CE-003: Estatística II - Turma K/O
Avaliações Semanais (2^o semestre 2014)

Semana 3

1. Um modelo simplificado do sistema de tipo sanguíneo humano possui quatro tipos de sangue: A, B, AB e O. Existem dois antígenos, anti-A e anti-B que reagem com o sangue de uma pessoa de diferentes formas de acordo com o tipo sanguíneo do indivíduo. Anti-A reage com tipos sanguíneos A a AB, mas não com B e O. Anti-B reage com tipos sanguíneos B a AB, mas não com A e O. Suponha que uma amostra de sangue de uma pessoa é coletada e testada com os dois antígeos. Denote por A o evento que o sangue reage com anti-A e por B o evento que o sangue reage com anti-B.

   (a) Classifique os possíveis tipos de sangue da pessoa usando a notação de eventos A e B e seus complementares.

   Suponha agora que, para uma determinada pessoa, a probabilidade de possuir o tipo O é de 0,50, a probabilidade do tipo A é 0,34 e a probabilidade do tipo B é de 0,12.

   (b) Encontre a probabilidade de que ambos antígenos sejam reagentes com o sangue da pessoa.
   (c) Encontre a probabilidade de que cada um dos antígenos vá reagir com o sangue da pessoa.
   (d) Sabendo que o sangue de uma pessoa reagiu com anti-A, qual a probabilidade de que a pessoa tenha sangue do tipo AB?
   (e) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Justifique.
   (f) Os eventos A e B são independentes? Justifique.

Solução:
Notação:

$$A : \text{a amostra reage a anti-}A$$
$$B : \text{a amostra reage a anti-}B$$

(a)

Tabela 1: Tipos sanguíneos, eventos que os definem e probabilidades de cada tipo.

Tipo sanguíneo	Evento	Probabilidade
O	$A^c \cap B^c$	$0,50$
A	$A \cap B^c$	$0,34$
B	$A^c \cap B$	$0,12$
AB	$A \cap B$	$0,04$

(b)
$$P[AB] = P[A \cap B] = 1 - P[O] - P[A] - P[B] = 0,04$$

(c)
$$P[A] = P[A \cap B^c] + P[A \cap B] = 0,34 + 0,04 = 0,38$$
$$P[B] = P[A^c \cap B] + P[A \cap B] = 0,12 + 0,04 = 0,16$$

(d)
$$P[(A \cap B)|P(A)] = \frac{P[(A \cap B) \cap (A)]}{P[A]} = \frac{P[(A \cap B)]}{P[A]} = \frac{0,04}{0,38} = 2/19 = 0.105$$

(e) Não, pois $P[A \cap B] = 0,04 \neq 0$
(f) Não, pois $P[A \cap B] = 0,04 \neq P[A] \cdot P[B] = 0,38 \cdot 0.16 = 0.0608$

Semana 4

1. Três algorítmos diferentes são utilizados, de forma independente, para tentar encontrar a solução ótima de um problema. Sabe-se que o primeiro algorítmo tem uma taxa de acerto de 75%, o segundo tem 60% e o terceiro tem 85%.

- Qual a probabilidade do problema ser resolvido?
- Qual a probabilidade de que a solução ótima seja encontrada por mais de um algorítmo?
- Qual a probabilidade de não seja encontrada a solução ótima de um problema submetido aos três algorítmos?

Procure usar a notação de eventos e operação de eventos no desenvolvimento de sua solução.

Solução:

(a)

$$A: \text{o primeiro resolve o problema} \quad P(A) = 0,75 \quad P(\overline{A}) = 0,25$$
$$B: \text{o segundo resolve o problema} \quad P(B) = 0,60 \quad P(\overline{B}) = 0,40$$
$$C: \text{o terceiro resolve o problema} \quad P(C) = 0,85 \quad P(\overline{C}) = 0,15$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \stackrel{ind}{=} 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - (1-0,75)(1-0,60)(1-0,85) = 0.985$$

