escolhidas ao acaso dentro da área. Em cada parcela são medidos diversos atributos. Abaixo estão as medidas de um deles, a soma de áreas basais das árvores da parcela.

```
23,5  27,6  26,7  25,4  23,4  30,0  29,1  27,1  23,4  22,3  28,6  25,3  26,5  24,8  25,4
```

(a) Obtenha estimativas pontuais da média e desvio padrão da área basal por parcela.

(b) Obtenha o intervalo de confiança (90%) do desvio padrão das áreas basais.

(c) Obtenha o intervalo de confiança (90%) da média da áreas basais.

Solução:

$$X: \text{área basal por parcela} \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$\overline{X}: \text{área basal média} \qquad \overline{X} \sim t_{n-1}(\mu, S^2/n)$$
$$\hat{\sigma}^2 = S^2: \text{variância da área basal por parcela} \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\nu = n-1)$$
$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{S^2}$$

(a)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 25.9$$
$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = 5.21$$
$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{S^2} = 2.28$$

(b) I.C. (90%) para variância

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{sup}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{inf}}\right)$$
$$\left(\frac{(15-1)5.21}{6.57}, \frac{(15-1)5.21}{6.57}\right)$$
$$(11.1, 3.079)$$

I.C. (90%) desvio padrão:

$$(3.332, 1.755)$$

(c) I.C. (90%) para média

$$IC_{95\%} : \overline{x} \pm t_{n-1,90\%}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$IC_{95\%} : 25.9 \pm 1.76\frac{2.28}{\sqrt{15}}$$
$$IC_{95\%} : (25.7; 26.2)$$