(b) $P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \stackrel{ind}{=} P[A] \cdot P[B] \cdot P[\overline{C}] + P[A] \cdot P[\overline{B}] \cdot P[C] + P[\overline{A}] \cdot P[B] \cdot P[C] + P[A] \cdot P[B] \cdot P[C] = 0,75 \cdot 0,60 \cdot 0.15 + 0,75 \cdot 0,40 \cdot 0.85 + 0,25 \cdot 0,60 \cdot 0.85 + 0,75 \cdot 0,60 \cdot 0.85 = 0.832$

(c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \stackrel{ind}{=} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C} = (1-0,75)(1-0,60)(1-0,85) = 0.015$

---

2. Sabe-se a partir de históricos que 25% das requisições de transferências de dados em um sistema são recusadas. Há interesse em se estudar possíveis padrões de falhas o que é feito contando-se o número de falhas consecutivas até o sucesso no envio.
   - Qual a probabilidade de que ocorram três ou mais falhas consecutivas em um tentativa de envio?
   - Identifique neste problema a variável aleatória de interesse e seus possíveis valores
   - Mostre as probabilidades associadas a alguns dos valores desta variável.
   - Identifique uma equação que forneça os valores das probabilidades para os diferentes valores da variável.

Solução:
Eventos:

$$S: \text{ sucesso na transferência}$$
$$F \equiv \overline{S}: \text{ falha na transferência}$$

OBS: supõem-se independência entre as tentativas.

(a)

$$P[3 \text{ ou mais falhas}] = 1 - P[2 \text{ ou menos falhas}] = P[0 \text{ falhas}] + P[1 \text{ falha}] + P[2 \text{ falhas}]$$
$$= 1 - \{P[S] + P[F \cap S] + P[F \cap F \cap S]\} = 1 - [0,75 + 0,25 \cdot 0,75 + 0,25^2 \cdot 0,75] = 0.484$$

(b)

$$X: \text{número de falhas até conseguir o envio}$$
$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

(c)

x	0	1	2	3	...
P[X=x]	$0,75$	$0,25 \cdot 0,75$	$0,25^2 \cdot 0,75$	$0,25^3 \cdot 0,75$	...

(d) $P[X = x] = 0,25^x 0,75$

De forma mais geral a variável segue a distribuição chamada de *geométrica* com probabilidade p de sucesso:

$$X: \text{número de “falhas” até o primeiro “sucesso”}$$
$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$
$$X \sim \mathrm{G}(p)$$
$$P[X = x] = (1-p)^x p$$

Semana 5

1. Seja a função de densidade de probabilidade dada por $f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$. Obtenha:
   (a) o valor de C,
   (b) $P[X > 0,5]$,
   (c) $P[X > 0,7 | X > 0,5]$,
   (d) Calcule o valor que resulta de $\int_0^4 x \cdot f(x) \mathrm{d}x$. Voce consegue associar alguma interpretação a este valor?
   (e) Calcule o valor de x para o qual $P[X < x] = P[X > x] = 0,5$.

Solução:

$$f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$$

(a)

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} = 1$$
$$\int_0^4 Cx^2\mathrm{dx} = 1$$
$$C = \frac{1}{\int_0^4 x^2\mathrm{dx}}$$
$$C = 3/64$$

(b) $P[X > 0,5] = \int_{0,5}^4 Cx^2 \mathrm{d}x = 0.998$

(c) $P[X > 0,7|X > 0,5] = \frac{P[X>0,7 \cap X>0,5]}{P[X>0,5]} = \frac{P[X>0,7]}{P[X>0,5]} = \frac{\int_{0,7}^4 Cx^2\mathrm{d}x}{\int_{0,5}^4 Cx^2\mathrm{d}x} = 0.997$

(d) $E(X) = \int_0^4 x \cdot f(x)\mathrm{dx} = (3/64)\int_0^4 \mathrm{x}^3\mathrm{dx} = \ldots = 3$

(e) $\mathrm{md}(x) : \int_0^{\mathrm{md}(x)} f(x)\mathrm{d}x = 0,50 \longrightarrow \mathrm{md}(x) = (64 \cdot 0,50)^{1/3} = 3.2$